4. Proudění tekutin

- pohyb tekutiny nazýváme prouděním, tečením nebo tokem

- prouděním kapalin se zabývá hydrodynamická část mechaniky tekutin

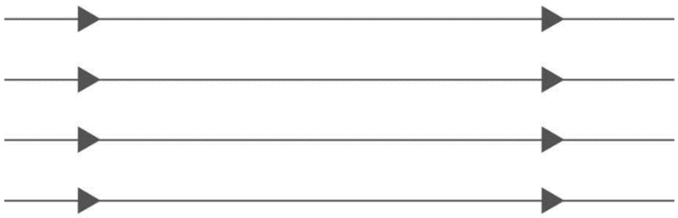
A) Fyzikální hlediska

- proudění ideální kapaliny   a) potenciální proudění (nevířivé)

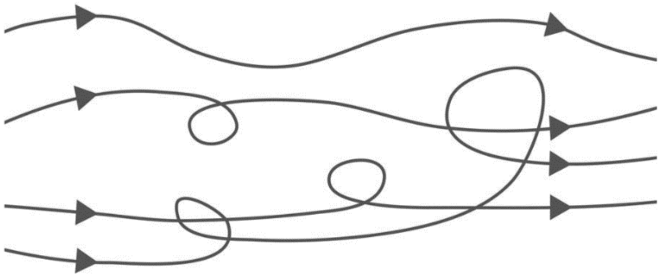
  b) vířivé proudění

-proudění skutečných tekutin (s vnitřním třením)

a) <u>laminární</u> – částice se pohybují ve vrstvách, nepřemisťují se v průřezu



b) <u>turbulentní</u> – částice se přemisťují i po průřezu



B) Kinetická hlediska

1) uspořádání proudění v prostoru

- 3 rozměry -> proud v prostoru $v = v(x, y, z)$
- 2 rozměry -> proud v prostoru $v = v(x, y)$
- 1 rozměr -> proud po křivce $v = v(s)$

2) rozložení rychlosti v prostoru

- rovnoměrné proudění $v = konst.$ $[v \neq v(x, y, z); v \neq v(s)]$
- nerovnoměrné proudění – všechny příklady B-1

3) závislost proudění na čase

- ustálené (stacionární, permanentní), není závislé na čase $v \neq v(t)$; $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- neustálené (nestacionární, nepermanentní), závislé na čase

$v = v(x, y, z, t); v = v(t)$

- z hlediska rozložení rychlosti v prostoru

- rovnoměrné (proudění v potrubí – vyvinuté)
- nerovnoměrné (obtékání profilu)

- pro vyšetřování pohybu tekutiny (2 metody)

a) <u>Lagrangeova</u> (pohyb hmotného bodu v mechanice tuhých těles) – nepřekonatelné matematické potíže

b) <u>Eulerova</u> (proudění tekutiny v určitém místě) – změna rychlosti či tlaku

proudnice – vektory rychlostí v proudovém poli

4.1. Rovnice kontinuity

- při proudění tekutin musí být splněn fyzikální zákon o zachování hmotnosti

- pro kontrolní objem V, kterým proudí tekutina, musí být hmotnost $m = konst.$, a její celková změna nulová

- u kontrolního objemu V
    - 1) <u>lokální</u> změna hmotnosti (tekutina se stlačuje nebo rozpíná)
    - 2) <u>konvektivní</u> změna hmotnosti (rozdíl přiteklé a odteklé hmotnosti z kontrolního objemu V)

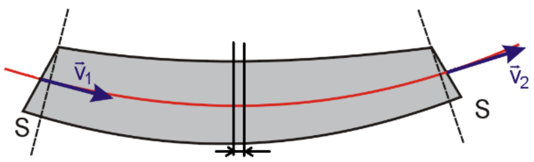
- obě změny musí dávat nulovou změnu hmotnosti;

- obě změny stejně velké, ale opačného znaménka;

Rovnice kontinuity pro 1 rozměrné proudění

- elementární kontrolní objem V tvoří váleček, jehož základnami protéká tekutina;

- plášť je tvořen proudnicemi, proto tok touto částí kontrolní plochy je nulový



$dm_{S1} = \rho.S.v.dt \rightarrow$ přítok

$$dm_{S2} = dm_{S1} + \frac{\partial}{\partial S}(dm_{S1})dS$$

$dm_{S2} = \rho.S.v.dt + \frac{\partial}{\partial S}(\rho.S.v.dt)dS \rightarrow$ výtok

<u>Konvektivní změna:</u> $dm_S = dm_{S2} - dm_{S1} = \boldsymbol{\frac{\partial}{\partial S}(\rho.S.v.dt)dS}$

- na počátku sledovaných změn hmotnosti $dm_{t1} = \rho.S.dS$

- po čase se změní $dm_{t2} = dm_{t1} + \frac{\partial}{\partial t}(dm_{t1})dt = \rho.S.dS + \frac{\partial}{\partial t}(\rho.S.dS)dt$

<u>Lokální změna:</u> $dm_t = dm_{t2} - dm_{t1} = \boldsymbol{\frac{\partial}{\partial t}(\rho.S.dS)dt}$

- pro splnění zákona o zachování hmotnosti $m = konst.$, musí $dm = 0$

$$dm = dm_S + dm_t = \boldsymbol{\frac{\partial}{\partial S}(\rho.S.v.dt)dS + \frac{\partial}{\partial t}(\rho.S.dS)dt = 0} \qquad (1)$$

- časová změna dt a posunutí dS na sobě nejsou závislé

$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial S}(\rho.S.v) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho.S) = 0} \tag{2}$$

- rovnice (2) je <u>obecná rovnice kontinuity</u> pro jednorozměrné proudění

- po zjednodušení a integraci

$$Q_m = \rho.S.v = konst.; \quad Q_m = \frac{m}{t} \tag{3}$$

- pro nestlačitelné kapaliny $\rho = konst.$

$$Q_v = S.v = konst.; \qquad Q_v = \frac{V}{t} \tag{4}$$

4.2. Rovnice kontinuity pro prostorové proudění

- obecnější případ než pro 1 rozměrné proudění

$dV = dx.dy.dz$

- neustálené prostorové proudění, stlačitelné tekutiny:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho.div\ v = 0 \tag{5}$$

- ustálené proudění platí $\frac{d\rho}{dt} = 0$

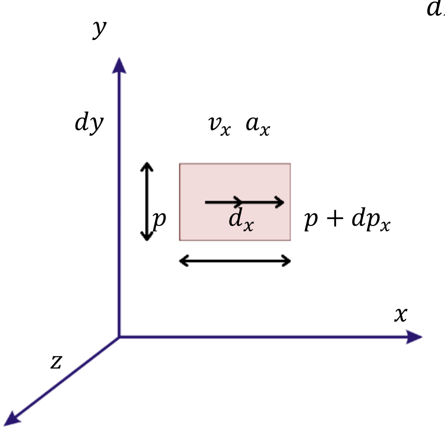
$$div\ v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{6}$$

- rovnice (6) platí pro neustálené proudění nestlačitelné tekutiny.

4.3. Eulerova rovnice hydrodynamiky

- vyjadřuje rovnováhu sil hmotnostních (objemových) F_o , tlakových F_p a setrvačných F_s

$$dF_o + dF_p = dF_s \tag{7}$$



- ve směru osy x: $dF_{px} = dF_{px1} - dF_{px2} = p.dy.dz - (p + dp_x)dy.dz = \boldsymbol{-dp_x.dy.dz}$

$$dF_{ox} = a_x\rho dV = \boldsymbol{\rho.a_x dx.dy.dz} \tag{8}$$

$$dF_{Sx} = dm.\frac{dv_x}{dt} = \boldsymbol{\rho.dx.dy.dz.\frac{dv_x}{dt}} \tag{9}$$

$dF_{ox} + dF_{px} = dF_{sx}$

$-dp_x.dy.dz + \rho.a_x dx.dy.dz = \rho.dx.dy.dz.\frac{dv_x}{dt} \qquad ; dp_x = \frac{\partial p}{\partial x}.dx$

$$a_x - \frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dv_x}{dt}; \qquad a_y - \frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv_y}{dt}; \qquad a_z - \frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dv_z}{dt} \qquad (10-12)$$

- rovnováha sil v proudící dokonalé tekutině:

$$\boldsymbol{a} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\rho}}.\boldsymbol{grad\,p} = \frac{\boldsymbol{\partial v}}{\boldsymbol{\partial t}} \qquad (13)$$

Eulerova rovnice hydrodynamiky:

$$\boldsymbol{a} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\rho}}.\boldsymbol{grad\,p} = \boldsymbol{v}.\boldsymbol{grad\,v} + \frac{\boldsymbol{\partial v}}{\boldsymbol{\partial t}} \qquad (14)$$

Eulerovu rovnici hydrodynamiky lze použít pro výpočet tlaku p a tlakových sil F_p při proudění dokonalé tekutiny, ale prakticky se však při těchto výpočtech neuplatňuje, protože její integrace je obtížnější nebo časově náročnější (konvektivní zrychlení je nelineární člen). Výhodnější je použít hybnostní nebo impulsovou větu. Eulerova rovnice hydrodynamiky slouží k odvození Bernoulliho rovnice.

4.3. Bernoulliho rovnice pro dokonalou kapalinu

- vyjadřuje zákon zachování mechanické energie pro ustálené proudění ideální kapaliny.
- při proudění dokonalé tekutiny působí na její částečky síly, které při posunutí po elementární dráze ds konají elementární práci, sečtením těchto elementárních prací na konečné délce po proudnici, tj. integrací, získáme vztah prací neboli energií proudící tekutiny.
- předpokládá se, že vnější hmotnostní síla na jednotku hmotnosti (vnější zrychlení), které působí na proudící tekutinu je potenciální. Potenciál U:

$$a = grad\,U \left(a_x = \frac{\partial U}{\partial x}, a_y = \frac{\partial U}{\partial y}, a_z = \frac{\partial U}{\partial z}\right) \qquad (15)$$

- potenciál je funkcí polohy: $U = U(x, y, z)$
- dosadíme do Eulerovy rovnice hydrodynamiky a určíme elementární práce skalárním součinem a posunutí ds
- pro libovolný průřez proudové trubice platí: $\frac{v^2}{2} + P - U + \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds = konst. \rightarrow$ platí pro neustálené proudění (konstanta má v každém čase jinou hodnotu)
- pro ustálené proudění $\left(\frac{\partial v}{\partial t} = 0\right)$

Bernoulliho rovnice pro dokonalou tekutinu a ustálené proudění:

$$\frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{P} - \boldsymbol{U} = \boldsymbol{konst.} \tag{16}$$

kde U je potenciál tíhové funkce $dU = -gdy$ a P je tlaková funkce $P = \int \frac{dp}{\rho}$.

Bernoulliho rovnice pro nestlačitelnou kapalinu, pro neustálené proudění:

$$\frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{g.h} = \boldsymbol{konst.} \tag{17}$$

rovnice (17) představuje zákon zachování energie.

Kinetická energie hmotnostní jednotky kapaliny: $\frac{v^2}{2} \rightarrow (E_k = \frac{1}{2}m.v^2 \rightarrow e_k = \frac{E_k}{m} = \frac{v^2}{2})$

Potenciální energie hmotnostní jednotky kapaliny: $g.h \rightarrow (E_p = m.g.h \rightarrow e_p = \frac{E_p}{m} = g.h)$

Tlaková energie hmotnostní jednotky kapaliny: $\frac{p}{\rho} \rightarrow (p = \rho.g.h \rightarrow g.h = \frac{p}{\rho} = e_s)$

Mechanická energie kapaliny = tlaková energie + kinetická energie + potenciální energie

- energie vztažené na jednotku hmotnosti se nazývají měrné energie e: $e = \frac{E}{m}$

- jestliže se rovnice dělí tíhovým zrychlením g:

$$\frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{2g}} + \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\rho g}} + \boldsymbol{h} = \boldsymbol{konst.} \rightarrow \text{v roce 1738 uvedl Bernoulli} \tag{18}$$

každý člen rovnice představuje energii vztaženou na tíhovou jednotku kapaliny $\left(\frac{E}{F_g}\right)$ a formálně má rozměr délky.

1. člen – rychlostní výška

2. člen – tlaková výška

3. člen – potenciální (polohová) výška

- při vynásobení rovnice $\rho.g$ dostaneme:

$$\frac{\boldsymbol{\rho.v^2}}{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{p} + \boldsymbol{\rho.g.h} = \boldsymbol{konst.} \tag{19}$$

fyzikální význam $\frac{E}{F_g}.\rho.g = \frac{E}{V} \rightarrow$ energie objemové jednotky

každý člen rovnice představuje tlak (kinetický, statický, potenciální (polohový))

4.4. Navierova-Stokesova rovnice

- vyjadřuje rovnováhu sil při proudění skutečné tekutiny, kde kromě sil vnějších tlakových F_p a setrvačných F_s spojených s vlastním pohybem částic tekutiny, přistupují u skutečné tekutiny třecí síly F_t, které jsou způsobeny viskozitou tekutiny.

$$F_m + F_p + F_t = F_s \tag{20}$$

- pro matematické vyjádření třecích sil F_t se použije Newtonův viskózní zákon:

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy} \tag{21}$$

kde $\frac{dv}{dy}$ je rychlost deformace.

- při vzájemném pohybu částic vznikají ve skutečné tekutině tečná napětí, která způsobují deformaci částic

$$\boldsymbol{a - \frac{1}{\rho}\, grad\, p + v\Delta v = v.grad\, v + \frac{\partial v}{\partial t}} \tag{22}$$

rovnice (22) je Navierova-Stokesova rovnice pro nestlačitelnou tekutinu, kde člen „$v\Delta v$“ představuje zrychlení potřebné k překonání viskózního tření tekutiny.

$$\boldsymbol{a - \frac{1}{\rho}\, grad\, p + v\Delta v + \frac{v}{3}\, grad\, div\, v = v.grad\, v + \frac{\partial v}{\partial t}} \tag{23}$$

rovnice (23) je Navierova-Stokesova rovnice pro stlačitelnou tekutinu, kde kromě členu „$v\Delta v$“, který představuje zrychlení potřebné k překonání viskózního tření tekutiny, je zahrnut i člen „$\frac{v}{3}\, grad\, div\, v$“, který představuje vliv viskozity u stlačitelných tekutin.

- rozepsání zkrácených zápisů jednotlivých členů rovnice:

$grad\, p = \nabla p = \left(i\frac{\partial p}{\partial x} + j\frac{\partial p}{\partial y} + k\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right)$; kde zápis gradientu ∇p → je bez tečky

$div\, v = \nabla.v = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$; kde zápis divergence $\nabla.v$ → je s tečkou

$v\Delta v = v.\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$; kde Laplaceův operátor je definován jako $\Delta = \nabla.\nabla = \nabla^2$

Slovník pojmů:

Označení	**Jednotka**	**Význam**
E	J	energie
Ek	J	kinetická energie
Ep	J	potenciální energie
F	N = kg . m . s $^{-2}$	síla
Fg	N	tíha
Fm	N	hmotnostní (objemová) síla (= Fo)
Fp	N	tlaková síla – plošná síla
Fs	N	setrvačná síla
Ft	N	tečná síla, třecí síla
Qm	kg . s $^{-1}$	hmotnostní průtok
Qv	m^3 . s $^{-1}$	objemový průtok
S	m^2	plocha
V	m^3	objem
a	m . s $^{-2}$	zrychlení
m	kg	hmotnost
p	Pa = N . m^{-2}	tlak, hydrostatický tlak
t	s	čas
v	m . s $^{-1}$	rychlost
ρ	kg . m $^{-3}$	hustota (měrná hmotnost)
τ	Pa = N . m^{-2}	tečné (smykové) napětí

Použitá literatura:

[1] – NOSKIEVIČ J. a kol.: Mechanika tekutin. Praha: SNTL, 1987.

[2] – JANALÍK J., ŠŤÁVA P.: Mechanika tekutin. Ostrava: VŠB TU, 2002.

[3] – WALKER, Jearl. Halliday & Resnick fundamentals of physics. Tenth edition, extended. Hoboken: Wiley, 2014. ISBN 978-1-118-23061-9.