Mechanika I - Statika

doc. Ing. David Cirkl, Ph.D.
katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti

david.cirkl@tul.cz

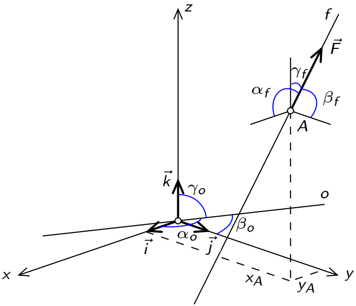
TKMOST

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
www.tul.cz

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Moment síly k ose procházející počátkem

Dáno:
Velikost síly $|\vec{F}| = F$.
Nositelka síly $f(\alpha_t, \beta_t, \gamma_t < 90)$.
Obecná přímka o procházející počátkem souřadnicového systému $o(\alpha_o, \beta_o, \gamma_o < 90)$
Působiště síly $A[x_A, y_A, z_A]$



Moment síly k ose procházející počátkem

Podle známého vztahu o kvadrátech cosinů směrových úhlů dopočítáme úhly γ_f a γ_o:

$$cos^2\alpha_f + cos^2\beta_f + cos^2\gamma_f = 1$$

$$cos\gamma_f = \pm\sqrt{1 - cos^2\alpha_f - cos^2\beta_f}$$

$$\gamma_f = arccos(\pm\sqrt{1 - cos^2\alpha_f - cos^2\beta_f})$$

Vztah v argumentu funkce arccos je cosinem úhlu γ_f. Tento argument může být kladný nebo záporný, výsledkem je potom buď $\gamma_f < 90^\circ$ nebo $\gamma_f > 90^\circ$, jak naznačuje obrázek jednotkové kružnice.

Moment síly k ose procházející počátkem

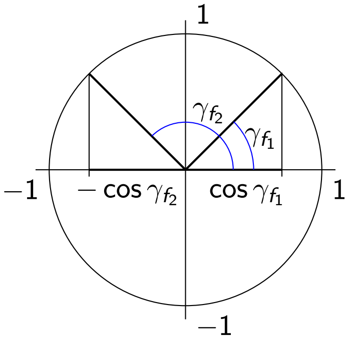
Protože v zadání je uvedena podmínka $\gamma_f < 90^\circ$, je pro nás řešením

$$\gamma_f = \gamma_{f1} < 90^\circ.$$

Obdobně vypočteme úhel osy γ_o

$$\gamma_o = arccos(\pm\sqrt{1 - cos^2\alpha_o - cos^2\beta_o})$$

tak, aby byla splněna podmínka $\gamma_o < 90^\circ$.



Moment síly k ose procházející počátkem

Moment síly $\vec{F}$ k počátku souřadnic je:

$$\vec{M} = \vec{r}_A \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} =$$
$$= \vec{i}(y_A F_z - z_A F_y) - \vec{j}(x_A F_z - F_x z_A) + \vec{k}(x_A F_y - F_x y_A) =$$
$$= M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} = \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z$$

kde složky síly $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ jsou:

$$F_x = F \cos \alpha f$$
$$F_y = F \cos \beta f$$
$$F_z = F \cos \gamma f$$

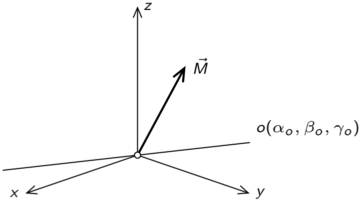
evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Moment síly k ose procházející počátkem

$\vec{M}_x, \vec{M}_y, \vec{M}_z$ jsou jednotlivé složky celkového momentu $\vec{M}$:

$$
\begin{aligned}
M_x &= y_A F_z - z_A F_y \\
M_y &= F_x z_A - x_A F_z \\
M_z &= x_A F_y - F_x y_A,
\end{aligned}
$$

Dostáváme tedy moment k počátku souřadnicového systému.



Moment síly k ose procházející počátkem

Pro výpočet momentu síly k ose $\vec{o}$ užijeme skalárního součinu. Skalární součin je obecně součin velikosti kolmého průmětu jednoho vektoru do směru druhého vektoru s velikostí druhého vektoru.

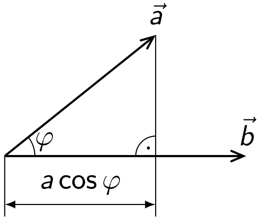
Máme-li dva vektory

$$\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$$

$$\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$$

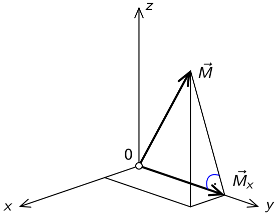
jejich skalárním součinem je:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cos\varphi \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$



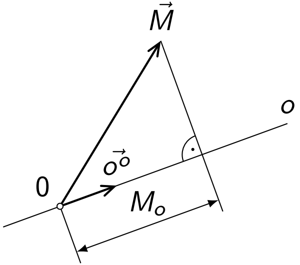
Moment síly k ose procházející počátkem

Již dříve jsme zmínili, že např. složka momentu $\vec{M}$ v ose x je momentem, který působí kolem osy x. Tato složka je kolmým průmětem do osy x. Tedy, stejný přístup použijeme když celkový moment $\vec{M}$ promítneme do směru osy o. Směr osy o udává směrový vektor $\vec{o}^0$, jenž má velikost 1 a neovlivní tak výsledek součinu s momentem $\vec{M}$.



Moment síly k ose procházející počátkem

Vztah $M_o = \vec{M} \cdot \vec{o}^0$ tedy představuje velikost průmětu $\vec{M}$ do směru osy o.



Jednotkový vektor osy $\vec{o}^0$ je dán jako:

$$\vec{o}^0 = \cos\alpha_o \vec{i} + \cos\beta_o \vec{j} + \cos\gamma_o \vec{k}$$

Potom

$$M_o = \vec{M} \cdot \vec{o}^0 = (M_x, M_y, M_z)(\cos\alpha_o, \cos\beta_o, \cos\gamma_o) =$$
$$= M_x \cos\alpha_o + M_y \cos\beta_o + M_z \cos\gamma_o$$

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Moment síly k ose procházející počátkem

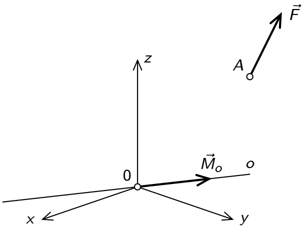
Velikosti M_o dodáme vlastnosti vektoru tak, že ji přenásobíme jednotkovým vektorem $\vec{o}^0$, neboť moment má směr této osy.

$$\vec{M}_o = M_o \cdot \vec{o}^0$$

Platí tedy:

$$\vec{M}_o = (\vec{M} \cdot \vec{o}^0)\vec{o}^0$$

Točivý účinek síly $\vec{F}$ s působištěm v bodě A kolem osy o popisuje moment $\vec{M}_o$.



Moment síly k ose procházející počátkem

Alternativně můžeme celou úlohu vypočítat užitím vztahu:

$$M_o = (\vec{r}_A \times \vec{F}) \cdot \vec{o}^0$$

což je smíšený součin třech vektorů $\vec{r}_A, \vec{F}, \vec{o}^0$, který lze rozepsat jako:

$$M_o = (\vec{r}_A \times \vec{F}) \cdot \vec{o}^0 = \begin{vmatrix} \cos\alpha_o & \cos\beta_o & \cos\gamma_o \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\alpha_o(y_A F_z - z_A F_y) - \cos\beta_o(x_A F_z - F_x z_A) +$$

$$+ \cos\gamma_o(x_A F_y - F_x y_A) = \text{číslo}$$

A závěrem

$$\vec{M}_o = M_o \cdot \vec{o}^0$$

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ