PRAVDĚPODOBNOST – 2. ČÁST

Rozdělení náhodné veličiny:
- pravděpodobnostní model chování náhodné veličiny
- existuje celá řada rozdělení pro diskrétní i spojité náhodné veličiny.

Některá rozdělení diskrétních náhodných veličin

Alternativní rozdělení $\boldsymbol{A(\pi)}$

- NV *X* je počet nastoupení jevu *A* při realizaci náhodného pokusu
- rozdělení nula-jedničkové náhodné veličiny
- *rozdělení má jeden parametr:*
  π … pravděpodobnost nastoupení sledovaného jevu při náhodném pokusu.

Pravděpodobnostní funkce:

$P(x) = \pi^x (1-\pi)^{1-x}$, $x = 0, 1,\ 0 < \pi < 1,$
$= 0$ jinak.

$E(X) = \pi$
$D(X) = \pi(1-\pi)$

Binomické rozdělení $\boldsymbol{Bi(n;\ \pi)}$

- NV *X* je počet výskytů náhodného jevu *A* v *n* nezávislých náhodných pokusech, je-li pravděpodobnost nastoupení jevu *A* ve všech pokusech stejná (π)
- *rozdělení má dva parametry:*
  n … počet nezávislých pokusů
  π … pravděpodobnost nastoupení sledovaného jevu v jednom pokusu.

Pravděpodobnostní funkce:

$P(x) = \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x}$, $x = 0, 1, \dots, n,\ 0 < \pi < 1,$
$= 0$ jinak.

$E(X) = n\pi$
$D(X) = n\pi(1-\pi)$

Např.: NV *X* je počet „šestek“, které padnou při deseti hodech kostkou.

Poissonovo rozdělení $\boldsymbol{Po(\lambda)}$

- NV X je počet výskytů náhodného jevu *A* v určitém časovém intervalu délky *t* (tzn. za jednotku času), v jednotce plochy nebo objemu (v prostorové jednotce)
- *rozdělení má jeden parametr:*
  λ … střední hodnota rozdělení.

Pravděpodobnostní funkce:

$$P(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, \; x = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0,$$
$$= 0 \qquad \text{jinak.}$$

$$E(X) = \lambda$$
$$D(X) = \lambda$$

Např.: NV X je počet poruch stroje za směnu, počet telefonních hovorů za hodinu, počet vad na 1 m^2 koberce.

Aproximace Binomického rozdělení rozdělením Poissonovým:

- podmínky pro aproximaci: počet pokusů musí být dostatečně velký (alespoň $n > 30$) a pravděpodobnost π velmi malá (alespoň $\pi \leq 0,1$)
- při aproximaci udává *P(x)* přibližnou pravděpodobnost, že ve velkém počtu n nezávislých náhodných pokusů se sledovaný jev A vyskytne x-krát, jestliže pravděpodobnost výskytu jevu v jednom pokusu je velni malá.

Např.: NV X je počet vadných výrobků ve velké sérii, je-li pravděpodobnost výroby zmetku velmi malá.

Hypergeometrické rozdělení $\boldsymbol{Hyp(N; M; n)}$

- používá se v případě závislých pokusů, tzn. při výběru bez vracení
- NV X je počet vybraných prvků se sledovanou vlastností při závislých pokusech
- *rozdělení má tři parametry:*
  N … rozsah souboru, z něhož vybíráme
  M … počet prvků v základním souboru, které mají sledovanou vlastnost
  n … počet závislých pokusů (rozsah výběru).

Pravděpodobnostní funkce:

$$P(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, x = max[0,\; M - N + n], \dots, min[M, n],$$
$$= 0 \qquad \text{jinak.}$$

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$$

$$D(X) = n \cdot \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Použití: např. při kontrole jakosti u malého počtu výrobků nebo v případě, kdy kontrola má ráz destrukční zkoušky (výrobek je zničen).

Některá rozdělení spojitých náhodných veličin

Exponenciální rozdělení $\boldsymbol{E(A;\delta)}$

- NV X je doba čekání do nastoupení sledovaného jevu, může-li tento jev nastat v kterémkoli okamžiku
- *rozdělení má jeden parametr:*
  A … počáteční doba, během které sledovaný jev nastat nemůže.

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{1}{\delta} \cdot e^{-(x-A)/\delta},\ x > A, \delta > 0, A \geq 0,$$
$$= 0 \qquad \text{jinak.}$$

Distribuční funkce:

$$F(x) = 1 - e^{-(x-A)/\delta},\ x > A,$$
$$= 0 \qquad x \leq A.$$

$$E(X) = A + \delta$$
$$D(X) = \delta^2$$

Např.: NV X je doba čekání zákazníka na obsluhu v prodejně, doba realizace dvou po sobě jdoucích telefonních hovorů, doba životnosti zařízení, u nichž dochází k poruše z náhodných příčin (nikoli v důsledku opotřebení).

Použití: V teorii spolehlivosti a životnosti, v teorii hromadné obsluhy (tzv. teorii front), v teorii obnovy.

Normální rozdělení $\boldsymbol{N(\mu;\ \sigma^2)}$

- je vhodné všude tam, kde kolísání NV X je způsobeno velkým počtem nepatrných a vzájemně nezávislých vlivů
- klasickým typem veličin, které se řídí tímto rozdělením, jsou *náhodné chyby*
- pomocí $N(\mu;\ \sigma^2)$ lze za jistých podmínek aproximovat řadu jiných rozdělení, a to jak spojitých, tak i nespojitých
- *rozdělení má dva parametry:*
  μ … střední hodnota,
  σ^2… rozptyl.

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty,\ \sigma^2 > 0.$$

Distribuční funkce:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt\,,-\infty<x<\infty,-\infty<\mu<\infty,\sigma>0.$$

$$E(X)=\mu$$
$$D(X)=\sigma^2$$

- hustota pravděpodobnosti $f(x)$ je zvonovitá křivka, symetrická podle $x=\mu$ a její tvar závisí na parametru σ^2
- rozdělení $N(\mu;\ \sigma^2)$ je jednovrcholové, vrchol je v bodě $x=\mu$
- $\mu = modus = medián.$

Normované normální rozdělení $\boldsymbol{N(0;\ 1)}$

- původní NV *X*, která má $\boldsymbol{N(\mu;\ \sigma^2)}$ normujeme, jinak řečeno transformujeme na NV *U*, která má $\boldsymbol{N(0;\ 1)}$

$$U=\frac{x-\mu}{\sigma},\ E(U)=0,\ D(U)=1.$$

Rozdělení některých funkcí náhodných veličin

- mají zvláštní význam pro řešení některých matematicko-statistických úloh
- stejné značení pro náhodné veličiny i jejich hodnoty
- používají se především kvantily těchto rozdělení, jejich hodnoty jsou tabelovány.

Rozdělení $\boldsymbol{\chi^2}$ $\boldsymbol{\chi^2(\nu)}$

- NV χ^2 je součtem ν nezávislých NV *U* s normovaným normálním rozdělením
- *rozdělení má jeden parametr:*
  ν … počet stupňů volnosti
- kvantily jsou tabelovány pro ν = 1, 2, …, 30 a pro vybrané pravděpodobnosti.

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{\nu}U_i^2=U_1^2+U_2^2+\ldots+U_\nu^2$$

Rozdělení Studentovo (t) $\boldsymbol{t(\nu)}$

- NV t je podílem dvou nezávislých NV, a to NV *U* s rozdělením $\boldsymbol{N(0;\ 1)}$ a NV χ^2 s rozdělením $\boldsymbol{\chi^2(\nu)}$
- *rozdělení má jeden parametr:*
  ν … počet stupňů volnosti
- kvantily jsou tabelovány pro ν = 1, 2, …, 30 a pro vybrané pravděpodobnosti
- používá se především pro výběry malého rozsahu (n < 30)
- rozdělení je symetrické podle bodu t = 0, pro kvantily proto platí vztah $t_p=-t_{1-p}$.

$$t = \frac{U}{\sqrt{\frac{\chi^2}{\nu}}}$$

Rozdělení Fisherovo (Snedecorovo) $\boldsymbol{F(\nu_1;\ \nu_2)}$

- NV *F* je podílem dvou nezávislých NV, a to NV χ_1^2 s rozdělením $\chi^2(\nu_1)$ a NV χ_2^2 s rozdělením $\chi^2(\nu_2)$
- *rozdělení má dva parametry:*
  ν_1… počet stupňů volnosti NV χ_1^2 (v čitateli)
  ν_2… počet stupňů volnosti NV χ_2^2 (ve jmenovateli)

$$F = \frac{\frac{\chi_1^2}{\nu_1}}{\frac{\chi_2^2}{\nu_2}}$$