MATEMATICKÁ STATISTIKA – 2. ČÁST

Testování statistických hypotéz

- *hypotéza* je určitý předpoklad (tvrzení) o základním souboru
- jestliže se hypotéza týká neznámého parametru ZS, jde o tzv. parametrické testy
- jestliže se hypotéza týká vlastností ZS, jde o tzv. neparametrické testy
- testování hypotéz je postup, sloužící k ověření předpokladů o ZS (hypotéz) na základě výběrových dat
- testovací postup umožňuje rozhodnout, zda určitou hypotézu zamítneme či ne, a to s malým, předem zvoleným *rizikem* α.

Symbolika a základní pojmy:

H_0 ... nulová (testovaná) hypotéza
H_1 ... alternativní hypotéza

Testové kritérium (t): je to vhodná charakteristika, která má při platnosti H_0 známé pravděpodobnostní rozdělení (dále jen TK).

Kritický obor (W): je tvořen hodnotami TK, které jsou při platnosti H_0 tak extrémní, že pravděpodobnost jejich výskytu je velmi malá.

Obor přijetí (V): je tvořen všemi hodnotami TK mimo kritický obor.

Hladina významnosti (α) = pravděpodobnost chyby 1. druhu: je to pravděpodobnost, že zamítneme H_0, ačkoli platí.

Pravděpodobnost chyby 2. druhu (β): je to pravděpodobnost, že nezamítneme $\boldsymbol{H_0}$, ačkoli neplatí.

Síla testu ($\mathbf{1-\beta}$): je to pravděpodobnost správného zamítnutí $\boldsymbol{H_0}$, tj. schopnost testu zamítnout neplatnou $\boldsymbol{H_0}$.

Standardní testovací postup:

- jedná se o obecný postup
- je nezávislý na konkrétním typu testu
- provádí se v několika krocích.

1. ***Formulace hypotéz $\boldsymbol{H_0}$ a $\boldsymbol{H_1}$.***

2. ***Volba testového kritéria:*** zvolíme vhodnou charakteristiku, jejíž rozdělení při platnosti H_0 známe.

3. ***Vymezení kritického oboru:*** je omezen kvantily rozdělení TK při platnosti H_0 (tzv. kritické hodnoty).

4. ***Výpočet hodnoty TK z výběrových dat.***

5. ***Formulace závěru o výsledku testu:*** existují *pouze dvě možnosti*, jedna z nich tedy musí nastat.

- *TK leží v kritickém oboru (TK ∈ W):* zamítáme $\boldsymbol{H_0}$, tzn. prokázali jsme $\boldsymbol{H_1}$.
- *TK neleží v kritickém oboru (TK ∉ W):* nezamítáme $\boldsymbol{H_0}$, tzn. neprokázali jsme $\boldsymbol{H_1}$.

Některé parametrické testy

- ***Test parametru μ (střední hodnoty) normálního rozdělení***

1. Formulace hypotéz

$H_0 : \mu = \mu_0$

$a)\ H_1 : \mu \neq \mu_0$ *oboustranná alternativní hypotéza*

$b)\ H_1 : \mu > \mu_0$ *pravostranná alternativní hypotéza*

$c)\ H_1 : \mu < \mu_0$ *levostranná alternativní hypotéza*

2. Volba testového kritéria

Rozlišujeme tři případy:

a) známe rozptyl ZS σ^2

$U = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, při platnosti H_0 má rozdělení $N(0;1)$

b) neznáme rozptyl ZS σ^2 a výběr má malý rozsah

$t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$, při platnosti H_0 má rozdělení $t(n-1)$

c) neznáme rozptyl ZS σ^2 a výběr má velký rozsah

$U = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$, při platnosti H_0 má rozdělení $N(0;1)$

3. Stanovení kritického oboru

Pro případy a) a c) a různé typy alternativních hypotéz:

$a)\ W \equiv \left\{ u; u \leq u_{\frac{\alpha}{2}} \ \ a\ u \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$

$b)\ W \equiv \{ u; u \geq u_{1-\alpha} \}$

$c)\ W \equiv \{ u; u \leq u_{\alpha} \}.$

Pro případ b) a různé typy alternativních hypotéz:

$$a)\ W \equiv \left\{ t; t \le t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \ a \ t \ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\}$$

$$b)\ W \equiv \left\{ t; t \ge t_{1-\alpha}(n-1) \right\}$$

$$c)\ W \equiv \left\{ t; t \le t_{\alpha}(n-1) \right\}.$$

❖ ***Test parametru σ^2 (rozptylu) normálního rozdělení***

1. $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

$a)\ H_1 : \sigma^2 \ne \sigma_0^2$

$b)\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

$c)\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$

2. Rozlišujeme dva případy – buď parametr μ ZS známe nebo ne.
V praxi je daleko častější případ, kdy parametr μ neznáme, proto se na něj omezíme.

$\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$, při platnosti H_0 má rozdělení $\chi^2(n-1)$

3. $a)\ W \equiv \left\{ \chi^2; \chi^2 \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \ a \ \chi^2 \ge \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\}$

$b)\ W \equiv \left\{ \chi^2; \chi^2 \ge \chi^2_{1-\alpha}(n-1) \right\}$

$c)\ W \equiv \left\{ \chi^2; \chi^2 \le \chi^2_{\alpha}(n-1) \right\}$

❖ ***Test parametru π (relativní četnosti) alternativního rozdělení***

Je třeba mít k dispozici výběr dostatečně velkého rozsahu; to je zajištěno splněním podmínky $n\pi(1-\pi) > 9$.

1. $H_0 : \pi = \pi_0$

$a)\ H_1 : \pi \ne \pi_0$

$b)\ H_1 : \pi > \pi_0$

$c)\ H_1 : \pi < \pi_0$

2. $U = \dfrac{p - \pi_0}{\sqrt{\dfrac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$, při platnosti H_0 má rozdělení $N(0;1)$

3. $a)\ W \equiv \left\{ u; u \le u_{\frac{\alpha}{2}} \ a \ u \ge u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$

$b)\ W \equiv \left\{ u; u \ge u_{1-\alpha} \right\}$

$c)\ W \equiv \left\{ u; u \le u_{\alpha} \right\}$