EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Komplexní čísla

Definice: Každá uspořádaná dvojce reálných čísel [*a* ; *b*] se nazývá komplexním číslem.

Množina všech komplexních čísel se značí ***C***.

Reálná čísla *a* a *b* jsou části nebo složky komplexního čísla;

- *a* je reálná část;
- *b* se nazývá imaginární část;

Můžeme rozlišit několik druhů čísel, které patří do množiny komplexních čísel:

- *Reálná čísla* – komplexní číslo má v tomto případě pouze reálnou složku *a*, zatímco imaginární složka *b* je nulová, např. [*2* ; *0*], [-*5,3* ; *0*].
- *Ryze imaginární čísla* – v tomto případě má komplexní číslo pouze imaginární složku *b*, zatímco jeho reálná složka je nulová, např. [*0* ; *3,5*], [*0* ; *105*].
- *Imaginární čísla* – ani jedna za složek komplexního čísla není nulová, např. [*5* ; *2*].
- *Imaginární jednotka* – [*0* ; *1*]
- *Reálná jednotka* – [*1* ; *0*]

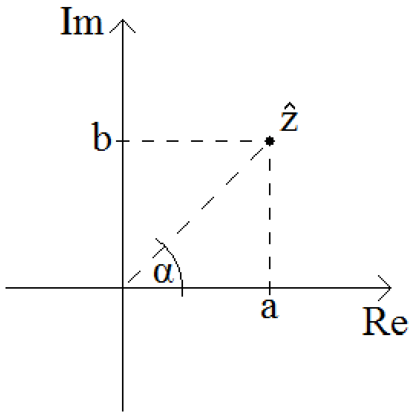
Můžeme tedy napsat, že reálná čísla tvoří podmnožinu čísel komplexních.

Abychom odlišili komplexní číslo od reálného, značíme komplexní proměnné buď jako písmenu se "stříškou", nebo s pruhem: $\hat{z}$, $\bar{z}$

Zobrazení komplexních čísel

Komplexní číslo lze zakreslit jako bod v komplexní rovině, někdy nazývané ***Gaussova rovina***. Na osu *x* (zde nazývanou reálná osa) vynášíme reálnou část komplexního čísla a na osu *y* (nazývanou imaginární osa) vynášíme jeho imaginární část.

Dalším parametrem, který může komplexní číslo popisovat je jeho ***argument α***. Je to úhel, který svírá spojnice počátku Gaussovy roviny a komplexního čísla s reálnou osou.



Imaginární jednotka

Abychom mohli zavést další tvary, je třeba zavést si symbolické odlišení čísel a a b, tedy reálné a imaginární složky komplexního čísla. Proto byla zavedena tzv. ***imaginární jednotka***, kterou značíme ***i*** (v některých případech ***j***). Je definována následovně:

$$i^2 = -1, \text{ nebo } i = \sqrt{-1}$$

Takto definovaná imaginární jednotka nám mimo jiné dovoluje řešit příklady, které byly až do této chvíle neřešitelné – např. kvadratické rovnice se záporným determinantem. To byl také jeden z důvodů zavedení množiny komplexních čísel.

Je potřeba uvést některé další vlastnosti imaginární jednotky, které vyplývají z její definice, ale nemusí být okamžitě patrné:

$$i^1 = i$$

$$i^2 = i\,.\,i = -1$$

$$i^3 = i\,.\,i^2 = i\,.\,(-1) = -i$$

$$i^4 = i^2\,.\,i^2 = (-1)\,.\,(-1) = 1$$

$$i^5 = i\,.\,i^4 = i\,.\,(1) = i$$

$$i^6 = i^2\,.\,i^4 = (-1)\,.\,(1) = -1$$

Kdybychom pokračovali dál, všimli bychom si, že se hodnoty zvyšujících se celočíselných mocnin imaginární jednotky opakují. Mohou totiž nabýt pouze čtyř hodnot (i, -1, -i a 1). Jakoukoliv celočíselnou mocninu imaginární jednotky můžeme vyjádřit následovně:

$$i^{4n} = 1 \qquad\qquad i^{4n+1} = i$$

$i^{4n+2} = -1$ $\qquad\qquad$ $i^{4n+3} = -i$

Tvary komplexního čísla

Zavedení imaginární jednotky nám také dovoluje použít jiné tvary komplexních čísel:

- ***geometrický tvar***: $\hat{z} = [a\,;\,b]$

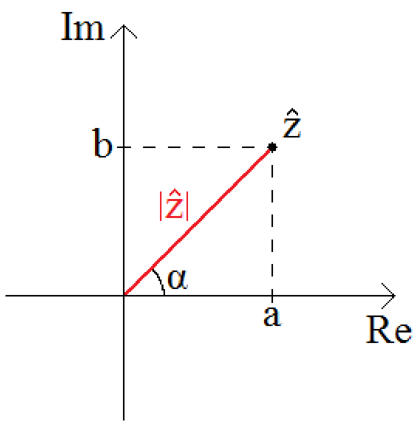
  Je to uspořádaná dvojce reálných čísel, jejíž příklady jsme si uváděli výše.

- ***Algebraický tvar***: $\hat{z} = a + b.i$

  V algebraickém zápisu je dvojce reálných čísel tvořící společně komplexní číslo odlišena právě imaginární jednotkou *i*. Podle ní poznáme, že číslo *a* (bez imaginární jednotky) je reálná část komplexního čísla a číslo *b* (s imaginární jednotkou) je imaginární složkou komplexního čísla.

- ***Goniometrický tvar***: $\hat{z} = |\hat{z}|.(\cos\alpha + i.\sin\alpha)$

  Jak název napovídá, jedná se o zápis komplexního čísla pomocí goniometrických funkcí. V zápisu nám přibyl člen $|\hat{z}|$, což je tzv. ***velikost komplexního čísla*** $\hat{z}$, která představuje vzdálenost komplexního čísla $\hat{z}$ od počátku (od nuly).



Velikost komplexního čísla lze spočíst snadno podle Pythagorovy věty jako:

$$|\hat{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

Reálnou složku z goniometrického zápisu komplexního čísla lze získat trochu obtížněji než v případě algebraického zápisu: $Re\{\hat{z}\} = a = |\hat{z}|.\cos\alpha$.

Stejným způsobem lze získat i imaginární složku: $Im\{\hat{z}\} = b = |\hat{z}|.\sin\alpha$.

Goniometrický tvar komplexního čísla je většinou pouze mezikrokem mezi tvarem algebraickým a exponenciálním.

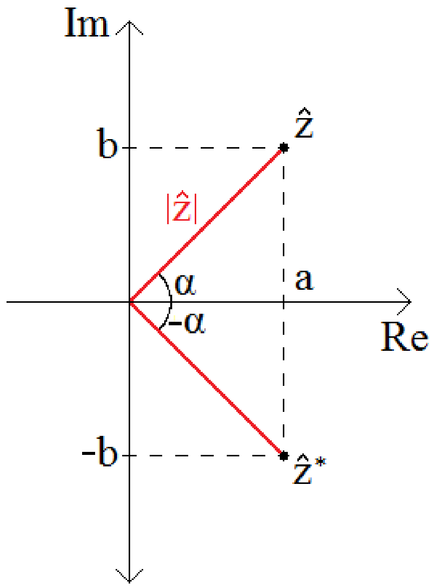
- ***Exponenciální tvar***: $\hat{z} = |\hat{z}|.e^{\,i.\alpha}$

  Exponenciální tvar komplexního čísla je nejjednodušší možností zápisu komplexního čísla pouze pomocí jeho velikosti $|\hat{z}|$ a argumentu α. Písmeno e je konstanta vycházející z přirozeného logaritmu nazývaná Eulerovo číslo.

  Abychom ale určili jeho reálnou a imaginární složku, musíme ho převést do algebraického tvaru. To je snadné právě za pomoci goniometrického tvaru, jelikož všechny veličiny v goniometrickém tvaru – velikost a argument komplexního čísla – nám definuje již tvar exponenciální. Po dosazení do goniometrických funkcí a roznásobení závorky dostaneme přímo algebraický tvar.

Pozn.: Pozor, pokud počítáte např. velikost komplexního čísla, nezapomínejte, že imaginární jednotka i *není součástí imaginární složky komplexního čísla, ale pouze ji označuje. To znamená, že pokud někam máme dosadit imaginární složku* b, *nesmíme dosadit* i.b.

Zde je ještě potřeba dodefinovat termín spojený s komplexními čísli – ***číslo komplexně sdružené***. Máme-li komplexní číslo $\hat{z} = a + b.i$, pak k němu existuje číslo komplexně sdružené $\hat{z}^* = a - b.i$, které se od něj liší pouze znaménkem u jeho imaginární části. Jeho reálná část i jeho velikost jsou shodné s původním komplexním číslem $\hat{z}$.



Z grafického znázornění komplexně sdruženého čísla můžeme také rovnou usoudit, jak by vypadalo v případě exponenciálního tvaru. Vidíme totiž, že kromě obrácení znaménka před imaginární složkou *b*, dojde k obrácení znaménka také před argumentem *α*.

Pokud tedy máme komplexní číslo $\hat{z} = |\hat{z}|.e^{j.\alpha}$, číslo k němu komplexně sdružené můžeme napsat jako $\hat{z}^* = |\hat{z}|.e^{i.(-\alpha)} = |\hat{z}|.e^{-i.\alpha}$.

Rovnice s komplexními čísli

Rovnice s komplexními čísli vypadají většinou úplně stejně, jako rovnice s reálnými proměnnými s jedním důležitým rozdílem – proměnná je komplexní číslo.

Příklad: $3+2\hat{x}=7-i$

Řešení takové rovnice můžeme shrnout do následujících několika kroků:

1) Upravíme rovnici tak, aby na jedné straně byly všechny výrazy s komplexní proměnnou a na druhé straně všechny reálné i imaginární konstanty.

$$2\hat{x}=7-3-i$$

$$2\hat{x}=4-i$$

2) Za komplexní proměnnou dosadíme obecný algebraický tvar komplexního čísla. Tím v rovnici získáme reálné proměnné a a b odpovídající přímo reálné a imaginární složce komplexního čísla $\hat{x}$.

$$\hat{x} = a + b.i$$

$$2(a + b.i) = 4 - i$$

3) Nyní si upravíme levou stranu rovnice tak, abychom jasně rozdělili komplexní a reálnou část stejně, jako tomu je na pravé straně rovnice. V obecném případě to znamená, že odstraníme případné závorky a dáme k sobě členy s imaginární jednotkou a ty bez ní.

$$2a + 2b.i = 4 - i$$

4) Posledním krokem je rozdělení rovnice na dvě menší samostatné rovnice, ve kterých porovnáváme zvlášť reálné složky a zvlášť ty s imaginární jednotkou.

První rovnice: $2b.i = -i$

$$2b = -1$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

Druhá rovnice: $2a = 4$

$$a = 2$$

5) Výsledek rovnice můžeme tedy napsat takto:

$$\hat{x} = a + b.i = \underline{\underline{2 - \frac{i}{2}}}$$

Na závěr je potřeba zmínit se o případu, který nelze označit za samostatný tvar komplexního čísla, ale protože se na první pohled výrazně liší od algebraického tvaru, může práce s ním působit potíže. Jedná se o případ, kdy je komplexní číslo ve jmenovateli zlomku. Zápis pak vypadá následovně:

$$\hat{z} = \frac{X}{a + b.i},$$

kde X může být výraz s reálnými, nebo komplexními proměnnými. Práce s komplexním číslem v takovémto tvaru je samozřejmě komplikovanější, protože ihned nemůžeme určit ani jeho velikost ani reálnou, či imaginární složku. Pravidlem tedy je tento tvar upravit tak, abychom se zbavili komplexního čísla ve jmenovateli. Toho docílíme rozšířením zlomku zlomkem s číslem komplexně sdruženým v čitateli i jmenovateli. Tím nijak nezměníme velikost původního zlomku, protože ho násobíme jedničkou, ale změníme tvar zlomku.

$$\hat{z} = \frac{X}{a+b.i} = \frac{X}{a+b.i}.\frac{a-b.i}{a-b.i} = \frac{X.(a-b.i)}{(a+b.i).(a-b.i)} = \frac{X.(a-b.i)}{a^2-b^2.i^2} = \frac{X.(a-b.i)}{\underline{a^2+b^2}}$$

Jak vidíme, výsledný zlomek má ve jmenovateli pouze členy a a b, což jsou reálná čísla. Jmenovatel je tedy reálný a jediné komplexní číslo nám zůstalo v čitateli, kde s ním můžeme operovat zcela normálně.

Realizováno za finanční podpory ESF a státního rozpočtu ČR v rámci v projektu "*Rozvoj lidských zdrojů TUL pro zvyšování relevance, kvality a přístupu ke vzdělání v podmínkách Průmyslu 4.0*" *CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002329* – ESF OP VVV

Použitá literatura

Pešková E., Mulačová J.: *Matematika - Přehled středoškolského učiva*. ORFEUS, Szalai & Smolan, Praha, 1992.