EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Komplexní čísla - příklady

Příklad 0:

Řešte v C (obor komplexních čísel): $x^2 + 2 = 0$.

Řešení:

Tento jednoduchý výraz bych samozřejmě mohli řešit jako kvadratickou rovnici, ale bylo by to zbytečně složité řešení. Stačí pouze upravit odečtením dvojky:

$$x^2 = -2.$$

Abychom získali hodnotu *x*, musíme odmocnit obě strany rovnice.

$$x = \sqrt{-2}.$$

Pokud bychom řešili rovnici v oboru reálných čísel, neměla by řešení. Oboru komplexních čísel ale odmocnina záporného čísla má řešení. Můžeme si totiž výraz přepsat následovně:

$$x = \sqrt{-2} = \sqrt{(-1).2} = \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{2} =$$

Z definice komplexní jednotky víme, čemu se rovná odmocnina z mínus jedné. Můžeme tedy dokončit řešení.

$$\underline{\underline{x = i.\sqrt{2}}}$$

Příklad 1:

Najděte reálnou část komplexního čísla $\hat{z} = 2 + 4i - 3 + 2.(3 + i)$.

Řešení:

Nejdříve musíme rovnici upravit tak, abychom získali oddělené členy s a bez imaginární jednotky. Člen bez imaginární jednotky tedy bude reálnou složkou.

$$\hat{z} = 2 + 4i - 3 + 2.(3 + i) =$$

$$= -1 + 4i + 2.(3 + i) =$$

$$= -1 + 4i + 6 + 2i =$$

$$= 5 + 6i$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Reálná složka komplexního čísla $\hat{z}$ je tedy: $\underline{\underline{\mathrm{Re}\{\hat{z}\} = 5}}$.

Příklad 2:

Najděte imaginární složku komplexního čísla $\hat{z} = 5.(4-2i)-1+2i.(3-4)$.

Řešení:

Postup bude obdobný jako u minulého příkladu, jen hledáme člen s imaginární jednotkou.

$$\hat{z} = 5.(4-2i)-1+2i.(3-4) =$$

$$= 20-10i-1+2i.(-1) =$$

$$= 20-10i-1-2i =$$

$$= 19-12i$$

Imaginární složka komplexního čísla $\hat{z}$ je tedy: $\underline{\underline{\mathrm{Im}\{\hat{z}\} = -12}}$.

Příklad 3:

Najděte reálnou složku komplexního čísla $\hat{z} = i.(2-i)+3i+2i.(i+1)$.

Řešení:

Zde nesmíme zapomínat, jak se chová imaginární jednotka, když ji násobíme samu sebou.

$$\hat{z} = i.(2-i)+3i+2i.(i+1) =$$

$$= 2i-(-1)+3i+2i.(i+1) =$$

$$= 2i+1+3i+2.(-1)+2i =$$

$$= 7i+1-2 =$$

$$= 7i-1$$

Reálná složka komplexního čísla $\hat{z}$ je tedy: $\underline{\underline{\mathrm{Re}\{\hat{z}\} = -1}}$.

Příklad 4:

Najděte imaginární složku komplexního čísla $\hat{z} = (2-i).(i+3)+3-2(i+1)$.

Řešení:

Řešíme stejně jako v předchozím příkladě.

$$\hat{z} = (2-i).(i+3)+3-2(i+1)=$$

$$= 2i+6-i^2-3i+3-2(i+1)=$$

$$= 2i+6-(-1)-3i+3-2i-2=$$

$$= 6+1-3i+3-2=$$

$$= 8-3i$$

Imaginární složka komplexního čísla $\hat{z}$ je tedy: $\underline{\underline{\mathrm{Im}\{\hat{z}\} = -3}}$.

Příklad 5:

Najděte imaginární složku komplexního čísla $\hat{z} = i.(i.(i.(i.(i.(i.(i.(1+i)))))))$.

Řešení:

Opět řešíme obdobně a stejně jako v minulých příkladech nesmíme zapomínat na chování imaginární jednotky. Můžeme roznásobit závorky buď zevnitř, nebo zvenku. Zde je výrazně jednodušší postupovat zvenku.

$$\hat{z} = i.(i.(i.(i.(i.(i.(i.(1+i)))))))=$$

$$= (-1).(i.(i.(i.(i.(i.(1+i))))))=$$

$$= -i.(i.(i.(i.(i.(1+i)))))=$$

$$= (1).(i.(i.(i.(1+i))))=$$

$$= i.(i.(i.(1+i)))=$$

$$= (-1).(i.(1+i))=$$

$$= -i.(1+i)=$$

$$= (1).(1+i)=$$

$$= 1+i$$

Což lze přepsat takto:

$$= 1+1.i$$

Imaginární složka komplexního čísla $\hat{z}$ je tedy: $\underline{\underline{\mathrm{Im}\{\hat{z}\} = 1}}$.

Příklad 6:

Převeďte na exponenciální tvar komplexní číslo $\hat{z} = 2 + 2i$.

Řešení:

Exponenciální zápis komplexního čísla vypadá následovně:

$$\hat{z} = |\hat{z}|.e^{i.\alpha}$$

Abychom mohli komplexní číslo zapsat v exponenciálním tvaru, musíme tedy získat jeho velikost $|\hat{z}|$ a argument $\boldsymbol{\alpha}$. Začneme velikostí.

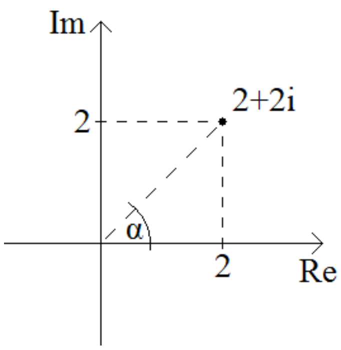
Víme, že reálná složka komplexního čísla $\hat{z}$ je: $\mathrm{Re}\{\hat{z}\} = 2$.

Imaginární složka komplexního čísla $\hat{z}$ je: $\mathrm{Im}\{\hat{z}\} = 2$.

Velikost komplexního čísla $\hat{z}$ spočteme jako:

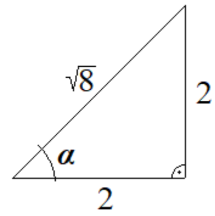
$$|\hat{z}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}.$$

Prvním krokem pro získání argumentu je to, že si komplexní číslo zakreslíme v Gaussově rovině.



Z grafu vidíme, že komplexní číslo leží v prvním kvadrantu Gaussovy roviny, což znamená, že bude někde mezi 0° a 90°. Tento fakt použijeme jako kontrolu.

Abychom teď už získali argument $\boldsymbol{\alpha}$, použijeme jednu z goniometrických funkcí na strany pravoúhlého trojúhelníku.



$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$$

To odpovídá našemu předpokladu, že ***α*** bude mezi 0° a 90°. Nyní již máme všechny údaje a můžeme komplexní číslo $\hat{z}$ zapsat v exponenciálním tvaru:

$$\underline{\underline{\hat{z} = \sqrt{8}.e^{45i}}}$$

Výsledek uvádíme pro jednoduchost ve stupních (úhlových). Alternativně bychom mohli pro vyjádření argumentu použít radiány. Potom by výsledek vypadal následovně:

$$\hat{z} = \sqrt{8}.e^{\frac{\pi}{4}.i}$$

Příklad 7:

Převeďte na exponenciální tvar komplexní číslo $\hat{z} = 4i - 3$.

Řešení:

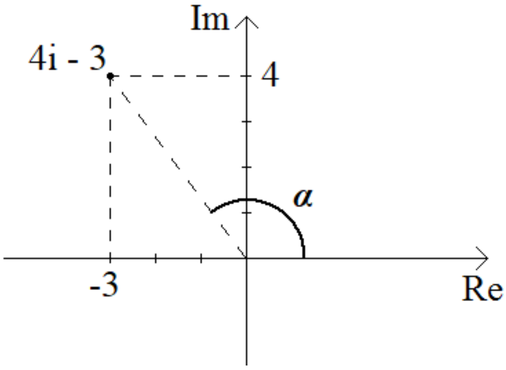
Postupujeme stejně jako v předchozím příkladu. Nejprve si uvědomíme co je reálná a imaginární část komplexního čísla $\hat{z}$, z nich si spočteme jeho velikost, zakreslíme ho na Gaussově rovině a zjistíme, v kterém kvadrantu se číslo nachází, abychom následně mohli spočíst argument.

$$\mathrm{Re}\{\hat{z}\} = -3$$

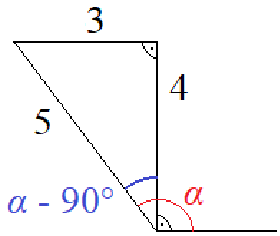
$$\mathrm{Im}\{\hat{z}\} = 4$$

$$|\hat{z}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Při zakreslování komplexního čísla do Gaussovy roviny nesmíme zapomínat, jak je definován argument komplexního čísla.



Vidíme, že komplexní číslo $\hat{z}$ je v druhém kvadrantu, tedy jeho argument $\boldsymbol{\alpha}$ musí být mezi 90° a 180°. Pro jednoduchost si opět překreslíme pravoúhlý trojúhelník, ze kterého určíme úhel $\boldsymbol{\alpha}$.



$$\sin(\alpha - 90) = \frac{3}{5}$$

$$(\alpha - 90) = \arcsin\frac{3}{5}$$

$$\alpha = 90 + \arcsin\frac{3}{5}$$

$$\alpha \cong 37 + 90 = 127°$$

Argument komplexního čísla se tedy rovná přibližně 127°, což potvrzuje jeho polohu v druhém kvadrantu. Nyní již můžeme komplexní číslo $\hat{z}$ zapsat v exponenciálním tvaru.

$$\hat{z} \cong 5.e^{127i}$$

Ale pokud nechceme zaokrouhlovat, musíme ho zapsat s posledními přesnými hodnotami.

$$\underline{\underline{\hat{z} = 5.e^{\left(90+\arcsin\frac{3}{5}\right)i}}}$$

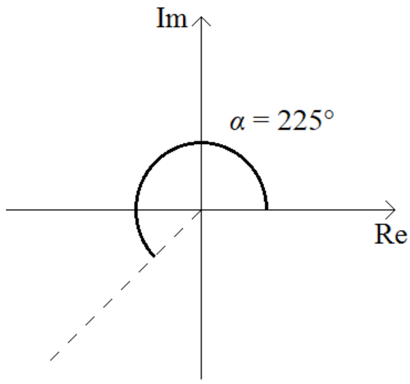
Příklad 8:

Převeďte do algebraického tvaru: $\hat{z} = 2.e^{225.i}$. (*úhel není zadán v radiánech, ale ve stupních*)

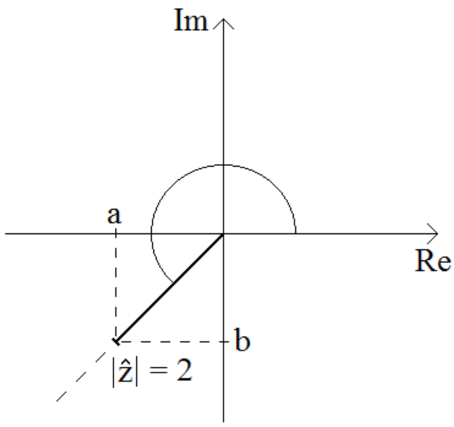
Řešení:

Tentokrát budeme postupovat obráceně. Máme již velikost i argument komplexního čísla $\hat{z}$, co nám chybí, jsou jeho reálná a imaginární složka. Máme dvě základní možnosti, jak postupovat.

Zaprvé můžeme příklad řešit „graficky“, tj. v Gaussově rovině si vynést úhel od reálné osy rovný argumentu komplexního čísla $\hat{z}$.



Protože známe i velikost komplexního čísla $|\hat{z}|$, stačí ji vynést na úhel $\boldsymbol{\alpha}$ a vynést kolmice na okolní osy. V průsečíku s osami leží složky komplexního čísla *a* a *b*.



Druhá možnost jak příklad řešit je výrazně jednodušší. Stačí si totiž vzpomenout na goniometrický zápis komplexního čísla a dosadit do něj velikost a argument:

$$\hat{z} = |\hat{z}|.(\cos\alpha + i.\sin\alpha)$$

$$\hat{z} = 2.(\cos 225° + i.\sin 225°)$$

A teď stačí pouze roznásobit a dopočíst sinus a kosinus:

$$\hat{z} = 2.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2i.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\underline{\underline{\hat{z} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}}}$$

Podle předpokladu (z argumentu $\boldsymbol{\alpha}$) jsou obě složky záporné a shodují se.

Příklad 9:

Převeďte na exponenciální tvar komplexní číslo $\hat{z} = 2i - 4 + 4\sqrt{2}.e^{-i45°}$. (*úhel není zadán v radiánech, ale ve stupních*)

Řešení:

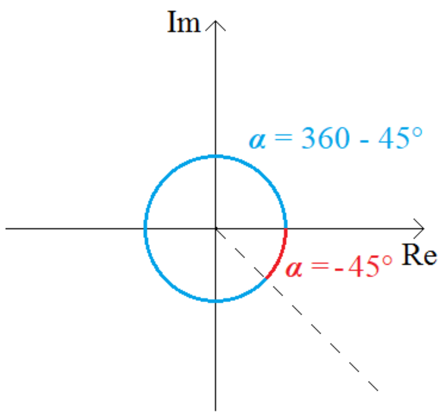
Vidíme, že komplexní číslo $\hat{z}$ je zadané napůl v algebraickém tvaru a napůl v exponenciálním tvaru. Potřebujeme jej tedy převést do jednotného tvaru. Toho nejsnáze dosáhneme tak, že exponenciální část převedeme na algebraický zápis, sečteme obě části a pak teprve převedeme celé číslo $\hat{z}$ do exponenciálního tvaru.

Prvním krokem tedy je rozdělení $\hat{z}$ na dvě části $\hat{z}_1$ a $\hat{z}_2$.

$$\hat{z} = \hat{z}_1 + \hat{z}_2$$

$$\hat{z}_1 = 2i - 4\,,\ \ \hat{z}_2 = 4\sqrt{2}.e^{-i45°}$$

Než začneme s převodem čísla $\hat{z}_2$, nesmíme zapomenout, že v mínus v exponentu patří do argumentu, tedy komplexní číslo $\hat{z}_2$ má záporný argument $\boldsymbol{\alpha}$ = -45°. Pokud si ho zakreslíme do Gaussovi roviny, vidíme, že se jedná o ekvivalentní případ k situaci, kdy by argument byl doplňkem do 360°, tedy $\boldsymbol{\alpha}$ = -45° = 315°:



Nyní převedeme číslo $\hat{z}_2$ na algebraický tvar:

$$\hat{z}_2 = 4\sqrt{2}.e^{-i45^\circ} =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\cos(-45^\circ) + i.\sin(-45^\circ)\right) =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) =$$

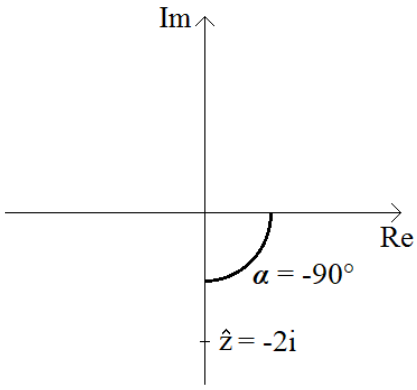
$$= 4\left(\frac{2}{2} - i.\frac{2}{2}\right) =$$

$$= 4 - 4i$$

Teď můžeme spojit číslo $\hat{z}$ zpět dohromady:

$$\hat{z} = \hat{z}_1 + \hat{z}_2 = (2i - 4) + (4 - 4i) = \underline{-2i}$$

A konečně můžeme číslo převést v celku do exponenciálního tvaru. Po zakreslení vidíme vše podstatné pro převod.



Protože má číslo $\hat{z}$ pouze imaginární složku, leží na imaginární ose (osa y) a jeho argument bude buď 90°, nebo -90° (270°). Protože je jeho imaginární složka záporná (-2), leží tedy na záporné části osy, argument bude -90°.

Stejně tak jeho velikost $|\hat{z}|$ lze z nákresu snadno vyčíst, protože se v tomto případě rovná přímo imaginární složce (přesněji její nezáporné velikosti). To můžeme ověřit následovně:

$$|\hat{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Komplexní číslo $\hat{z}$ můžeme již tedy přepsat do exponenciálního tvaru jako:

$$\underline{\underline{\hat{z} = 2.e^{-i90^\circ}}}$$

Ekvivalentním zápisem by bylo i: $\hat{z} = 2.e^{i270°}$

Příklad 10:

Vyřešte: $\sqrt{i} =$

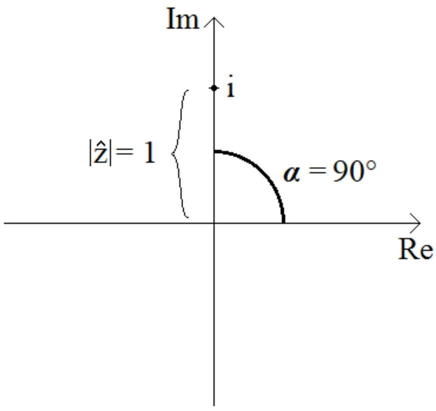
Řešení:

Abychom mohli zadaný výraz upravit, musíme si uvědomit několik základních faktů.

1. Odmocnina je operace inverzní k mocnině, ale lze ji zapsat jako mocninu. V tomto případě druhou odmocninu můžeme nahradit umocněním na jednu polovinu:

$$\sqrt{i} = i^{\frac{1}{2}}$$

2. Tvar komplexního čísla nejvhodnější k práci s mocninami je tvar exponenciální. Převedeme tedy imaginární jednotku na exponenciální tvar:



$$i = |\hat{z}|.e^{i.\alpha} = 1.e^{90i} = e^{90i}$$

Nyní můžeme dosadit exponenciální tvar imaginární jednotky do rovnice v bodě 1, přičemž nesmíme zapomínat na pravidla práce s exponenty.

$$\sqrt{i} = \sqrt{e^{90i}} = \left(e^{90i}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{90i.\frac{1}{2}} = e^{\frac{90i}{2}} = \underline{e^{45i.}}$$

V tuto chvíli můžeme komplexní číslo převést zpět na algebraický tvar:

$$\sqrt{i} = e^{45i} = 1.(\cos 45° + i.\sin 45°) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2} + i.\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Realizováno za finanční podpory ESF a státního rozpočtu ČR v rámci v projektu "*Rozvoj lidských zdrojů TUL pro zvyšování relevance, kvality a přístupu ke vzdělání v podmínkách Průmyslu 4.0*" *CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002329* – ESF OP VVV