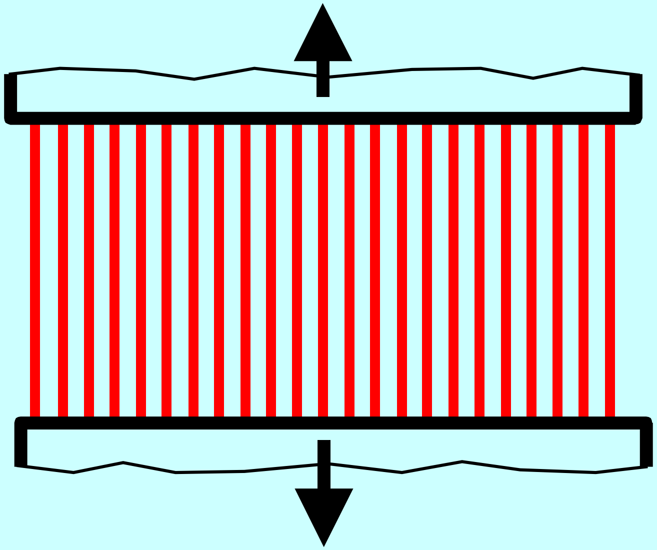
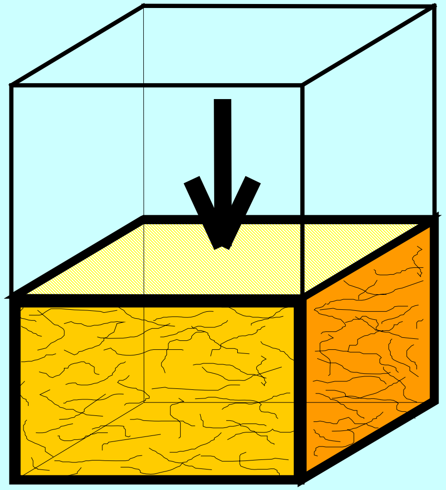
VLÁKNA A VLÁKENNÉ ÚTVARY 3

“MECHANIKA VLÁKENNÝCH ÚTVARŮ“





TAHOVÉ NAMÁHÁNÍ SVAZKU

Obecné *předpoklady:*

- svazek je tvořen velkým počtem vláken,
- všechna vlákna jsou rovná (nezvlněná),
- každé vlákna svazku je sevřeno v obou čelistech (pomyslného) dynamometru („trhačky")
- všechna vlákna jsou navzájem rovnoběžná a rovnoběžná s osou čelistí (pomyslného) dynamometru („trhačky")
- každé vlákno svazku se chová mechanicky nezávisle na ostatních vláknech svazku

Terminologie

Tahová síla ve vlákně, svazku – síla napínající tahem vlákno, svazek

Specifické napětí ve vlákně, svazku – tahová síla vztažená na jednotku jemnosti vlákna, svazku = (fyzikální) napětí ku hustotě vláken; viz 1. předn. ($\sigma = F/t = \sigma^*/\rho$)

Pevnost vlákna, svazku – maximální hodnota tahové síly dosažitelná ve vlákně, svazku

Poměrná pevnost vlákna, svazku - maximální hodnota specifického napětí ve vlákně, svazku

Upínací délka – výchozí délka h každého vlákna a svazku mezi čelistmi (pomyslného) dynamometru („trhačky")

Prodloužení vlákna, svazku – přírůstek délky Δl vlákna, svazku při oddálení čelistí (pomyslného) dynamometru

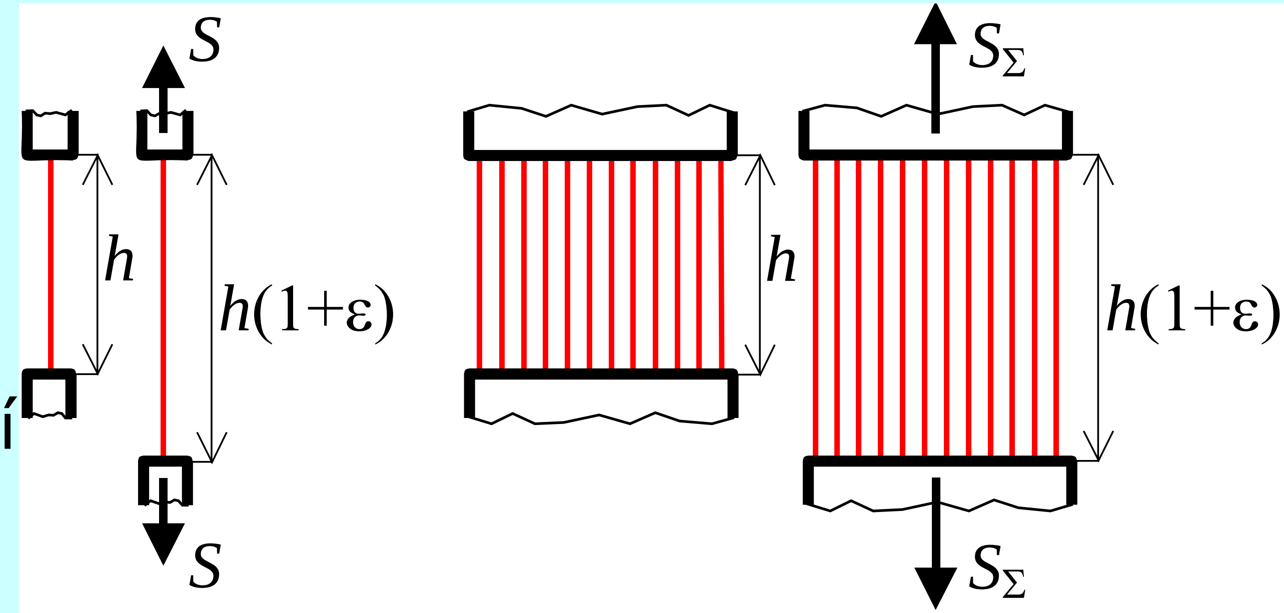
Poměrné prodloužení vlákna, svazku – prodloužení vztažené k výchozí délce vlákna, svazku ($\varepsilon = \Delta l / h$)

Tažnost vlákna, svazku – poměrné prodloužení v okamžiku, kdy je dosažena hodnota pevnosti (poměrné pevnosti) vlákna, svazku

Tahová pracovní křivka – závislost mezi silou (někdy specifickým napětím) a poměrným prodloužením

Společné proměnné: Jedno vlákno Svazek vláken

h…upínací délka
ε…poměrné prodloužení



	Jedno vlákno	Svazek vláken
Počet vláken:	1	n
Tahová síla:	S	S_Σ
Tah.-prac. křivka:	$S = S(\varepsilon)$	$S_\Sigma = S_\Sigma(\varepsilon)$
Pevnost:	P (max. S)	P_Σ (max. S_Σ)
Tažnost:	$a,\ (P = S(a))$	$a_\Sigma,\ (P_\Sigma = S_\Sigma(a_\Sigma))$

Případ 1 (triviální)

Předpoklad: Všechna vlákna ve svazku mají
a) stejnou jemnost vláken... t,
b) stejnou tahovou pracovní křivku $S = S(\varepsilon)$,
c) stejnou pevnost P a stejnou tažnost a.

V tomto případě je

jemnost svazku... $\boxed{T = nt}$, **tažnost svazku**... $\boxed{a_\Sigma = a}$

tahová síla ve svazku... $\boxed{S_\Sigma(\varepsilon) = n\,S(\varepsilon)}$

specifické napětí ve svazku... $\sigma_\Sigma = \overbrace{S_\Sigma(\varepsilon)}^{=nS(\varepsilon)} \Big/ \overbrace{T}^{=nt} = \overbrace{S(\varepsilon)/t}^{=\sigma}$, $\boxed{\sigma_\Sigma = \sigma}$

kde $\boxed{\sigma = S(\varepsilon)/t}$ ...specifické napětí ve vlákně

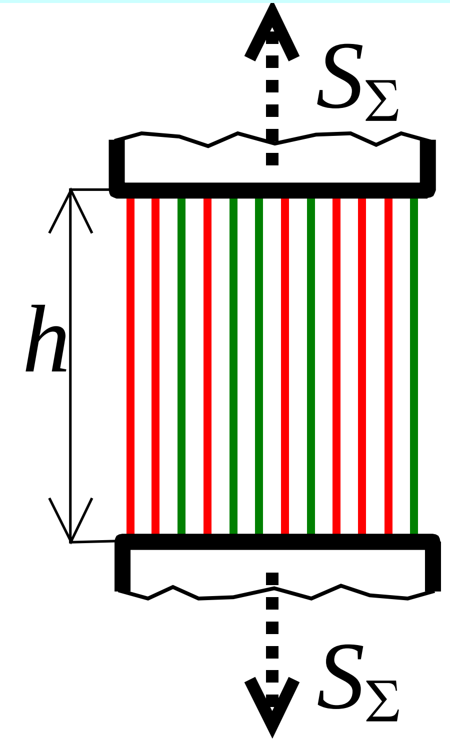
Pevnost svazku... $\overbrace{S_\Sigma\left(\overbrace{\varepsilon}^{=a_\Sigma}\right)}^{=P_\Sigma} = n\overbrace{S\left(\overbrace{\varepsilon}^{a_\Sigma=a}\right)}^{=P}$, $\boxed{P_\Sigma = n\,P}$

Poměrná pevnost svazku… $p_\Sigma = \underbrace{P_\Sigma}_{=nP} \Big/ \underbrace{T}_{=nt} = \underbrace{P/t}_{=p}$, $\boxed{p_\Sigma = p}$

kde $\boxed{p = P/t}$ …**poměrná pevnost vláken**

Případ 2 („lineární teorie mísení" dle W. J. Hamburgera)

Předpoklad: 1. Svazek vláken je <u>směsí dvou vlákenných komponent</u> (| a |).
2. Vlákna jedné komponenty mají
a) <u>stejnou jemnost</u>,
b) <u>stejnou tahovou pracovní křivku</u>,
c) <u>stejnou pevnost</u> a <u>stejnou tažnost</u>.



Konvence:
Komponenta s <u>nižší tažností</u> vláken je značena indexem '1' (|), komponenta s vyšší tažností indexem '2' (|).

Výchozí používané symboly - viz tabulka:

Proměnné:	Komponenta č. 1	Komponenta č. 2
Jemnost vláken	t_1	t_2
Tah. prac. křivka	$S_1(\varepsilon)$	$S_2(\varepsilon)$
Tažnost vláken	$a_1 \leq a_2$	
Pevnost vláken	$P_1 = S_1(a_1)$	$P_2 = S_2(a_2)$
Počet vláken ve svazku	n_1	n_2
Celkový počet vláken	$n = n_1 + n_2$	
Hmotnost vláken	m_1	m_2
Celková hmotnost vláken	$m = m_1 + m_2$	
Jemnost svazku	$T = m/h$	
Hmotnostní podíl	$g_1 = m_1/m$	$g_2 = m_2/m$
Součet hmot. podílů	$g_1 + g_2 = 1$	

Jemnost celého svazku $\boxed{T = m/h}$

Pro vlákna 1. komponenty ve svazku platí

$$m_1 = g_1 m,\quad t_1 = \frac{m_1}{n_1 h},\quad n_1 = \frac{\overbrace{m_1}^{=g_1 m}}{t_1 h} = \frac{g_1}{t_1}\overbrace{\left(\frac{m}{h}\right)}^{=T},\quad \boxed{n_1 = g_1 \frac{T}{t_1}}$$

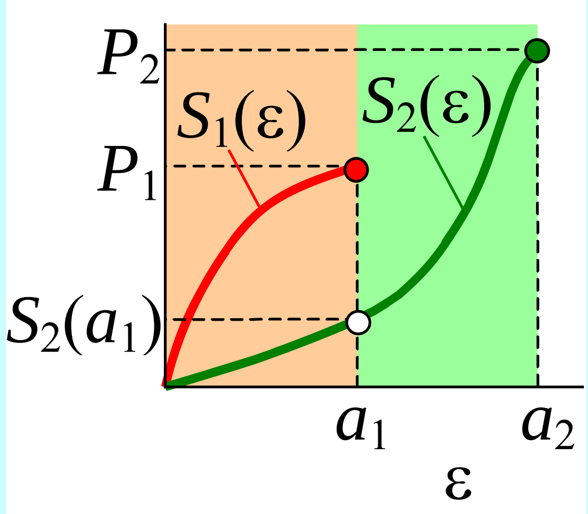
Obdobně pro vlákna 2. komponenty platí $\boxed{n_2 = g_2 \frac{T}{t_2}}$

Tahová pracovní křivky vláken

- 1. komponenty... $S_1(\varepsilon)$
- 2. komponenty... $S_2(\varepsilon)$

$(\quad a_1 \le a_2 \quad)$

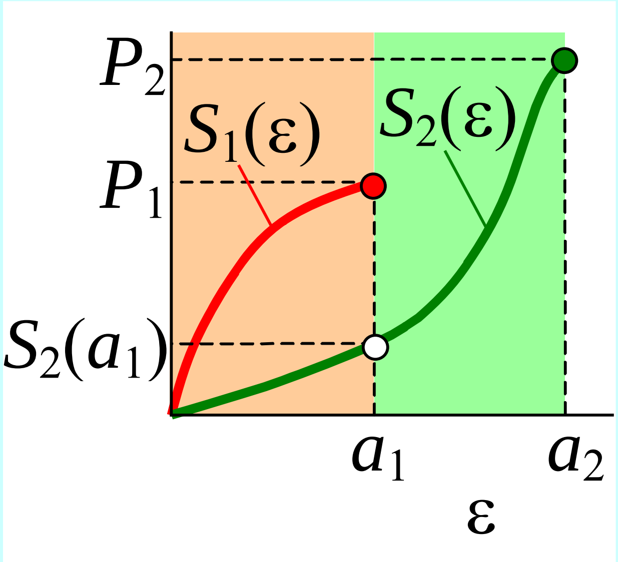
Síla ve vlákně 2. komponenty při poměrném prodloužení odpovídajícím tažnosti 1. komponenty $(\varepsilon = a_1)$... $S_2(a_1)$



Tahová síla v celém svazku... $S_\Sigma(\varepsilon)$

Maximální síla ve svazku

a) V intervalu $\varepsilon \le a_1$ $\Rightarrow$ max. při $\varepsilon = a_1$:



$$S_\Sigma(a_1) = \underbrace{n_1}_{=g_1 T/t_1} P_1 + \underbrace{n_2}_{=g_2 T/t_2} S_2(a_1)$$

$$\boxed{S_\Sigma(a_1) = T\left[g_1 \frac{P_1}{t_1} + g_2 \frac{S_2(a_1)}{t_2}\right]}$$

b) V intervalu $\varepsilon \in (a_1, a_2\rangle$ (vlákna 1. komponenty *praskla!*)

$\Rightarrow$ max. při $\varepsilon = a_2$: $S_\Sigma(a_2) = n_1 \cdot 0 + \underbrace{n_2}_{=g_2 T/t_2} P_2$, $\boxed{S_\Sigma(a_2) = T g_2 \frac{P_2}{t_2}}$

c) Při poměrném prodloužení $\varepsilon > a_2$
(všechna vlákna praskla!)

$$\boxed{S_\Sigma(\varepsilon > a_2) = 0}$$

Pevnost svazku… P_Σ - je větší z hodnot $S_\Sigma(a_1), S_\Sigma(a_2)$

$$P_\Sigma = \max\left\{\overbrace{S_\Sigma(a_1)}^{=T\left[g_1 P_1/t_1 + g_2 S_2(a_1)/t_2\right]}, \overbrace{S_\Sigma(a_2)}^{=T\,g_2 P_2/t_2}\right\},$$

$$\boxed{P_\Sigma = T\max\left\{\left[g_1\frac{P_1}{t_1} + g_2\frac{S_2(a_1)}{t_2}\right], \left[g_2\frac{P_2}{t_2}\right]\right\}}$$

<u>Poměrná pevnost vláken 1. komponenty</u>… $p_1 = P_1/t_1$
<u>Poměrná pevnost vláken 2. komponenty</u>… $p_2 = P_2/t_2$
<u>Specifické napětí ve vláknech 2. komponenty</u> při jejich poměrném prodloužení $\varepsilon = a_1$… $\sigma_2(a_1) = S_2(a_1)/t_2$

Poměrná pevnost svazku… $p_\Sigma = P_\Sigma/T$

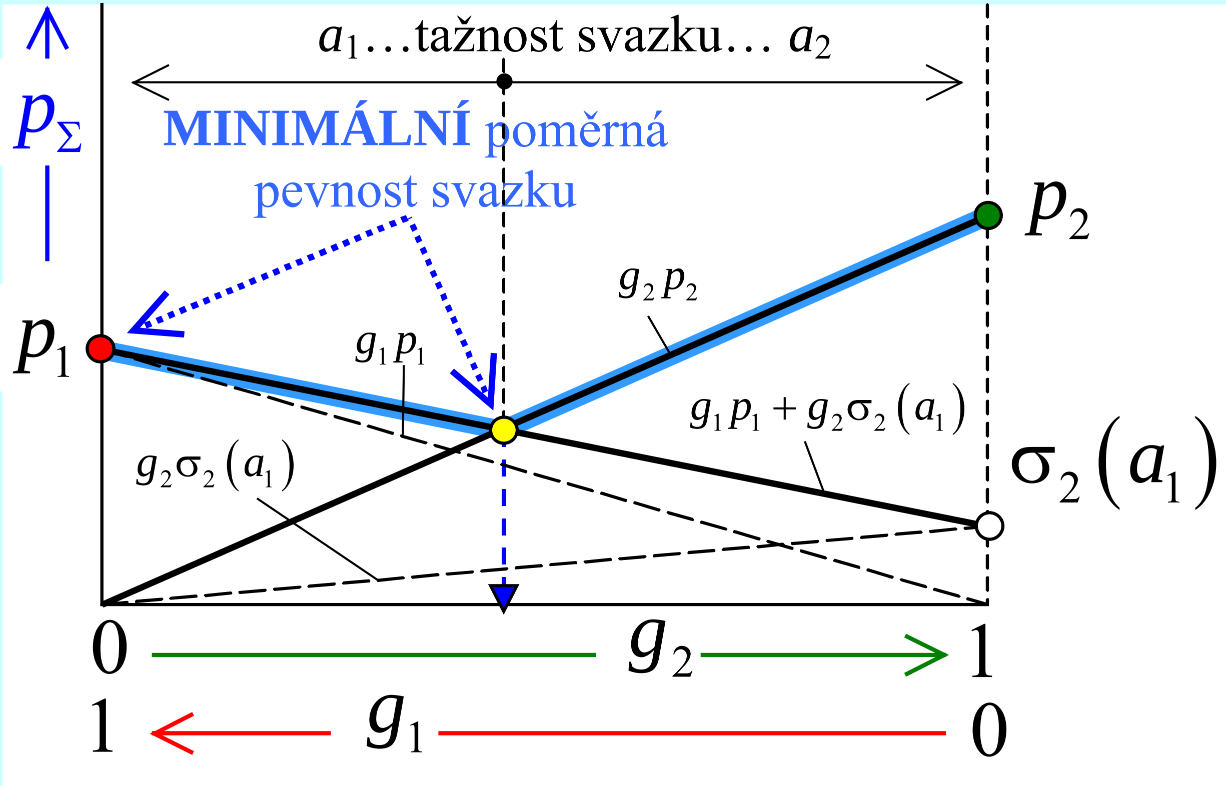
$$\overbrace{\left(\frac{P_\Sigma}{T}\right)}^{=p_\Sigma} = \max\left\{\left[g_1\overbrace{\left(\frac{P_1}{t_1}\right)}^{=p_1} + g_2\overbrace{\left(\frac{S_2(a_1)}{t_2}\right)}^{=\sigma_2(a_1)}\right], \left[g_2\overbrace{\left(\frac{P_2}{t_2}\right)}^{=p_2}\right]\right\},$$

$$\boxed{p_\Sigma = \max\left\{g_1 p_1 + g_2\sigma_2(a_1),\ g_2 p_2\right\}}$$

Tažnost svazku… a_Σ

a) $\boxed{a_\Sigma = a_1}$ je-li poměrná pevnost svazku $g_1 p_1 + g_2 \sigma_2(a_1)$

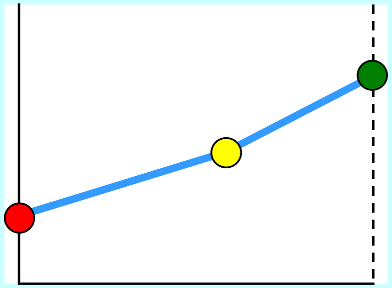
b) $\boxed{a_\Sigma = a_2}$ je-li poměrná pevnost svazku $g_2 p_2$



Grafické ře-šení rovnice

$$p_\Sigma = \max\{g_1 p_1 + g_2 \sigma_2(a_1), g_2 p_2\}$$

Alternativní konfigurace

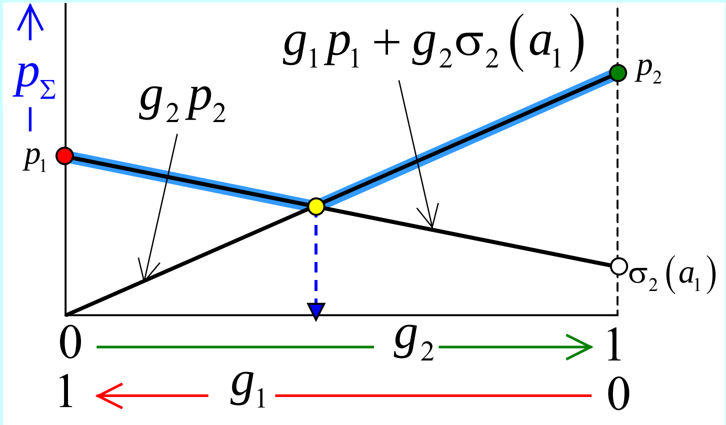


Minimální poměrná pevnost svazku

Z grafické interpretace je zřejmé, že poměrná pevnost svazku je minimální

a) buď při $g_1 = 1, (g_2 = 0)$ - (●) - pak $\boxed{p_\Sigma = p_1}$

b) nebo v průsečíku (○), kde jsou odpovídající hmotnostní podíly v místě ▼ ; pro tyto podíly g_2 a $g_1 = 1 - g_2$ platí rovnice průsečíku přímek



$$\overbrace{g_1}^{=1-g_2} p_1 + g_2\sigma_2(a_1) = g_2 p_2,$$

$$p_1 - g_2 p_1 + g_2\sigma_2(a_1) = g_2 p_2,$$

$$p_1 = g_2 p_1 + g_2 p_2 - g_2\sigma_2(a_1),$$

$$p_1 = g_2\left[p_1 + p_2 - \sigma_2(a_1)\right],$$

$$\boxed{\overset{\blacktriangledown}{g_2} = \frac{p_1}{p_1 + p_2 - \sigma_2(a_1)},\ \overset{\blacktriangledown}{g_1} = 1 - \overset{\blacktriangledown}{g_2}}$$

Odpovídající poměrná pevnost je v tomto případě

$$p_\Sigma = \max\left\{ \overbrace{g_1 p_1 + g_2\sigma_2(a_1)}^{\text{první přímka =}},\quad \overbrace{g_2 p_2}^{\text{= druhá přímka}} \right\},\quad \boxed{p_\Sigma = g_1 p_1 + g_2\sigma_2(a_1) = g_2 p_2,}$$

<u>Minimální poměrná pevnost svazku</u> je menší z obou hodnot, vypočtených dle bodu a) a b) a vzniká při vypočtených hodnotách hmotnostních podílů.

Resumé:

Přidáním pevnějšího vlákenného materiálu k materiálu méně pevnému může vzniknout svazek, který je **ještě méně pevný**!

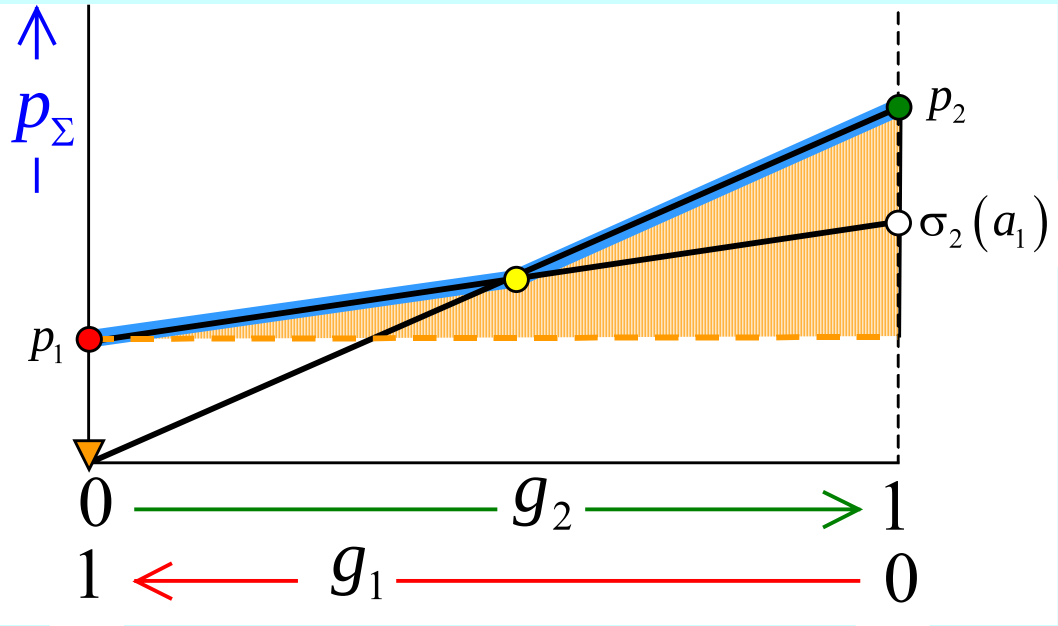
ZVÝŠENÍ PEVNOSTI SVAZKU PŘIDÁNÍM PEVNĚJŠÍCH VLÁKEN

A) Pevnější vlákna mají

- větší tažnost $\Rightarrow$ pevnější vlákna tvoří komponentu č. 2
- jejich specifické napětí $\sigma_2(a_1)$ je větší než poměrná pevnost vláken p_1

$$\sigma_2(a_1) > p_1$$

V tomto případě **pevnost svazku roste s rostoucím hmotnostním podílem g_2 pevnějších vláken v celém jeho rozahu**

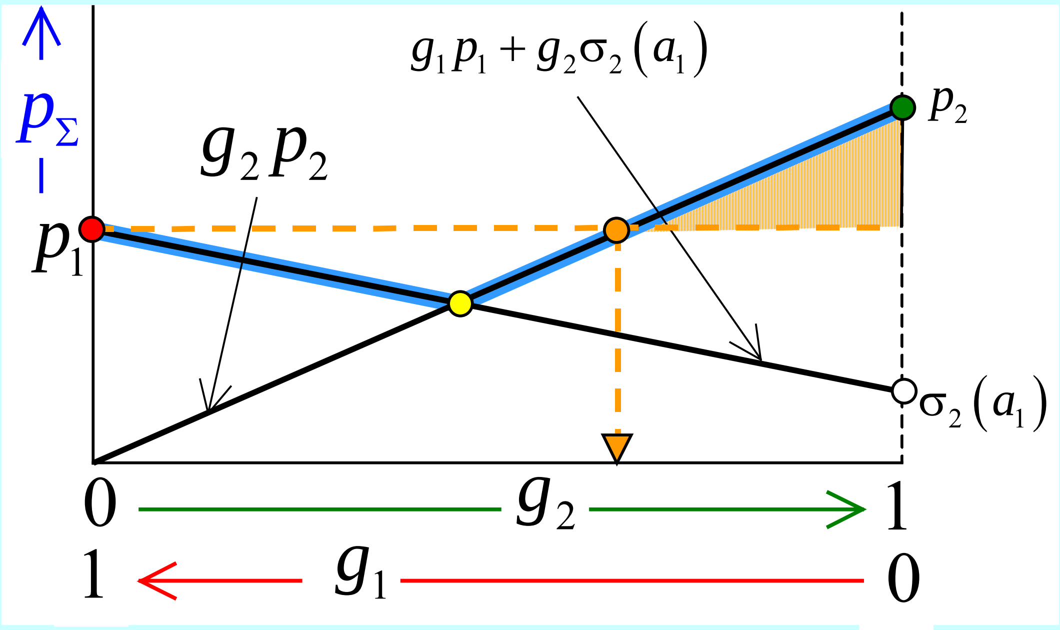


B) Pevnější vlákna mají

- větší tažnost $\Rightarrow$ pevnější vlákna tvoří komponentu č. 2
- jejich specifické napětí $\sigma_2(a_1)$ je menší než poměrná pevnost vláken p_1; $\sigma_2(a_1) < p_1$

Hraniční hodnota hmotnostního podílu pevnějších vláken: $p_1 = g_2 p_2$,

$$g_2 = p_1 / p_2$$



Pevnost svazku roste s hmotnostním podílem

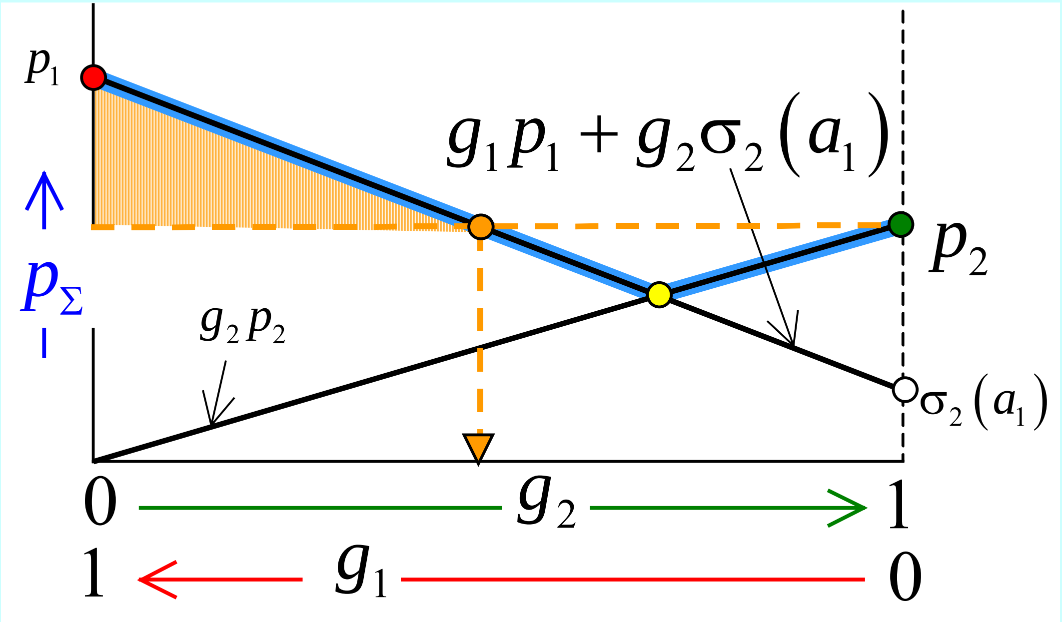
$$g_2 > p_1 / p_2$$

C) Pevnější vlákna mají

- menší tažnost $\Rightarrow$ pevnější vlákna tvoří komponentu č. 1. (Protože vždy $\sigma_2(a_1) < p_2$ a nyní $p_2 < p_1$, platí v stále $\sigma_2(a_1) < p_1$.)

Hraniční hodnota hmotnostního podílu pevnějších vláken:

$$p_2 = g_1 p_1 + \underbrace{g_2}_{=1-g_1} \sigma_2(a_1) =$$
$$= g_1 p_1 + \sigma_2(a_1) - g_1 \sigma_2(a_1)$$
$$p_2 - \sigma_2(a_1) = g_1 p_1 - g_1 \sigma_2(a_1)$$



$$\boxed{g_1 = \frac{p_2 - \sigma_2(a_1)}{p_1 - \sigma_2(a_1)}}$$

Pevnost svazku roste s hmotnostním podílem $\boxed{g_1 > [p_2 - \sigma_2(a_1)]/[p_1 - \sigma_2(a_1)]}$

EMPIRICKÉ POUŽITÍ VÝSLEDKŮ PRO PŘÍZE

Místo parametrů vláken se užijí obdobné <u>parametry jedenokomponentních a směsových přízí</u>

Veličina	*místo VLÁKEN a SVAZKU*	*užijeme hodnoty PŘÍZÍ*
p_1	Poměrná pevnost vlákna s nižší tažností	Poměrná pevnost jednokomponentní příze s nižší tažností
p_2	Poměrná pevnost vlákna s vyšší tažností	Poměrná pevnost jednokomponentní příze s vyšší tažností
a_1	Tažnost vlákna komponenty s nižší tažností	Tažnost jednokomponentní příze s nižší tažností
a_2	Tažnost vlákna komponenty s vyšší tažností	Tažnost jednokomponentní příze s vyšší tažností
$\sigma_2(a_1)$	Specifické napětí ve vlákně s vyšší tažností při poměrném prodloužení $\varepsilon = a_1$	Specifické napětí v jednokomponentní přízi s vyšší tažností při poměrném prodloužení $\varepsilon = a_1$
g_1, g_2	Hmotnostní podíly vláken s nižší a vyšší tažností ve svazku	Hmotnostní podíly vláken jedno komponentních přízí s nižší a vyšší tažností ve směsové přízi
p_Σ	Poměrná pevnost svazku ze dvou komponent	Poměrná pevnost směsové příze ze dvou komponent
a_Σ	Tažnost svazku ze dvou komponent	Tažnost směsové příze ze dvou komponent

Případ 3 (pouze komentáře řešení)

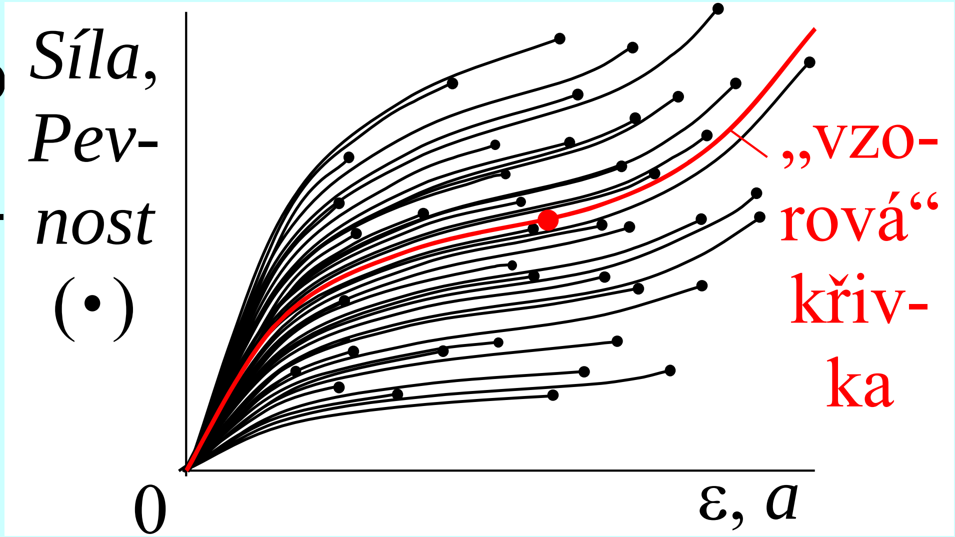
Předpoklady (jen intuitivně): Vlákna ve svazku mají

a) stejnou jemnost vláken,

b) „tvarově podobnou" tahovou pracovní křivku, takovou, že křivka každého vlákna je násobkem nějaké „vzorové" („průměrné") tahové pracovní křivky,

c) **různou pevnost a tažnost**, avšak takovou, že body pevnost-tažnost (•) leží „rovnoměrně" po obou stranách „vzorové" tahové pracovní křivky

d) Vlákna jsou rovná, rovnoběžná a vzájemně se neovlivňují



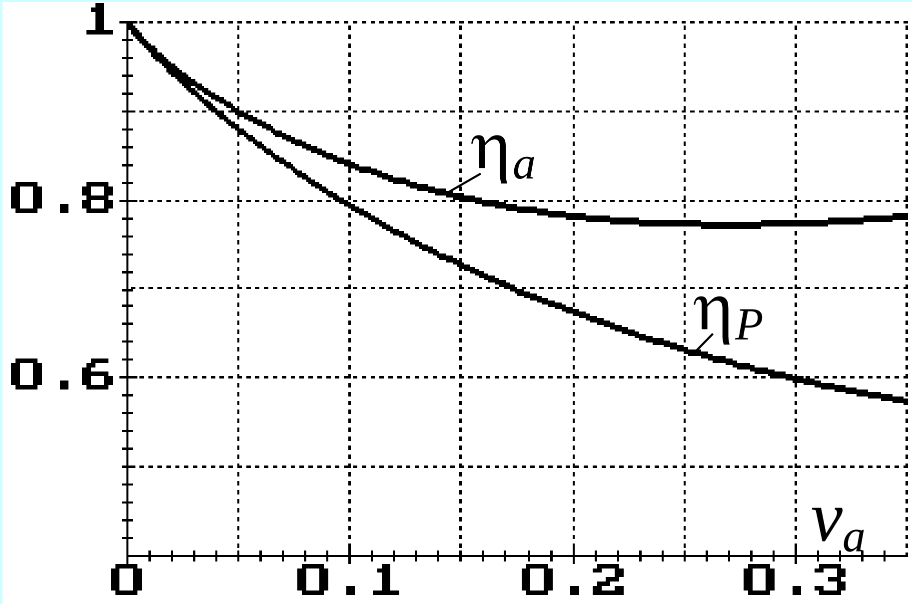
Užitím dalších zjednodušujících předpokladů a teorie pravděpodobnosti se řeší **využití pevnosti**

$$\eta_P = \frac{\text{poměrná pevnost svazku}}{\text{střední poměrná pevnost vláken}}$$

a **využití tažnosti**

$$\eta_a = \frac{\text{tažnost svazku}}{\text{střední tažnost vláken}}$$

Grafický výsledek řešení:



Resumé:

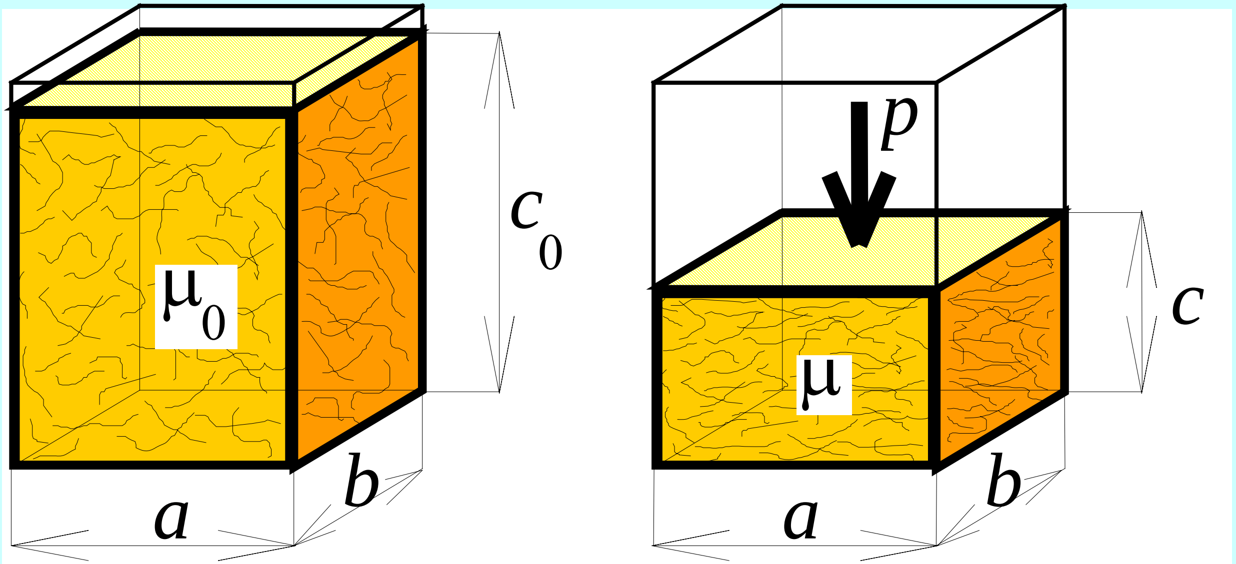
Obojí využití závisí jen na variačním koeficientu tažnosti vláken v_a !

STLAČOVÁNÍ VLÁKENNÉHO MATERIÁLU

(pouze komentáře řešení)

Nejjednodušší případ: Jednoosá deformace

Předpoklady:
Vlákna rovná, válcová, stejně dlouhá, náhodně orientovaná

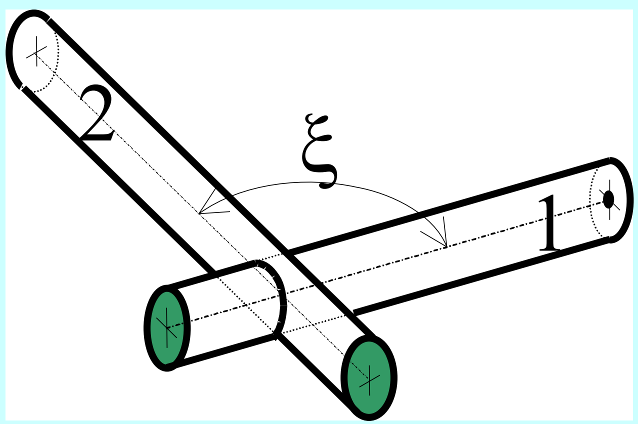


První teoretický model – **C.M. van Wyk** (1946 – stlačování vlny)

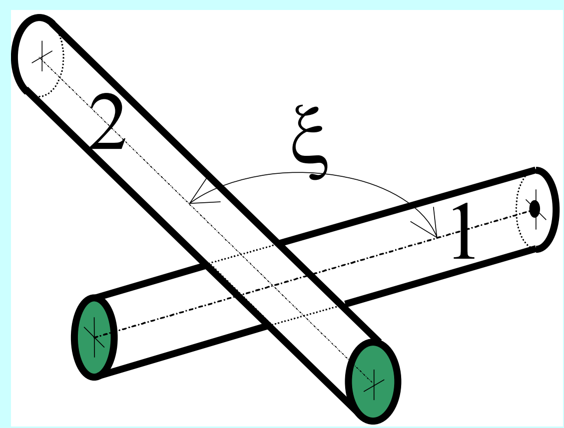
Každá teorie stlačování vlákenného materiálu musí řešit

1. Kontakty mezi vlákny – jen přes ně se přenáší síla z vlákna na vlákno.
2. Deformování vláken – čímž vzniká reakce na vnější působení.

Idea pro kontakty (van Wyk)*:* Tam, kde by dva nehmotné válce skončili (náhodou uspořádání) v průniku – ad a) – dvě hmotná vlákna skončí v kontaktu – ad b).



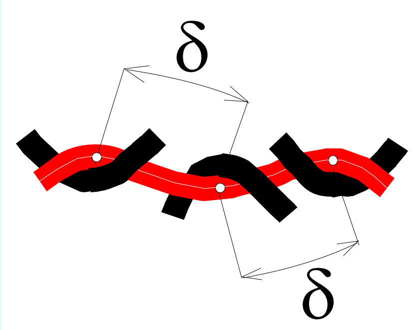
a)



b)

Výsledkem řešení (teorie pravděpodobnosti) je **hustota kontaktů** (poč. kontaktů v jednotce objemu)… ν

$\boxed{\nu = k_\nu \mu^2}$ … řádově 10^4 až 10^5 mm^{-3}

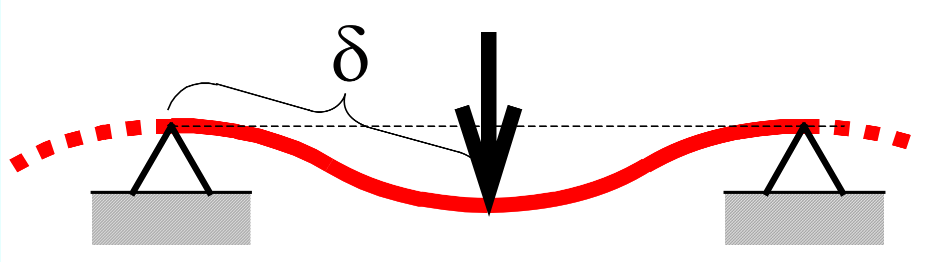


a (střední) **vzdálenost sousedních kontaktů**… $\boxed{\delta = k_\delta / \mu}$

k_ν, k_δ …parametry vlákenného materiálu

Idea deformování vláken (van Wyk)*:* Při stlačování vlákenného materiálu vzniká (především) ohybová deformace vláken; ohyb vláken je možné řešit s využitím teorie ohybu nosníků.

(*Zjednodušení* – malé deformace, Hookeův zákon)

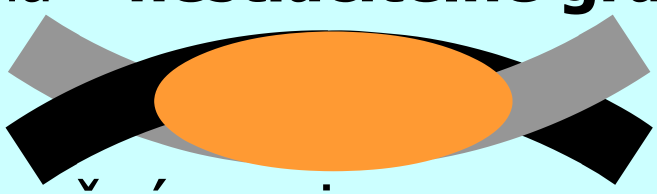


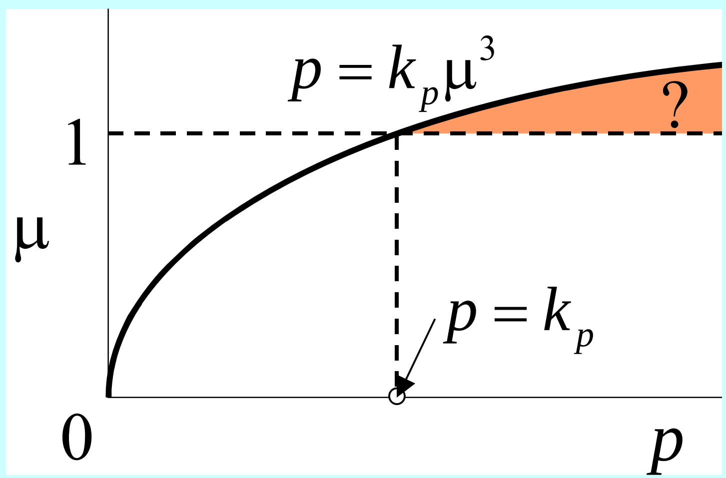
Výsledný vztah C.M. van Wyka pro **závislost mezi tlakem** p **a zaplněním** μ je $\boxed{p = k_p \mu^3}$, k_p... parametr

Pozn.: Rovnice dobře vyhovuje pro malé hodnoty zaplnění (např. pro stlačování balíků vláken – asi $\mu < 0,3$)

Problém van Wykovy teorie pro větší zaplnění ($\mu > 1$?!)

Příčina – **nestlačitelné granule**



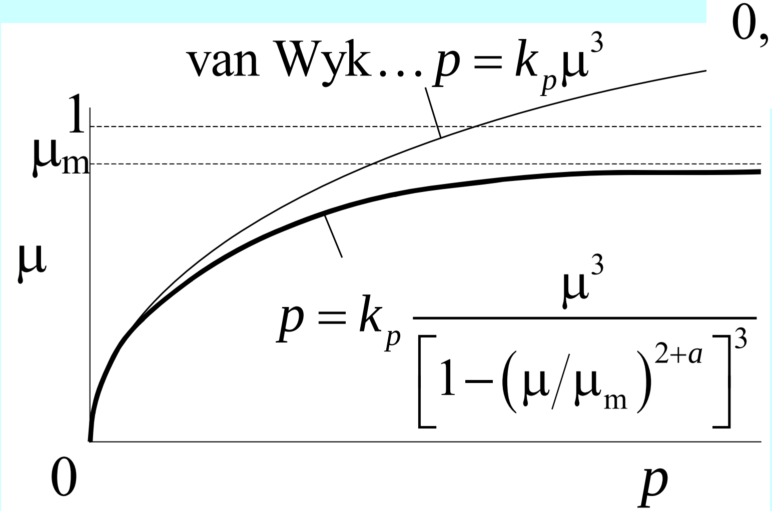


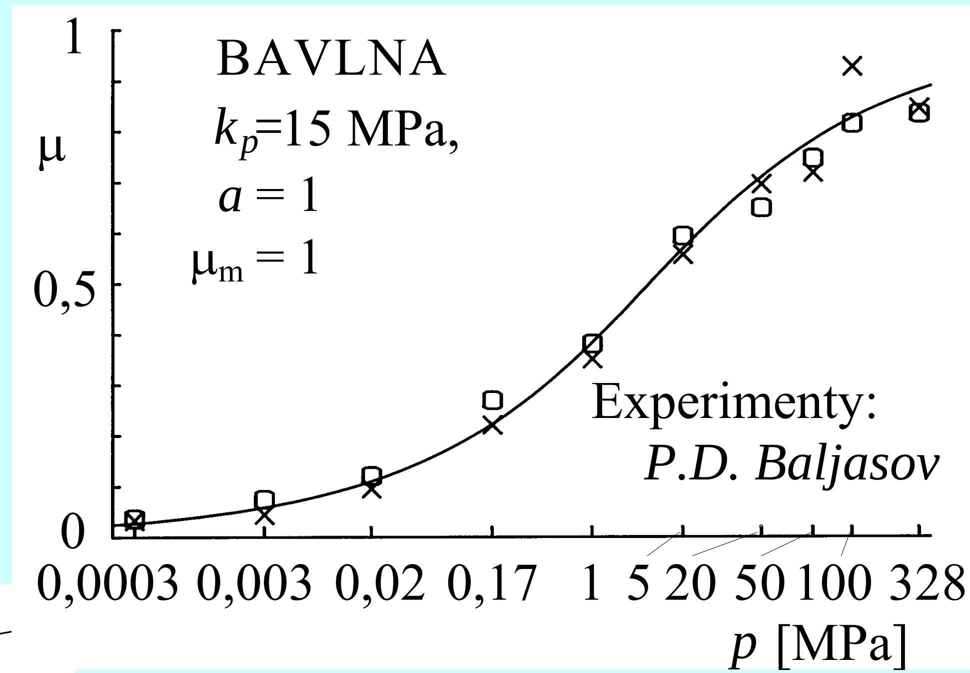
Zobecněná rovnice:

$$p = k_p \frac{\mu^3}{\left[1 - \left(\mu/\mu_m\right)^{2+a}\right]^3}$$

μ_m...mezní zaplnění ($\mu_m \to 1$), k_p, a... parametry ($a \doteq 1$)

Porovnání původní rovnice van Wyka a průběh zobecněné rovnice ilustruje graf:





Příklad: **Porovnání teoretické rovnice s experimenty** (v semi-logaritmickém grafu)