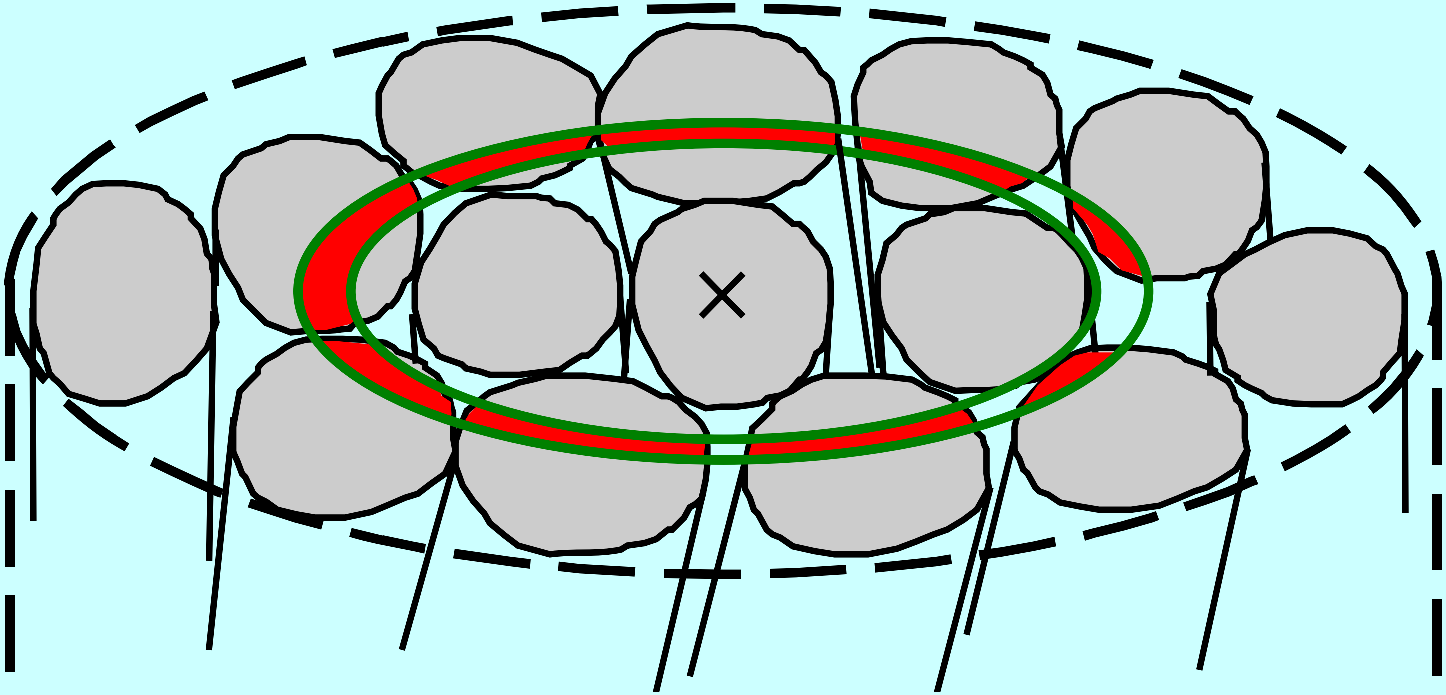
PŘÍZE A HEDVÁBÍ 2

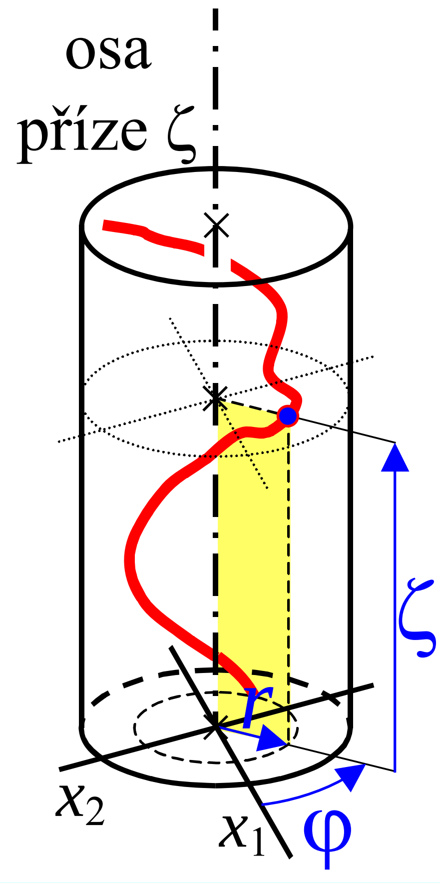
„ŠROUBOVICOVÝ MODEL“



Obecný popis geometrie vlákna

Obecná křivka vlákna má obvykle
- komplikovaný tvar (\)
- individuálně náhodný charakter
- společný deterministický trend

Bod na vlákně se obecně s výhodou popisuje válcovými souřadnicemi r, φ, ζ



Složitou geometrii reálných vláken musíme pro formulaci teoretického modelu zjednodušit $\Rightarrow$ *Základní myšlenka:* Zanedbat individuálně komplikovaný a náhodný charakter, respektovat **deterministický trend**.

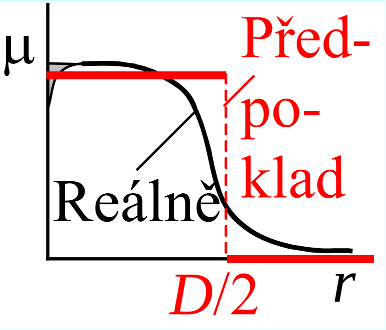
ŠROUBOVICOVÝ MODEL - předpoklady

Obecný šroubovicový model splňuje následují *předpoklady:*

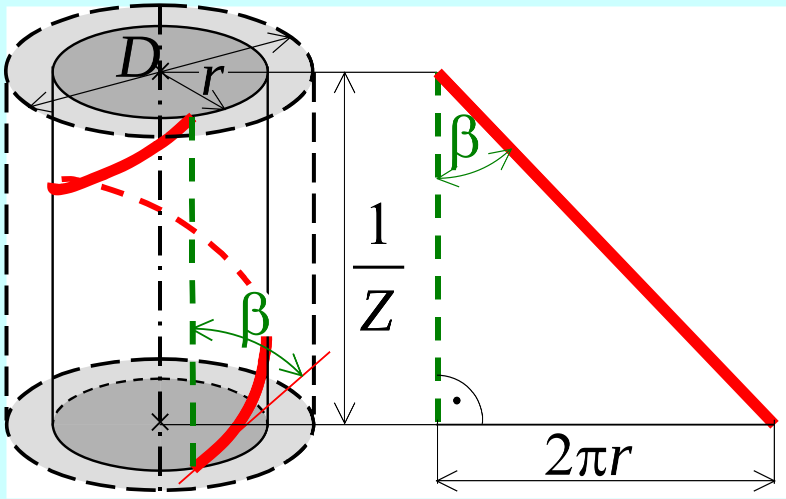
1. Osy všech vláken mají tvar šroubovice se stejným směrem otáčení.
2. Šroubovice všech vláken mají jednu společnou osu, kterou je osa příze.
3. Výška jednoho ovinu každé šroubovice je stejná.

Ideální šroubovicový model splňuje ještě další *předpoklad:*

4. Ve všech místech příze je stejné zaplnění.



Vlákno uvnitř znázorněné příze (zakrouceného hedvábí):



Délka příze – výška jednoho ovinu… $1/Z$

Poloměr šroubovice vlákna…r

Úhel sklonu vlákna (úhel, který svírá tečna k vláknu se směrem osy příze)…β

Rozvinutím pláště válce o poloměru r vznikne trojúhelník, ze kterého nalezneme $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{2\pi r}{1/Z}$, $\boxed{\operatorname{tg}\beta = 2\pi r Z}$

Pozn.: Je-li speciálně $r = D/2$ je $\beta = \beta_D$ a platí

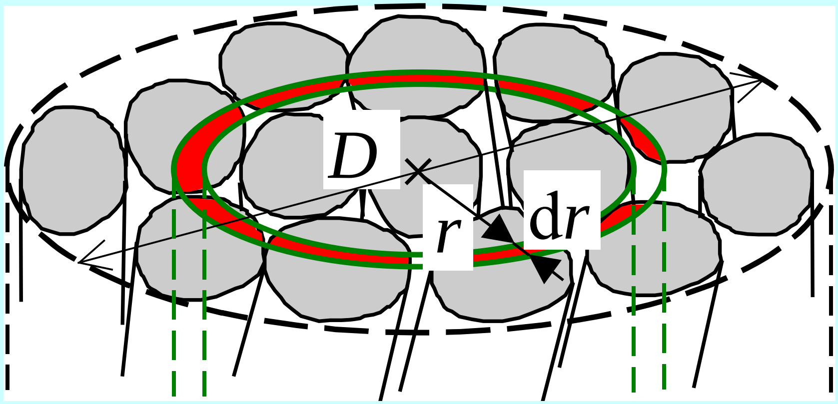
$$\operatorname{tg}\overbrace{\beta}^{=\beta_D} = 2\pi \overbrace{r}^{=D/2} Z = 2\pi\frac{D}{2}Z, \quad \boxed{\operatorname{tg}\beta_D = \pi D Z}$$

… což jsme dříve odvodili

Počet vláken v průřezu příze

za předpokladu ideálního šroubovicového modelu

Uvažujme **diferenciální vrstvu** (zelenou) od r do $r+\mathrm{d}r$ v přízi, tvořící v průřezu **diferenciální mezikruží.**



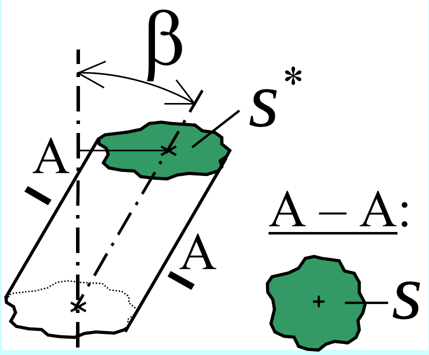
Plocha dif. mezikruží...$\mathrm{d}S_c$

$$\mathrm{d}S_c = \pi\overbrace{(r+\mathrm{d}r)^2}^{=r^2+2r\,\mathrm{d}r+\mathrm{d}^2r} - \pi r^2 = \pi\left[r^2+2r\,\mathrm{d}r+\mathrm{d}^2r-r^2\right] = \pi\left[2r\,\mathrm{d}r+2r\,\mathrm{d}^2r/(2r)\right] =$$

$$= \pi 2r\,\mathrm{d}r\left[1+\overbrace{\mathrm{d}r/(2r)}^{\text{NEKONEČNĚ MALÉ! ZANEDBÁME}}\right], \qquad \boxed{\mathrm{d}S_c = 2\pi r\,\mathrm{d}r}$$

Plocha vláken (červená) v dif. mezikruží ...$\mathrm{d}S$

- zaplnění $\mu = \mathrm{d}S/\mathrm{d}S_c$, $\mathrm{d}S = \mu\,\overbrace{\mathrm{d}S_c}^{=2\pi r\,\mathrm{d}r}$, $\boxed{\mathrm{d}S = \mu\,2\pi r\,\mathrm{d}r}$



Plocha řezu jednoho celého vlákna, ležícího na poloměru diferenciální vrstvy… $\boxed{s^* = \dfrac{s}{\cos\beta}}$

(*Pozn.:* Při definici k_n jsme odvodili $s_i^* = s/\cos\vartheta_i$.)

Platí $1=\cos^2\beta+\sin^2\beta,\ 1/\cos^2\beta = \overbrace{\cos^2\beta/\cos^2\beta}^{=1} + \overbrace{\sin^2\beta/\cos^2\beta}^{=\mathrm{tg}^2\beta} = 1+\mathrm{tg}^2\beta,$

$$\cos^2\beta = 1/\left(1+\mathrm{tg}^2\beta\right), \quad \boxed{\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}}}$$ …obecný vzorec

Dále lze psát

$$s^* = s/\overbrace{\cos\beta}^{=1/\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}} = s\sqrt{1+\left(\overbrace{\mathrm{tg}\,\beta}^{=2\pi rZ}\right)^2}, \quad \boxed{s^* = s\sqrt{1+(2\pi rZ)^2}}$$

<u>Počet vláken v dif. vrstvě</u>… $\mathrm{d}n = \dfrac{\text{celková plocha vláken}}{\text{plocha jednoho vlákna}}$

$$\mathrm{d}n = \overbrace{\mathrm{d}S}^{=\mu\, 2\pi r\,\mathrm{d}r} \Big/ \overbrace{s^*}^{=s\sqrt{1+(2\pi r Z)^2}} = \frac{\mu\, 2\pi r\,\mathrm{d}r}{s\sqrt{1+(2\pi r Z)^2}}, \quad \boxed{\mathrm{d}n = \frac{2\pi\mu}{s}\,\frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1+(2\pi r Z)^2}}}$$

Počet vláken v průřezu příze…n je „součet“ (integrál) počtů vláken $\mathrm{d}n$ ze všech možných dif. vrstev, tj. od poloměru $r = 0$ až po poloměr $r = D/2$.

$$\boxed{n = \int_{r=0}^{r=D/2} \mathrm{d}n = \frac{2\pi\mu}{s} \int_{r=0}^{r=D/2} \frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1+(2\pi r Z)^2}}}$$

Nalezneme integrál

$$I=\int_{0}^{D/2}\frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1+\left(2\pi rZ\right)^{2}}}=\int_{1}^{\sqrt{1+(\pi DZ)^{2}}}\frac{x\,\mathrm{d}x}{x\left(2\pi Z\right)^{2}}=\frac{1}{\left(2\pi Z\right)^{2}}\left[\sqrt{1+\left(\pi DZ\right)^{2}}-1\right]$$

$$\text{Substituce: } x^{2}=1+\left(2\pi rZ\right)^{2},$$

$$2x\,\mathrm{d}x=\left(2\pi Z\right)^{2}2r\,\mathrm{d}r,\;\; r\,\mathrm{d}r=x\,\mathrm{d}x\big/\left(2\pi Z\right)^{2}$$

Pro počet vláken platí

$$n=\frac{2\pi\mu}{s}\overbrace{\int_{0}^{D/2}\frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1+\left(2\pi rZ\right)^{2}}}}^{=I}=\frac{2\pi\mu}{s}\frac{1}{\left(2\pi Z\right)^{2}}\left[\sqrt{1+\left(\pi DZ\right)^{2}}-1\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi^{2}Z^{2}\cdot D^{2}}\overbrace{\overbrace{\overbrace{\left(\frac{\pi\cdot D^{2}}{4}\right)}^{=S_c}\mu}^{=S}\frac{1}{s}}^{=\tau}\left[\sqrt{1+\left(\pi DZ\right)^{2}}-1\right],\qquad \boxed{n=\frac{2\tau}{\left(\pi DZ\right)^{2}}\left[\sqrt{1+\left(\pi DZ\right)^{2}}-1\right]}$$

Pro počet vláken jsme dříve odvodili obecný vztah $n=\tau k_n$.

Tedy nyní $n=\tau k_n=\dfrac{2\tau}{(\pi DZ)^2}\left[\sqrt{1+(\pi DZ)^2}-1\right],$

Odtud lze pro ideální šroubovicový model vyjádřit

součinitel k_n…

$$\boxed{k_n=\frac{2}{(\pi DZ)^2}\left[\sqrt{1+(\pi DZ)^2}-1\right]}$$

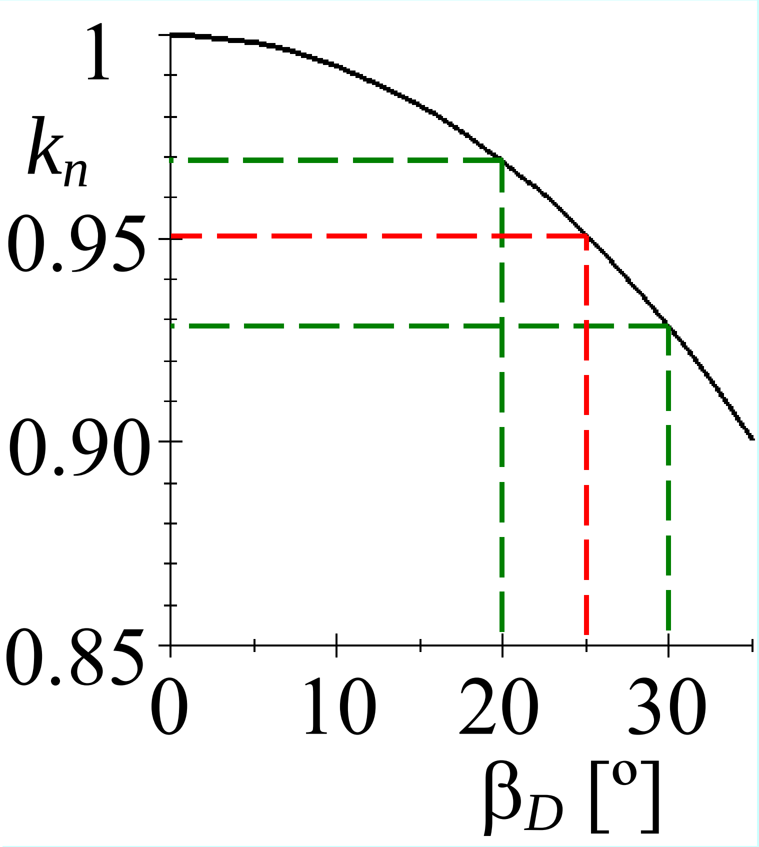
Též

$$k_n=\frac{2}{\Big(\underbrace{\pi DZ}_{=\tan\beta_D}\Big)^2}\left[\sqrt{1+\Big(\underbrace{\pi DZ}_{=\tan\beta_D}\Big)^2}-1\right]=\frac{2}{\Big(\underbrace{\tan\beta_D}_{=\sin\beta_D/\cos\beta_D}\Big)^2}\left[\underbrace{\underbrace{\sqrt{\underbrace{1+\tan^2\beta_D}_{=1/\cos^2\beta_D}}}_{=1/\cos\beta_D}-\underbrace{1}_{=\cos\beta_D/\cos\beta_D}}_{=(1-\cos\beta_D)/\cos\beta_D}\right]=$$

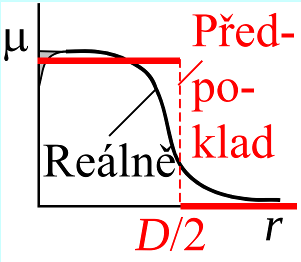
$$=2\frac{\cos^2\beta_D}{\sin^2\beta_D}\frac{\overbrace{(1-\cos\beta_D)(1+\cos\beta_D)}^{=(1-\cos^2\beta_D)=\sin^2\beta_D}}{\cos\beta_D\,(1+\cos\beta_D)},$$

$$\boxed{k_n=\frac{2\cos\beta_D}{1+\cos\beta_D}}$$

Odvozenou závislost k_n na β_D ilustruje černá křivka v grafu:



Pozn.: Sklon povrchového vlákna bývá u běžných přízí mezi 20º a 30º. Součinitel k_n se tedy pohybuje kolem 0,95, v důsledku sklonu vláken dle <u>ideálního šroubovicového modelu</u>. Reálná hodnota k_n může být u *prstencových přízí* nepatrně větší v důsledku reálného průběhu zaplnění.



U *rotorových přízí* je k_n značně menší (kolem 0,8 i méně). Příčinou je nižší paralelita vláken a vliv ovinků.

Seskání příze

za předpokladu ideálního šroubovicového modelu

Uvažujme zakrucování svazku rovnoběžných vláken

Zakrucování

PŘED PO

Délka svazku……….. ζ_0 ………… ζ

Seskání…………

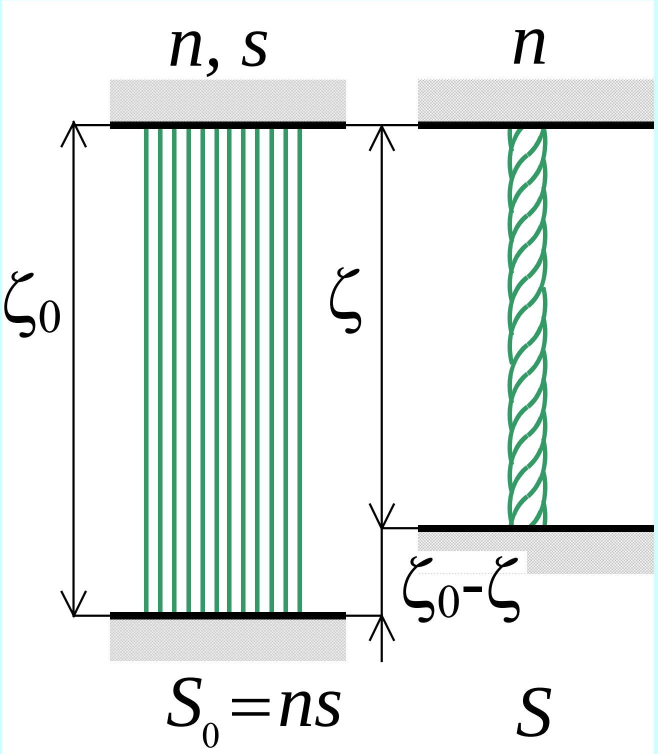
$$\delta = \frac{\zeta_0 - \zeta}{\zeta_0} = 1 - \frac{\zeta}{\zeta_0}$$

Počet vláken…………..n…………… n

Substanční průřez…..$S_0 = ns$ …….S

Objem vláken…………V_0 ……………V

$$V_0 = S_0\zeta_0 = ns\zeta_0, \quad V = S\zeta$$



PŘÍZE A HEDVÁBÍ 2

Ze vztahů $V_0 = S_0\zeta_0 = ns\zeta_0$, $V = S\zeta$ platí $\zeta_0 = V_0/ns$, $\zeta = V/S$.

Seskání

$$\delta = 1 - \overbrace{\zeta}^{=V/S} \Big/ \overbrace{\zeta_0}^{=V_0/ns} = 1 - \frac{V}{V_0}\frac{ns}{S} = 1 - \frac{V}{V_0}\frac{s}{\underbrace{S/n}_{=\bar{s}^*}} = 1 - \frac{V}{V_0}\overbrace{\left(\frac{s}{\bar{s}^*}\right)}^{=k_n},$$

$$\boxed{\delta = 1 - \frac{V}{V_0}k_n}$$

Předpoklad (Braschler)*:* Objem vláken ve svazku se jeho zakroucením nezmění; $V_0 = V$. Potom $\boxed{\delta = 1 - k_n}$

Užitím předpokladu a předchozího k_n (ideál. šroub. model!)

$$\delta = 1 - \overbrace{k_n}^{=\frac{2}{(\pi DZ)^2}\left[\sqrt{1+(\pi DZ)^2}-1\right]} = 1 - \frac{2}{(\pi DZ)^2}\left[\sqrt{1+(\pi DZ)^2}-1\right]$$

Úpravou nalezneme

$$\delta = \frac{\left(\sqrt{1+(\pi DZ)^2}+1\right) - \frac{2}{(\pi DZ)^2}\overbrace{\left[\sqrt{1+(\pi DZ)^2}-1\right]\left(\sqrt{1+(\pi DZ)^2}+1\right)}^{=\left[\sqrt{1+(\pi DZ)^2}\right]^2-1^2}}{\sqrt{1+(\pi DZ)^2}+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+(\pi DZ)^2}\overbrace{+1-\overbrace{\frac{2}{(\pi DZ)^2}\overbrace{\left\{1+(\pi DZ)^2-1\right\}}^{=(\pi DZ)^2}}^{=2}}^{=-1}}{\sqrt{1+(\pi DZ)^2}+1}$$

$$\boxed{\delta = \frac{\sqrt{1+(\pi DZ)^2}-1}{\sqrt{1+(\pi DZ)^2}+1} = \frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\beta_D}-1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\beta_D}+1}}$$

V jiné úpravě také

$$\delta = 1-\overbrace{\left(\frac{\zeta}{\zeta_0}\right)}^{=k_n} = 1-\overbrace{k_n}^{=\frac{2\cos\beta_D}{1+\cos\beta_D}} = \frac{1+\cos\beta_D}{1+\cos\beta_D}-\frac{2\cos\beta_D}{1+\cos\beta_D} = \frac{\overbrace{1+\cos\beta_D-2\cos\beta_D}^{=1-\cos\beta_D}}{1+\cos\beta_D},$$

$$\boxed{\delta = \frac{1-\cos\beta_D}{1+\cos\beta_D}}$$

Pozn.: V matematice platí $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
a tedy $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$; též $1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$.

Ještě další úpravou (Braschler) nalezneme pro seskání

$$\delta=\frac{1-\cos\beta_D}{1+\cos\beta_D}=\frac{\overbrace{\left(\cos^2\frac{\beta_D}{2}+\sin^2\frac{\beta_D}{2}\right)}^{=1}-\overbrace{\left(\cos^2\frac{\beta_D}{2}-\sin^2\frac{\beta_D}{2}\right)}^{=\cos\beta_D\;=\cos\left(2\frac{\beta_D}{2}\right)}}{\underbrace{\left(\cos^2\frac{\beta_D}{2}+\sin^2\frac{\beta_D}{2}\right)}_{=1}+\underbrace{\left(\cos^2\frac{\beta_D}{2}-\sin^2\frac{\beta_D}{2}\right)}_{=\cos\beta_D}}=\frac{2\sin^2\frac{\beta_D}{2}}{2\cos^2\frac{\beta_D}{2}},\quad\boxed{\delta=\mathrm{tg}^2\frac{\beta_D}{2}}$$

Pro Köchlinův (běžný) zákrutový koeficient jsme nalezli

$\alpha=\dfrac{\kappa\sqrt{\mu\rho}}{2\sqrt{\pi}}$ a intenzita zákrutu $\kappa=\mathrm{tg}\,\beta_D=\pi DZ$;

tedy $\kappa=\mathrm{tg}\,\beta_D=\pi DZ=\dfrac{2\sqrt{\pi}\,\alpha}{\sqrt{\mu\rho}}$.

PŘÍZE A HEDVÁBÍ 2

Užitím posledního výrazu získáme seskání jako funkci α.

$$\delta=\left[\sqrt{1+\left(\overbrace{\pi D Z}^{=2\sqrt{\pi}\,\alpha/\sqrt{\mu\rho}}\right)^2}-1\right]\Bigg/\left[\sqrt{1+\left(\overbrace{\pi D Z}^{=2\sqrt{\pi}\,\alpha/\sqrt{\mu\rho}}\right)^2}+1\right],$$

$$\boxed{\delta=\frac{\sqrt{1+4\pi\alpha^2/(\mu\rho)}-1}{\sqrt{1+4\pi\alpha^2/(\mu\rho)}+1}}$$

Nyní zavedeme další veličiny:

Hmotnost svazku… m

Výchozí jemnost svazku… $T_0=m/\zeta_0$

Jemnost zakrouceného svazku… $T=m/\zeta$

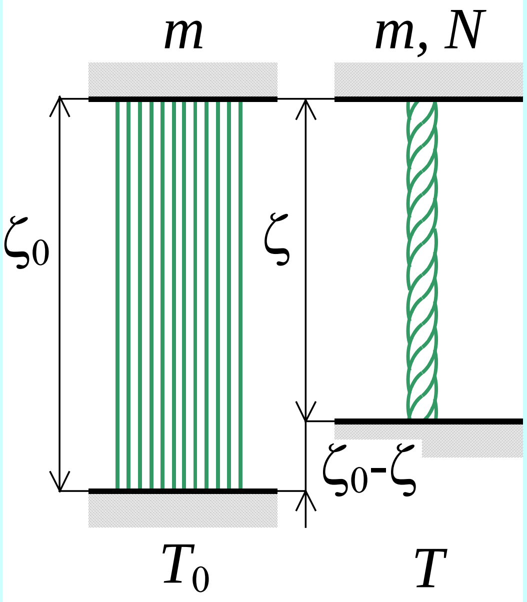
$$T_0=\overbrace{m}^{=T\zeta}\Big/\zeta_0=T\,\overbrace{\zeta/\zeta_0}^{=1-\delta},\qquad \boxed{T_0=T\left(1-\delta\right)}$$

Počet ovinů vložených do svazku… N

Latentní zákrut svazku… $Z_0=N/\zeta_0$

Zákrut (zkrouceného) svazku… $Z=N/\zeta$

$$Z_0=\overbrace{N}^{=Z\zeta}\Big/\zeta_0=Z\,\overbrace{\zeta/\zeta_0}^{=1-\delta},\qquad \boxed{Z_0=Z\left(1-\delta\right)}$$



Latentní zákrutový koeficient (Köchlinův)… $\alpha_0 = Z_0\sqrt{T_0}$

<u>Zákrutový koeficient</u> (Köchlinův)… $\alpha = Z\sqrt{T}$

$$\alpha_0 = \overbrace{Z_0}^{=Z(1-\delta)} \sqrt{\overbrace{T_0}^{=T(1-\delta)}} = \overbrace{Z\sqrt{T}}^{=\alpha}\left(1-\delta\right)^{3/2}, \qquad \boxed{\alpha_0 = \alpha\left(1-\delta\right)^{3/2}}$$

Užijeme-li výraz pro latentní zákrutový koeficient (Köchlinův) ve výrazu pro seskání, nalezneme

$$\delta = \frac{\sqrt{1+4\pi\left(\overbrace{\alpha}^{=\alpha_0/(1-\delta)^{3/2}}\right)^2 \Big/ (\mu\rho)} - 1}{\sqrt{1+4\pi\left(\overbrace{\alpha}^{=\alpha_0/(1-\delta)^{3/2}}\right)^2 \Big/ (\mu\rho)} + 1} = \frac{\sqrt{1+\dfrac{4\pi\alpha_0^2}{\mu\rho\left(1-\delta\right)^3}} - 1}{\sqrt{1+\dfrac{4\pi\alpha_0^2}{\mu\rho\left(1-\delta\right)^3}} + 1}$$

V posledním výrazu je seskání funkcí latentního koeficientu zákrutu (Köchlinova), ale δ je na obou stranách rovnice.

Úprava: Označíme „pomocnou“ veličinu $\frac{4\pi\alpha_0^2}{\mu\rho(1-\delta)^3}=A$. Pak

$$\delta=\left[\sqrt{1+A}-1\right]/\left[\sqrt{1+A}+1\right],\quad \delta\sqrt{1+A}+\delta=\sqrt{1+A}-1,\quad 1+\delta=-\delta\sqrt{1+A}+\sqrt{1+A},$$

$$1+\delta=\sqrt{1+A}(1-\delta),\quad [1+\delta]^2=\left[\sqrt{1+A}(1-\delta)\right]^2,\quad 1+2\delta+\delta^2=(1+A)(1-\delta)^2,$$

$$\left[1+2\delta+\delta^2\right](1-\delta)=(1+A)(1-\delta)^2(1-\delta),\quad \left[1+2\delta+\delta^2\right](1-\delta)=(1+A)(1-\delta)^3,$$

$$1+\overbrace{2\delta+\delta^2-\delta-2\delta^2}^{=\delta-\delta^2}-\delta^3=(1-\delta)^3\left[1+\overbrace{\left(\frac{4\pi\alpha_0^2}{\mu\rho(1-\delta)^3}\right)}^{=A}\right]=\overbrace{1-3\delta+3\delta^2-\delta^3}^{=(1-\delta)^3}+4\pi\alpha_0^2/(\mu\rho),$$

$$\delta-\delta^2=-3\delta+3\delta^2+4\pi\alpha_0^2/(\mu\rho),\quad 0=4\delta^2-4\delta+4\pi\alpha_0^2/(\mu\rho),\quad 0=\delta^2-\delta+\pi\alpha_0^2/(\mu\rho),$$

$$\delta=\frac{1\pm\sqrt{1-\frac{4\pi}{\mu}\frac{\alpha_0^2}{\rho}}}{2},$$

$$\boxed{\delta=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{4\pi}{\mu}\frac{\alpha_0^2}{\rho}}}$$

… sekání δ jako funkce latentního koeficientu α_0 (reálně se znaménkem minus).

Nasycený zákrut

Poslední výraz, tj. $\delta = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4\pi}{\mu}\frac{\alpha_0^2}{\rho}}$, je definován jen pro

$$1 - \frac{4\pi}{\mu}\frac{\alpha_0^2}{\rho} \geq 0, \quad 1 \geq \frac{4\pi}{\mu}\frac{\alpha_0^2}{\rho}, \quad \frac{\mu\rho}{4\pi} \geq \alpha_0^2, \quad \boxed{\frac{\alpha_0}{\sqrt{\mu\rho}} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi}}}$$

Maximální hodnota latentního zákrutového koeficientu (Köchlinova) je limitovaná!

Veličiny odpovídající krajnímu případu – stavu nasyceného zákrutu – budou opatřeny znakem ^ nad symbolem veličiny. Platí tedy

$$\boxed{\frac{\hat{\alpha}_0}{\sqrt{\mu\rho}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = 0,281}\ \text{, dále}\ \hat{\delta} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\overbrace{1 - \frac{4\pi}{\mu}\frac{\hat{\alpha}_0^2}{\rho}}^{=0}}, \quad \boxed{\hat{\delta} = \frac{1}{2}}$$

Ve stavu nasyceného zákrutu dále platí

$$\hat{\delta} = \frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\hat{\beta}_D}-1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\hat{\beta}_D}+1}, \quad \hat{\delta}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\hat{\beta}_D}+\hat{\delta} = \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\hat{\beta}_D}-1,$$

$$1+\hat{\delta} = \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\hat{\beta}_D}\left(1-\hat{\delta}\right), \quad \left(1+\hat{\delta}\right)/\left(1-\hat{\delta}\right) = \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\hat{\beta}_D},$$

$$\left[\left(1+\hat{\delta}\right)/\left(1-\hat{\delta}\right)\right]^2 = 1+\mathrm{tg}^2\,\hat{\beta}_D, \quad \left[\left(1+\hat{\delta}\right)/\left(1-\hat{\delta}\right)\right]^2-1 = \mathrm{tg}^2\,\hat{\beta}_D,$$

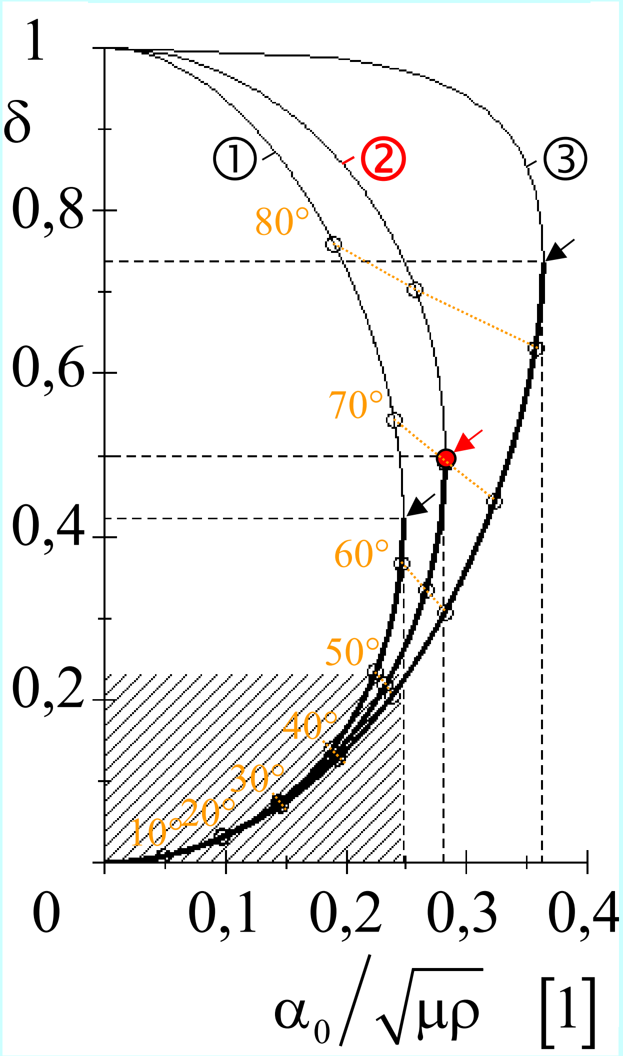
$$\mathrm{tg}\,\hat{\beta}_D = \sqrt{\left[\left(1+\overbrace{\hat{\delta}}^{=1/2}\right)\Big/\left(1-\overbrace{\hat{\delta}}^{=1/2}\right)\right]^2-1},$$

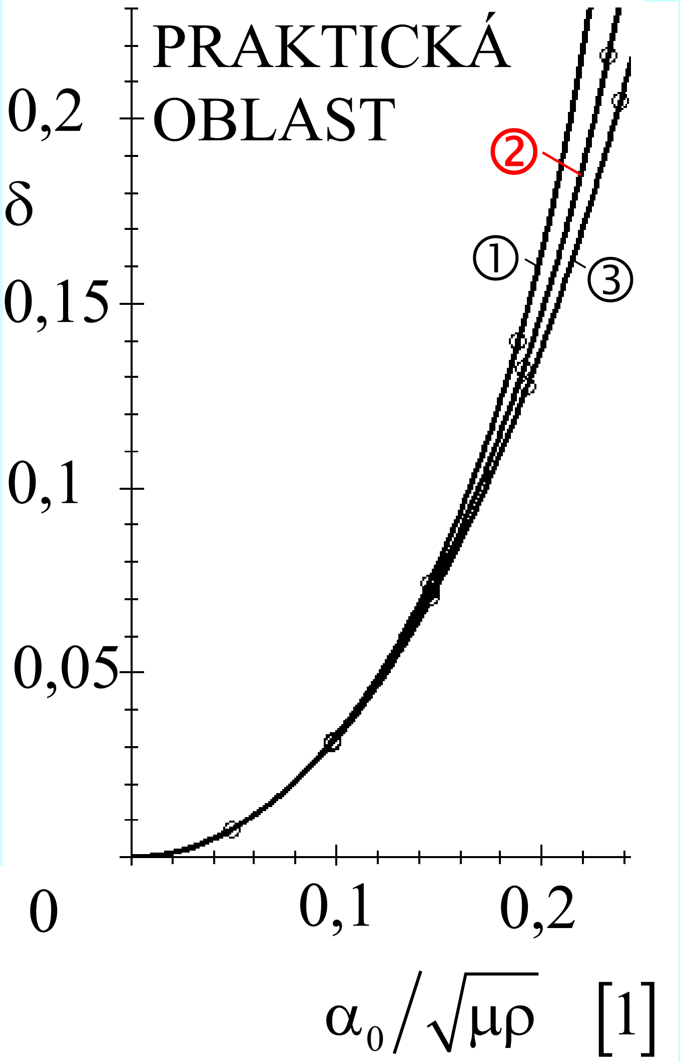
$$\overbrace{\mathrm{tg}\,\hat{\beta}_D}^{=\kappa=\pi DZ} = \sqrt{\left[\frac{3}{2}\Big/\frac{1}{2}\right]^2-1} = \sqrt{3^2-1}, \quad \boxed{\hat{\kappa} = \pi D\hat{Z} = \mathrm{tg}\,\hat{\beta}_D = 2\sqrt{2} = 2{,}828}$$

A konečně $\boxed{\hat{\beta}_D = \mathrm{arctg}\left(2\sqrt{2}\right) \doteq 70{,}5^\circ}$

Grafický průběh odvozené funkce (křivka ②) :

Poznámka: Křivky ① a ③ patří jiným modelům seskání

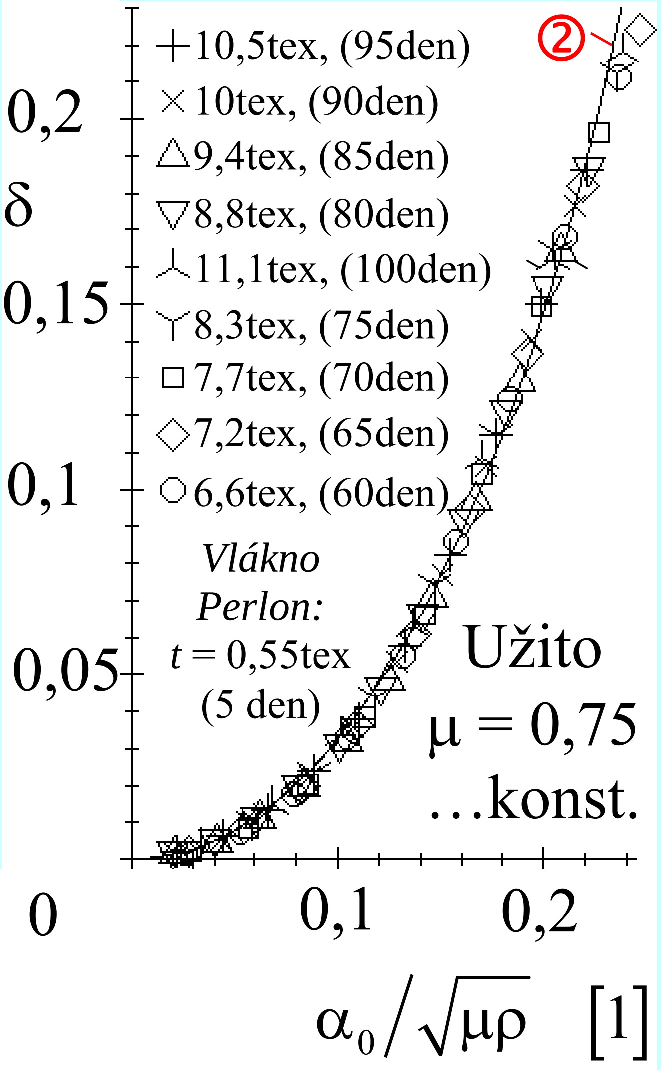




<u>Experiment</u> *(J. Marko, B. Neckář)*

PAD hedvábí (Perlon)

Pozn.: Nasycený zákrut se prakticky projeví už při hodnotě $\hat{\alpha}_0/\sqrt{\mu\rho}$ kolem $0{,}22$ místo teoreticky odvozené $\hat{\alpha}_0/\sqrt{\mu\rho} = 0{,}281$. Příčinou je zřejmě nedokonalá osová symetrie zakrouceného hedvábí.



[1]

A co se stane přikroutíme-li ještě více nit s nasyceným zákrutem?

Zákrut druhého řádu