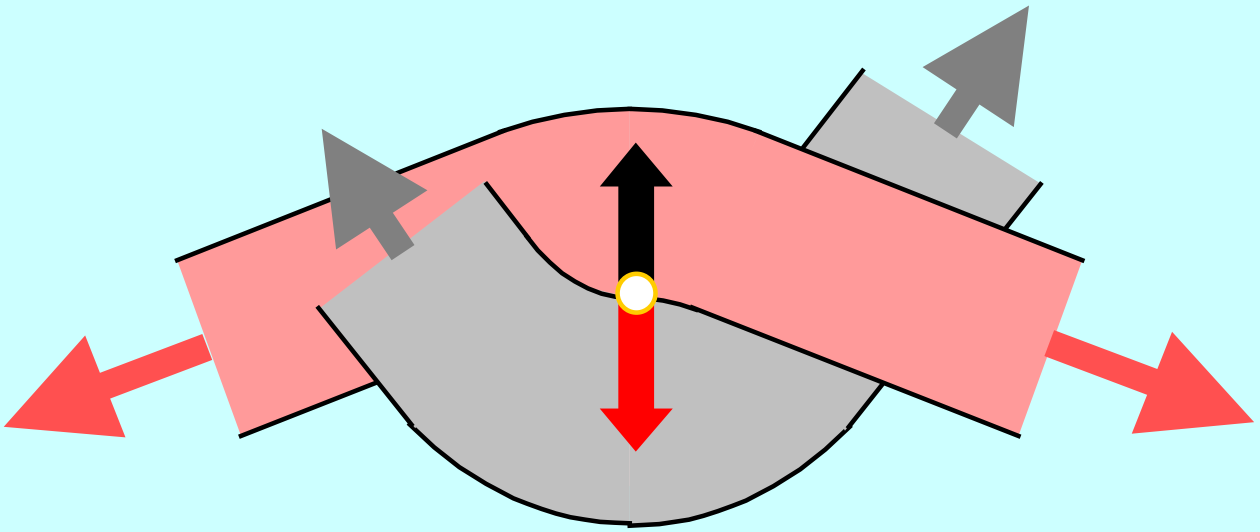
TKANINY 3

„MECHANIKA TKANIN"



TAŽNOST A PEVNOST TKANINY

Tažnost tkaniny - meze tažnosti

1. „NEDEFORMOVATELNÉ" NITĚ (nejjednodušší model)

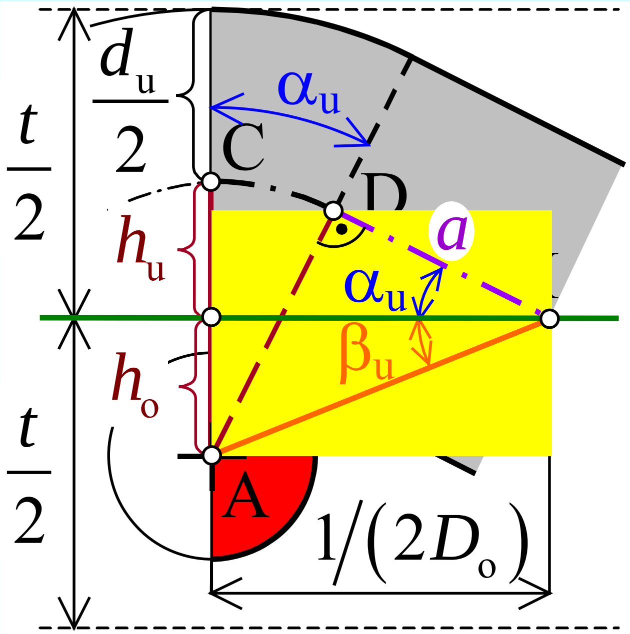
Předpoklad 1: Tkanina – plátno – napjatá po osnově a/nebo po útku zachovává geometrii Peirceova modelu.

Předpoklad 2: Nitě ve tkanině jsou

a) dokonale ohebné, avšak

b) neroztažné a

c) příčně nedeformovatelné (kruh)



Pro délku „půlvlny" $l_u = \overset{\frown}{CD} + a$ jsme nalezli

$$l_u = \frac{d_o + d_u}{2}\left(\alpha_u + \sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2\beta_u} - 1}\right)$$

TKANINY 3

Zavedeme-li **relativní délku půlvlny** útkové nitě

$$\boxed{\rho_u = \frac{2l_u}{d_o + d_u}}$$

, můžeme tuto veličinu vyjádřit také vztahem

$$\rho_u = 2\overbrace{l_u}^{=\frac{d_o+d_u}{2}\left(\alpha_u + \sqrt{\lambda_o^2/\sin^2\beta_u - 1}\right)} \Big/ \left(d_o + d_u\right),$$

$$\boxed{\rho_u = \alpha_u + \sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2\beta_u} - 1}}$$

Pro obecný úhel α_u však bylo dříve odvozeno

$$\alpha_u = \operatorname{arctg}\left[\left(1 - \operatorname{tg}\beta_u\sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2\beta_u} - 1}\right)\Big/\left(\sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2\beta_u} - 1} + \operatorname{tg}\beta_u\right)\right]$$

, takže též

$$\boxed{\rho_u = \operatorname{arctg}\left[\frac{1 - \operatorname{tg}\beta_u\sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2\beta_u} - 1}}{\sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2\beta_u} - 1} + \operatorname{tg}\beta_u}\right] + \sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2\beta_u} - 1}}$$

(Poslední výraz vyjadřuje ρ_u jako funci λ_o a β_u .)

TKANINY 3

Odvodili jsme rovněž některé vztahy, které platí při mezní dostavě osnovy. (Veličiny příslušející mezní dostavě doplníme indexem „m" – např. $\beta_{u,m}$, $\rho_{u,m}$ aj.) . Platí

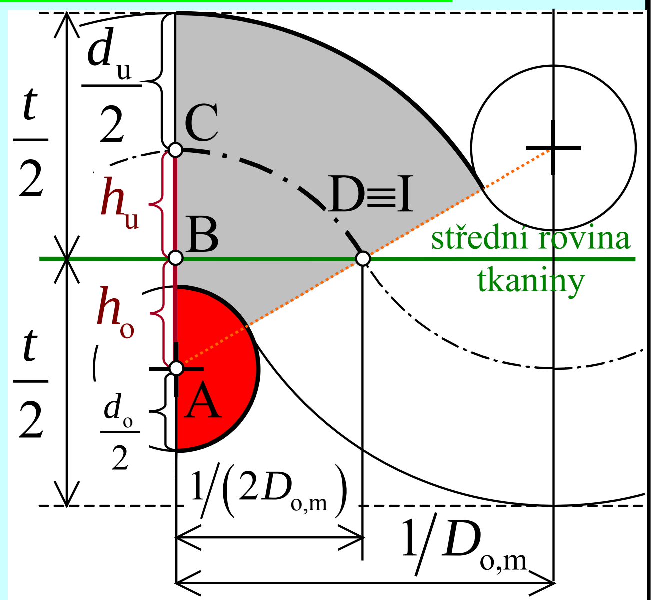
$$\sin\beta_{u,m} = \lambda_o \quad , \quad \operatorname{tg}\beta_{u,m} = \lambda_o \Big/ \sqrt{1-\lambda_o^2} \quad , \quad \alpha_{u,m} = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{1-\lambda_o^2}\Big/\lambda_o\right)$$

a také $\operatorname{tg}\beta_u = D_o\lambda_o\left(d_o + d_u\right), \quad \operatorname{tg}\beta_{u,m} = D_{o,m}\lambda_o\left(d_o + d_u\right)$

Relativní délka „půlvlny" útkové nitě při mezní dostavě osnovy je

$$\underbrace{\rho_u}_{=\rho_{u,m}} = \underbrace{\alpha_u}_{=\alpha_{u,m}=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{1-\lambda_o^2}/\lambda_o\right)} + \sqrt{\overbrace{\overbrace{\left(\underbrace{\lambda_o}_{=\sin\beta_{u,m}}\right)^2\Big/\left(\underbrace{\sin\beta_u}_{=\sin\beta_{u,m}}\right)^2}^{=1} - 1}^{=0}},$$

$$\rho_{u,m} = \alpha_{u,m} = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{1-\lambda_o^2}\Big/\lambda_o\right)$$



Nebo také $\rho_{u,m} = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\underbrace{1-\Big(\underbrace{\lambda_o}_{=\sin\beta_{u,m}}\Big)^2}_{=\cos^2\beta_{u,m}}} \Big/ \underbrace{\lambda_o}_{=\sin\beta_{u,m}} \right) = \operatorname{arctg}\Big(\underbrace{\cos\beta_{u,m}/\sin\beta_{u,m}}_{=1/\operatorname{tg}\beta_{u,m}=\operatorname{cotg}\beta_{u,m}} \Big),$

$\rho_{u,m} = \underbrace{\operatorname{arctg}\left(\operatorname{cotg}\beta_{u,m}\right)}_{=\pi/2-\beta_{u,m}},$ $\boxed{\rho_{u,m} = \pi/2 - \beta_{u,m}}$

Relativní výška vazné vlny osnovní nitě λ_o se smí pohybovat v rozmezí od 0 do 1, takže relativní délka „půlvlny" útkové nitě <u>při mezní dostavě osnovy</u> je

- pro hodnotu $\lambda_o = 0$:

$$\rho_{u,m} = \alpha_{u,m} = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{1-\Big(\underbrace{\lambda_o}_{=0}\Big)^2} \Big/ \underbrace{\lambda_o}_{=0} \right) = \operatorname{arctg}\infty = \frac{\pi}{2}$$

(největší možná hodnota $\rho_{u,m}$)

- Pro hodnotu $\lambda_o = 1$:

$$\rho_{u,m} = \alpha_{u,m} = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{1-\Big(\overbrace{\lambda_o}^{=1}\Big)^2}\Big/\overbrace{\lambda_o}^{=1}\right) = \operatorname{arctg} 0 = 0$$

(nejmenší teoreticky možná hodnota $\rho_{u,m}$)

Je-li $\boxed{\rho_u \le \pi/2}$, pak existuje nějaké $\lambda_o \in \langle 0,1 \rangle$ pro které je daná hodnota $\rho_u = \rho_{u,m}$.

Je-li $\boxed{\rho_u > \pi/2}$, pak pro žádné $\lambda_o \in \langle 0,1 \rangle$ není takové ρ_u mezním.

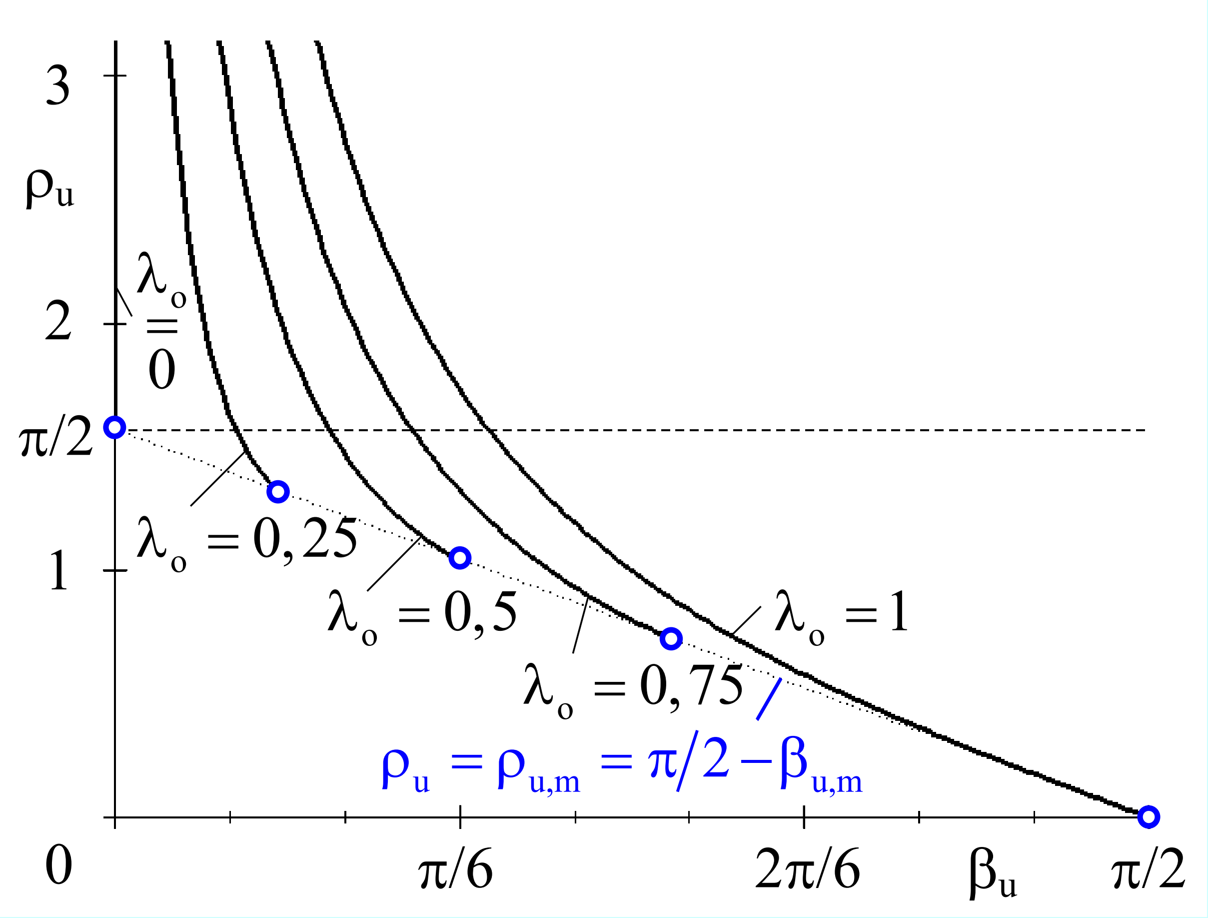
Funkci $\rho_u = \operatorname{arctg}\left[\dfrac{1-\operatorname{tg}\beta_u\sqrt{\dfrac{\lambda_o^2}{\sin^2\beta_u}-1}}{\sqrt{\dfrac{\lambda_o^2}{\sin^2\beta_u}-1}+\operatorname{tg}\beta_u}\right] + \sqrt{\dfrac{\lambda_o^2}{\sin^2\beta_u}-1}$ zobrazíme graficky.

Závislost ilustruje graf:

Pozn.: Pro každé dané λ_o klesá ρ_u s rostoucím β_u. Nejmenší hodnotu má ρ_u při mezní dostavě osnovy (○), tj. když

$$\sin\beta_u = \sin\beta_{u,m} = \\ = \lambda_o,$$

resp. $\rho_u = \rho_{u,m} = \pi/2 - \beta_{u,m}$



Uvažovanou funkci $\rho_u = \mathrm{arctg}\left[\dfrac{1-\mathrm{tg}\,\beta_u\sqrt{\dfrac{\lambda_o^2}{\sin^2\beta_u}-1}}{\sqrt{\dfrac{\lambda_o^2}{\sin^2\beta_u}-1}+\mathrm{tg}\,\beta_u}\right]+\sqrt{\dfrac{\lambda_o^2}{\sin^2\beta_u}-1}$

zobrazíme též jinak – křivkami **konstantní hodnoty** ρ_u.

A) <u>Nechť je zadána konkrétní hodnota</u> $\underbrace{\rho_u}_{\text{zadaný parametr}} \le \pi/2$

(⇒ pro nějaké λ_o je $\rho_u = \rho_{u,m}$)

1. Stanovíme <u>hraniční (nejmenší) hodnotu</u> λ_o ze vztahu

$$\rho_{u,m} = \rho_u = \mathrm{arctg}\left(\sqrt{1-\lambda_o^2}/\lambda_o\right),\quad \mathrm{tg}\,\rho_u = \sqrt{1-\lambda_o^2}/\lambda_o,\quad \mathrm{tg}^2\rho_u = \left(1-\lambda_o^2\right)/\lambda_o^2,$$

$$\lambda_o^2\,\mathrm{tg}^2\rho_u + \lambda_o^2 = 1,\quad \lambda_o^2 = 1\Big/\Big(\overbrace{\mathrm{tg}^2\rho_u + 1}^{=1/\cos^2\rho_u}\Big),\quad \lambda_o = \cos\rho_u$$

Pro dané ρ_u může být jen $\boxed{\lambda_o \in \langle \cos\rho_u, 1\rangle}$

2. Pro jednu každou hodnotu $\lambda_o \in \langle \cos\rho_u, 1 \rangle$ nalezneme odpovídající úhel β_u takový, aby platilo

$$\rho_u = \operatorname{arctg}\left[\frac{1-\operatorname{tg}\beta_u\sqrt{\dfrac{\lambda_o^2}{\sin^2\beta_u}-1}}{\sqrt{\dfrac{\lambda_o^2}{\sin^2\beta_u}-1}+\operatorname{tg}\beta_u}\right]+\sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2\beta_u}-1}$$

Pozn.: Kořen β_u předchozí rovnice nalezneme numericky; protože ρ_u s rostoucím β_u klesá (viz předchozí graf), lze užít např. metodu půlení intervalu.

Platí $\operatorname{tg}\beta_u = D_o\lambda_o\left(d_o + d_u\right)$, takže pro odpovídající dostavu osnovy nalezneme

$$D_o = \frac{\operatorname{tg}\beta_u / \lambda_o}{d_o + d_u}$$

3.Pro zobrazení mezní dostavy osnovy využijeme vztahů

$$D_{o,m} = \left(\operatorname{tg}\beta_{u,m} / \lambda_o\right) / \left(d_o + d_u\right) \text{ a } \operatorname{tg}\beta_{u,m} = \lambda_o / \sqrt{1-\lambda_o^2} \text{ .}$$

$$D_{o,m} = \frac{\underbrace{\operatorname{tg}\beta_{u,m}}_{=\lambda_o/\sqrt{1-\lambda_o^2}} / \lambda_o}{d_o + d_u}, \qquad \boxed{D_{o,m} = \frac{1/\sqrt{1-\lambda_o^2}}{d_o + d_u}}$$

B) Nechť je zadána konkrétní hodnota $\underbrace{\rho_u}_{\text{zadaný parametr}} > \pi/2$

(⇒ pro žádné λ_o není $\rho_u = \rho_{u,m}$)

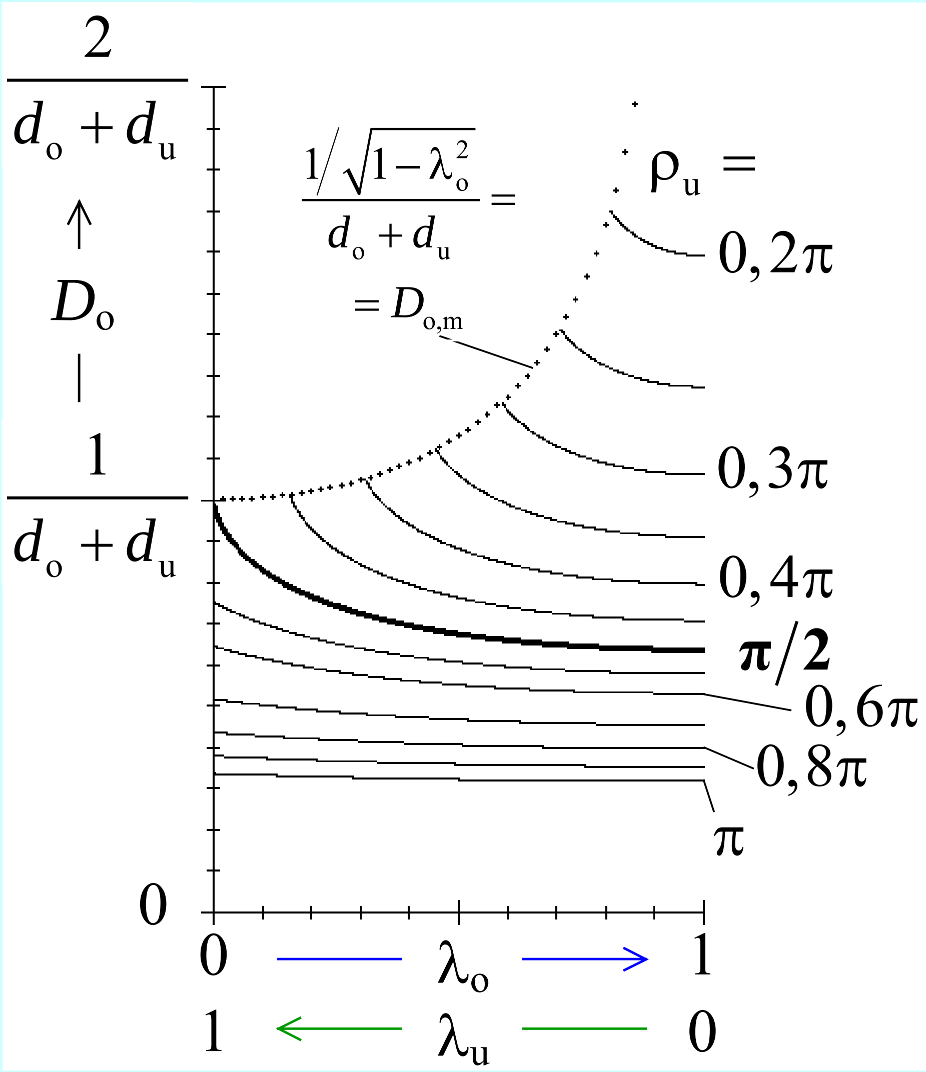
Postup výpočtu je stejný, jako v předchozím případě, jen s tím rozdílem, že hodnota λ_o je definována v celém rozsahu, tj. $\boxed{\lambda_o \in \langle 0,1 \rangle}$

Popsané závislosti ilustruje graf:

NAPÍNÁNÍ TKANINY PO OSNOVĚ

1. Při napínání tkaniny po osnově se relativní výška vazné vlny osnovní nitě λ_o zmenšuje (a relativní výška vazné vlny útku $\lambda_u = 1 - \lambda_o$ se zvětšuje).

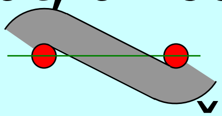
2. Přitom relativní délka „půlvlny" útkové nitě σ_u (i osnovní nitě σ_o) se v našem modelu nemění.



TKANINY 3

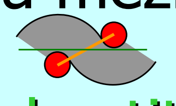
Příklad A:

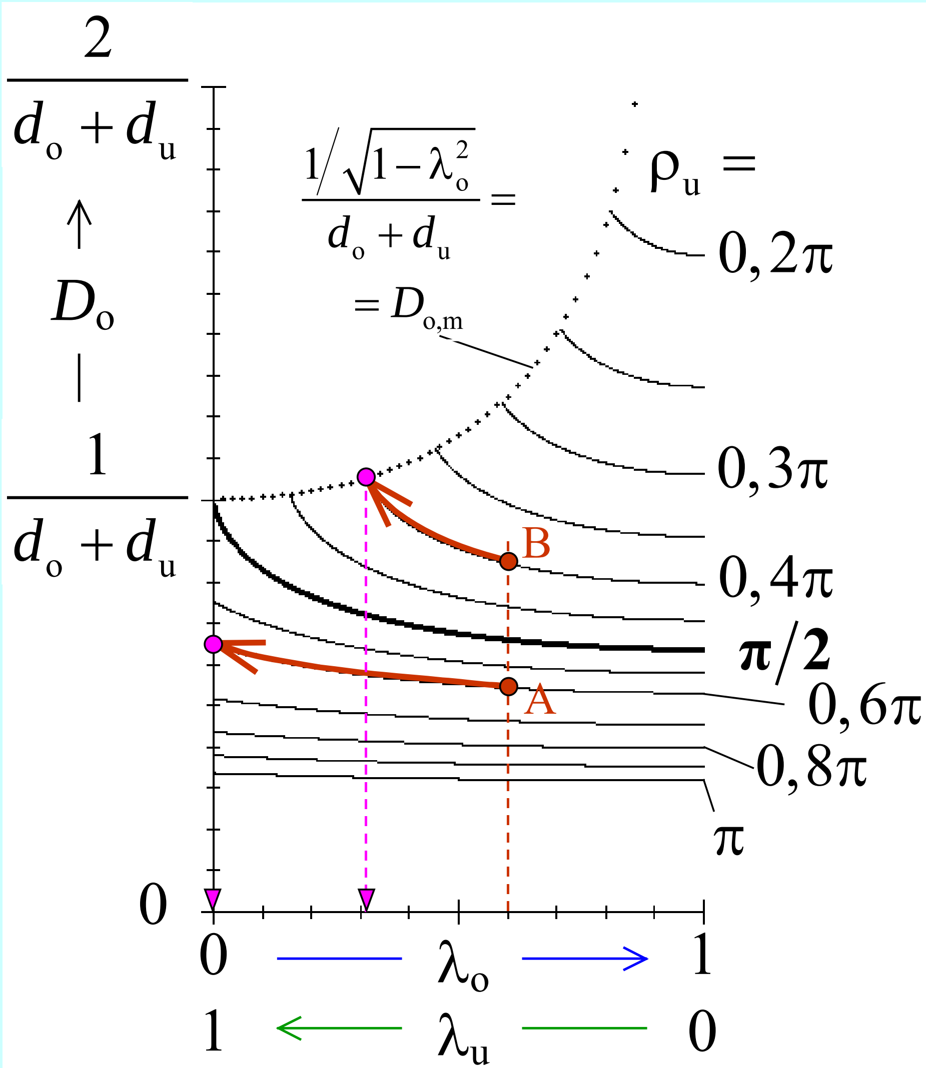
$\lambda_o = 0,6; \quad \rho_u = 0,6\pi$

Napínáním osnovy se budou osnovní nitě vyrovnávat, až budou zcela rovné (). Dostava osnovy se zvětší.

Příklad B:

$\lambda_o = 0,6; \quad \rho_u = 0,4\pi$

Napínáním osnovy se budou osnovní nitě vyrovnávat, až „narazí" na mezní dostavu osnovy ().
(Více vyrovnat a zhustit osnovu **nelze**!)



Pozn.: Pro veličiny druhé soustavy platí všechny předchozí závěry a rovnice po záměně indexů 'o' a 'u' analogicky.

Výpočet tažnosti a příčné kontrakce tkaniny při jejím napnutí po osnově

(při neroztažných a příčně nedeformovatelných nitích)

I) VELIČINY VÝCHOZÍ TKANINY

a) **zadané**

- dostavy osnovy a útku... D_o, D_u
- průměry nití osnovní a útkové... d_o, d_u
- rel. výšky vazných vln osnovy a útku... λ_o, $\lambda_u = 1 - \lambda_o$

b) **vypočítané**

$$\operatorname{tg}\beta_u = D_o\lambda_o\left(d_o + d_u\right), \qquad \beta_u = \operatorname{arctg}\left[D_o\lambda_o\left(d_o + d_u\right)\right]$$

$$\rho_u = \operatorname{arctg}\left[\frac{1-\operatorname{tg}\beta_u\sqrt{\dfrac{\lambda_o^2}{\sin^2\beta_u}-1}}{\sqrt{\dfrac{\lambda_o^2}{\sin^2\beta_u}-1}+\operatorname{tg}\beta_u}\right]+\sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2\beta_u}-1}$$

$$\operatorname{tg}\beta_o = D_u\lambda_u\left(d_o + d_u\right), \qquad \beta_o = \operatorname{arctg}\left[D_u\lambda_u\left(d_o + d_u\right)\right]$$

$$\rho_o = \operatorname{arctg}\left[\frac{1-\operatorname{tg}\beta_o\sqrt{\dfrac{\lambda_u^2}{\sin^2\beta_o}-1}}{\sqrt{\dfrac{\lambda_u^2}{\sin^2\beta_o}-1}+\operatorname{tg}\beta_o}\right]+\sqrt{\frac{\lambda_u^2}{\sin^2\beta_o}-1}$$

II) VELIČINY TKANINY NAPNUTÉ PO OSNOVĚ

(*Pozn.:* Veličiny napnuté tkaniny – kromě konstantních veličin ρ_o, ρ_u a d_o, d_u – budou značeny symbolem *.)

1. **Bylo-li vypočteno** $\rho_u < \pi/2$ („narazí" na mezní dostavu)

$$\boxed{\lambda_o^* = \cos\rho_u}, \qquad \overbrace{\rho_{u,m}}^{=\rho_u} = \pi/2 - \overbrace{\beta_{u,m}}^{=\beta_u^*}, \quad \boxed{\beta_u^* = \pi/2 - \rho_u}$$

$$\operatorname{tg}\beta_u^* = D_o^*\lambda_o^*\left(d_o + d_u\right), \qquad \boxed{D_o^* = \operatorname{tg}\beta_u^* \Big/ \left[\lambda_o^*\left(d_o + d_u\right)\right]}$$

$$\boxed{\lambda_u^* = 1 - \lambda_o^*}$$

$$\boxed{\rho_o = \operatorname{arctg}\left[\frac{1 - \operatorname{tg}\beta_o^*\sqrt{\dfrac{\lambda_u^{*2}}{\sin^2\beta_o^*} - 1}}{\sqrt{\dfrac{\lambda_u^{*2}}{\sin^2\beta_o^*} - 1} + \operatorname{tg}\beta_o^*}\right] + \sqrt{\frac{\lambda_u^{*2}}{\sin^2\beta_o^*} - 1}}$$

…kořen rovnice je β_o^* (numerický výpočet!)

$$\operatorname{tg}\beta_o^* = D_u^*\lambda_u^*\left(d_o + d_u\right), \quad \boxed{D_u^* = \operatorname{tg}\beta_o^* \Big/ \left[\lambda_u^*\left(d_o + d_u\right)\right]}$$

2. **Bylo-li vypočteno** $\rho_u > \pi/2$ (osnova se zcela narovná)

$$\boxed{\lambda_o^* = 0}$$

$$\operatorname{tg}\beta_u^* = \overbrace{D_o^*}^{\text{neurčeno}} \overbrace{\lambda_o^*}^{=0}\left(d_o + d_u\right), \quad \boxed{\beta_u^* = 0}$$

Novou dostavu osnovy určíme z rovnice

$$\rho_u = \operatorname{arctg}\left[\frac{1 - \operatorname{tg}\beta_u^*\sqrt{\dfrac{\lambda_o^{*2}}{\sin^2\beta_u^*} - 1}}{\sqrt{\dfrac{\lambda_o^{*2}}{\sin^2\beta_u^*} - 1} + \operatorname{tg}\beta_u^*}\right] + \sqrt{\frac{\lambda_o^{*2}}{\sin^2\beta_u^*} - 1}$$

kde však nyní

$$\overbrace{\lambda_o^{*2}}^{=0} \Big/ \overbrace{\sin^2\beta_u^*}^{=0} = 0/0$$

...neurčitý výraz

$\Rightarrow$ <u>výraz nejprve upravíme</u>

TKANINY 3

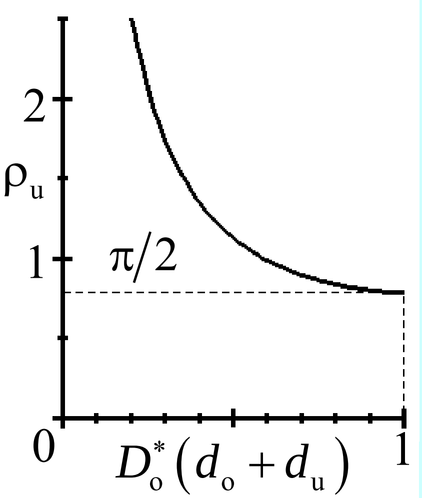
Platí $\mathrm{tg}\,\beta_u^* = D_o^*\lambda_o^*\left(d_o+d_u\right)$, $\lambda_o^* = \mathrm{tg}\,\beta_u^*\big/\left[D_o^*\left(d_o+d_u\right)\right]$ a tedy

$$\frac{\overbrace{\lambda_o^{*2}}^{=\mathrm{tg}^2\beta_u^*/\left[D_o^{*2}(d_o+d_u)^2\right]}}{\sin^2\beta_u^*} = \frac{\overbrace{\mathrm{tg}^2\beta_u^*}^{=\sin^2\beta_u^*/\cos^2\beta_u^*}}{\sin^2\beta_u^* D_o^{*2}\left(d_o+d_u\right)^2} = \frac{1}{\underbrace{\cos^2\overbrace{\beta_u^*}^{=0}}_{=1} D_o^{*2}\left(d_o+d_u\right)^2} = \frac{1}{D_o^{*2}\left(d_o+d_u\right)^2}$$

$$\rho_u = \mathrm{arctg}\left[\frac{1-\mathrm{tg}\,\overbrace{\beta_u^*}^{=0}\sqrt{\overbrace{\lambda_o^{*2}/\sin^2\beta_u^*}^{=1/D_o^{*2}(d_o+d_u)^2}-1}}{\sqrt{\underbrace{\lambda_o^{*2}/\sin^2\beta_u^*}_{}\!\!{}^{=1/D_o^{*2}(d_o+d_u)^2}-1}+\mathrm{tg}\,\overbrace{\beta_u^*}^{=0}}\right] + \sqrt{\overbrace{\lambda_o^{*2}/\sin^2\beta_u^*}^{=1/D_o^{*2}(d_o+d_u)^2}-1}$$

takže pro kořen D_o^* rovnice platí (numericky!)

$$\rho_u = \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{D_o^{*2}\left(d_o+d_u\right)^2}-1}} + \sqrt{\frac{1}{D_o^{*2}\left(d_o+d_u\right)^2}-1}$$



TKANINY 3

Dále $\lambda_u^* = 1 - \underbrace{\lambda_o^*}_{=0}$, $\boxed{\lambda_u^* = 1}$. Platí vzorec $\frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}$,

a tedy $\sqrt{\underbrace{\lambda_u^*}_{=1}{}^2 \big/ \sin^2 \beta_o^* - 1} = \sqrt{1/\mathrm{tg}^2 \beta_o^*} = 1/\mathrm{tg}\,\beta_o^*$. Užitím najdeme

$$\rho_o = \mathrm{arctg}\left[\frac{1 - \mathrm{tg}\,\beta_o^* \overbrace{\sqrt{\frac{\lambda_u^{*2}}{\sin^2 \beta_o^*} - 1}}^{=1/\mathrm{tg}\,\beta_o^*}}{\underbrace{\sqrt{\frac{\lambda_u^{*2}}{\sin^2 \beta_o^*} - 1}}_{=1/\mathrm{tg}\,\beta_o^*} + \mathrm{tg}\,\beta_o^*}\right] + \overbrace{\sqrt{\frac{\lambda_u^{*2}}{\sin^2 \beta_o^*} - 1}}^{=1/\mathrm{tg}\,\beta_o^*} = \mathrm{arctg}\frac{\overbrace{1-1}^{=0}}{1/\mathrm{tg}\,\beta_o^* + \mathrm{tg}\,\beta_o^*} + \frac{1}{\mathrm{tg}\,\beta_o^*} = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\beta_o^*},$$

$\mathrm{tg}\,\beta_o^* = \frac{1}{\rho_o}$,

$$\boxed{\beta_o^* = \mathrm{arctg}\frac{1}{\rho_o}}$$

Konečně $\overbrace{\mathrm{tg}\,\beta_o^*}^{=1/\rho_o} = D_u^* \overbrace{\lambda_u^*}^{=1} (d_o + d_u)$, $\boxed{D_u^* = \frac{1}{\rho_o (d_o + d_u)}}$

Pozn.: Definovali jsme relativní délku půlvlny útkové nitě $\rho_u = 2l_u / (d_o + d_u)$ a záměnou indexů platí pro relativní délku půlvlny osnovní nitě $\rho_o = 2l_o / (d_o + d_u)$. Odtud

$$\rho_o (d_o + d_u) = 2l_o \text{ a tedy } D_u^* = 1 \Big/ \big[\underbrace{\rho_o (d_o + d_u)}_{=2l_o}\big],\ D_u^* = 1/(2l_o),$$

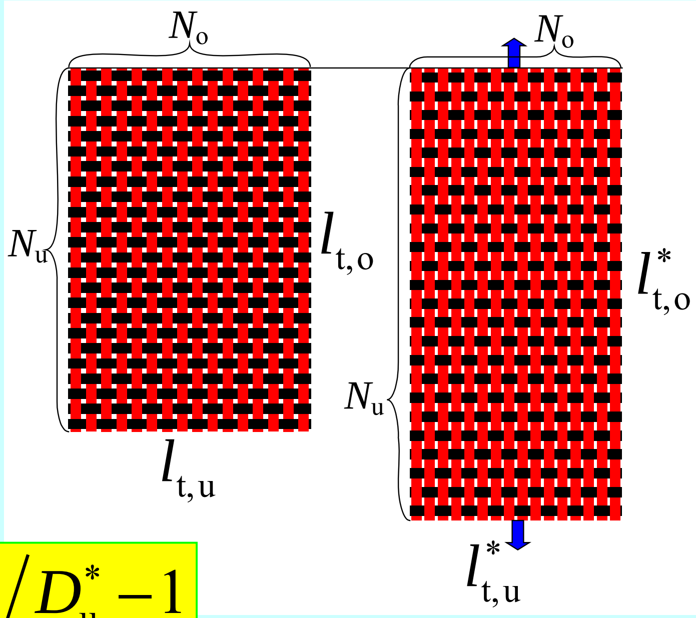
$l_o = 1/(2D_u^*)$. Délka půlvlny osnovní nitě l_o je v tomto případě polovinou vzdálenosti útkových nití $1/(2D_u^*)$. Osnovní nit je tedy zcela napřímena, jak jsme očekávali.

Vlastní výpočet tažnosti

Uvažujme obdélníkový vzorek tkaniny o délkách $l_{t,o}$ po osnově a $l_{t,u}$ po útku. Napnutím ve směru osnovy se $l_{t,o}$ prodlouží na $l_{t,o}^*$ a $l_{t,u}$ se zmenší (zúží) na $l_{t,u}^*$.

TKANINY 3

Počet nití osnovních N_o a útkových N_u se napnutím tkaniny nemění. Platí



$$N_o = D_o l_{t,u} = D_o^* l_{t,u}^*,\quad \boxed{l_{t,u}^* / l_{t,u} = D_o / D_o^*}$$

$$N_u = D_u l_{t,o} = D_u^* l_{t,o}^*,\quad \boxed{l_{t,o}^* / l_{t,o} = D_u / D_u^*}$$

Tažnost po osnově… a_o

$$a_o = \left(l_{t,o}^* - l_{t,o}\right) / l_{t,o} = \overbrace{l_{t,o}^* / l_{t,o}}^{=D_u / D_u^*} - 1,\quad \boxed{a_o = D_u / D_u^* - 1}$$

Poměrné „prodloužení" po útku… ε_u

$$\varepsilon_u = \left(l_{t,u}^* - l_{t,u}\right) / l_{t,u} = \overbrace{l_{t,u}^* / l_{t,u}}^{=D_o / D_o^*} - 1,\quad \boxed{\varepsilon_u = D_o / D_o^* - 1} \quad (\ \varepsilon_u < 0\ )$$

Poměr příčné kontrakce…

$$\eta_o = -\varepsilon_u / a_o = -\left(D_o / D_o^* - 1\right) / \left(D_u / D_u^* - 1\right),\quad \boxed{\eta_o = \frac{1 - D_o / D_o^*}{D_u / D_u^* - 1}}$$

Pozn.: Pro <u>napínání tkaniny po útku</u> platí analogicky všechny předchozí závěry a rovnice, a to po záměně indexů ‛o’ a ‛u’.

2. <u>„DEFORMOVATELNÉ“ NITĚ</u> (zobecnění modelu)

Předpoklad 1: Tkanina – <u>plátno</u> – napjatá po osnově a/nebo po útku zachovává <u>geometrii Peirceova modelu</u>.

Předpoklad 2: Nitě v <u>nejvíce napjaté tkanině</u> jsou

a) <u>dokonale ohebné</u> a

b) <u>roztažné</u>; v napínaném směru se nit prodlouží do úrovně své tažnosti, nit v příčném směru se obecně může též prodloužit,

c) <u>příčně deformovatelné</u>; efektivní průřez nitě je kruh o jiném (menším) průměru, než byl výchozí.

Napínání tkaniny po osnově

Skutečnost: Postupným napínáním se délky nití (zejm. osnovních) prodlužují, efektivní průměry se zmenšují, výšky vazných vln se mění.

Modelové řešení – ve dvou krocích:

1. **Hypotetický mezistav** struktury:
   a) délky nití se prodlouží na konečnou hodnotu (těsně před přetržením), osnovní nitě využijí plnou hodnotu své tažnosti,
   b) efektivní průměry nití se zmenší na konečnou hodnotu (těsně před přetržením),
   c) avšak (relativní) výšky vazných vln zůstávají shodné s výchozí tkaninou.
2. **Napnutá tkanina** – vznikne z hypotetického mezistavu; délky a průměry se již nemění, mění se jen výšky vln.

<u>HYPOTETICKÝ MEZISTAV</u> (při napínání po osnově)

Výchozí tkanina je popsána parametry D_o, D_u, d_o, d_u, λ_o a $\lambda_u = 1-\lambda_o$. Známým způsobem se pro výchozí tkaninu vypočtou úhly β_o, β_u, relativní délky půlvln ρ_o, ρ_u a (absolutní) délky půlvln l_o, l_u.

Veličiny mezistavu (značení ‛ ˜ ’ nad symbolem)*:*

λ_o, $\lambda_u = 1-\lambda_o$ ... <u>původní hodnoty</u> ponecháme beze změny

$d_o + d_u \to \tilde{d}_o + \tilde{d}_u$ ... <u>součet efektivních průměrů</u> nití se obvykle zmenší v důsledku radiálního stlačování přízí při napínání tkaniny. Často

$$\boxed{\tilde{d}_o + \tilde{d}_u = k_d\left(d_o + d_u\right)}$$

kde k_d je vhodný **parametr**, stanovený empiricky.)

$l_o \to \tilde{l}_o$...<u>délka půlvlny osnovní nitě</u> se zvětší protažením při napínání osnovy. Je-li **tažnost osnovní nitě** ξ_o, obvykle volíme $\boxed{\tilde{l}_o = l_o(1+\xi_o)}$

$\rho_o \to \tilde{\rho}_o$... <u>relativní délka půlvlny osnovní nitě</u>. Protože definičně $\rho_o = 2l_o/(d_o + d_u)$, nyní je $\tilde{\rho}_o = 2\tilde{l}_o/(\tilde{d}_o + \tilde{d}_u)$; obvykle

$$\tilde{\rho}_o = 2\overbrace{\tilde{l}_o}^{=l_o(1+\xi_o)} \Big/ \overbrace{(\tilde{d}_o + \tilde{d}_u)}^{=k_d(d_o+d_u)} = \overbrace{2l_o/(d_o+d_u)}^{=\rho_o}\frac{1+\xi_o}{k_d}, \quad \boxed{\tilde{\rho}_o = \rho_o\frac{1+\xi_o}{k_d}}$$

$l_u \to \tilde{l}_u$...<u>délka půlvlny útkové nitě</u> se může případně poněkud zvětšit protažením při napínání osnovy. Potom $\boxed{\tilde{l}_u = l_u k_{lu}}$, kde k_{lu} je **parametr** stanovený obvykle emipric-ky. (Často tato změna délky nemusí být uvažována, takže pak $k_{lu} \doteq 1$ a $\tilde{l}_u = l_u$.)

TKANINY 3

$\rho_u \to \tilde{\rho}_u$ ... relativní délka půlvlny útkové nitě. Protože definičně $\rho_u = 2l_u/(d_o + d_u)$, nyní je $\tilde{\rho}_u = 2\tilde{l}_u/(\tilde{d}_o + \tilde{d}_u)$; obvykle

$$\tilde{\rho}_u = 2\underbrace{\tilde{l}_u}_{=l_u k_{lu}} \Big/ \underbrace{\left(\tilde{d}_o + \tilde{d}_u\right)}_{=k_d(d_o+d_u)} = \underbrace{2l_u/(d_o + d_u)}_{=\rho_u} \frac{k_{lu}}{k_d}, \qquad \boxed{\tilde{\rho}_u = \rho_u \frac{k_{lu}}{k_d}}$$

$\beta_o, \beta_u \to \tilde{\beta}_o, \tilde{\beta}_u$ ...tyto úhly pro hypotetický mezistav nalezneme numerickým vyhledáním kořenů známých rovnic

$$\tilde{\rho}_o = \operatorname{arctg}\left[\left(1 - \operatorname{tg}\tilde{\beta}_o \sqrt{\frac{\lambda_u^2}{\sin^2\tilde{\beta}_o} - 1}\right) \Big/ \left(\sqrt{\frac{\lambda_u^2}{\sin^2\tilde{\beta}_o} - 1} + \operatorname{tg}\tilde{\beta}_o\right)\right] + \sqrt{\frac{\lambda_u^2}{\sin^2\tilde{\beta}_o} - 1}$$

$$\tilde{\rho}_u = \operatorname{arctg}\left[\left(1 - \operatorname{tg}\tilde{\beta}_u \sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2\tilde{\beta}_u} - 1}\right) \Big/ \left(\sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2\tilde{\beta}_u} - 1} + \operatorname{tg}\tilde{\beta}_u\right)\right] + \sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2\tilde{\beta}_u} - 1}$$

$D_\mathrm{o}, D_\mathrm{u} \rightarrow \tilde{D}_\mathrm{o}, \tilde{D}_\mathrm{u}$ ... dostavy osnovy a útku určíme ze vztahů

$$\mathrm{tg}\,\tilde{\beta}_\mathrm{u} = \tilde{D}_\mathrm{o}\lambda_\mathrm{o}\left(\tilde{d}_\mathrm{o} + \tilde{d}_\mathrm{u}\right), \qquad \mathrm{tg}\,\tilde{\beta}_\mathrm{o} = \tilde{D}_\mathrm{u}\lambda_\mathrm{u}\left(\tilde{d}_\mathrm{o} + \tilde{d}_\mathrm{u}\right),$$

$$\boxed{\tilde{D}_\mathrm{o} = \frac{\mathrm{tg}\,\tilde{\beta}_\mathrm{u}}{\lambda_\mathrm{o}\left(\tilde{d}_\mathrm{o} + \tilde{d}_\mathrm{u}\right)}} \qquad \boxed{\tilde{D}_\mathrm{u} = \frac{\mathrm{tg}\,\tilde{\beta}_\mathrm{o}}{\lambda_\mathrm{u}\left(\tilde{d}_\mathrm{o} + \tilde{d}_\mathrm{u}\right)}}$$

Takto jsme vyjádřili parametry $\tilde{d}_\mathrm{o} + \tilde{d}_\mathrm{u}, \tilde{\rho}_\mathrm{o}, \tilde{\rho}_\mathrm{u}, \tilde{\beta}_\mathrm{o}, \tilde{\beta}_\mathrm{u}, \tilde{D}_\mathrm{o}, \tilde{D}_\mathrm{u}$ hypotetického mezistavu tkaniny. (Jen λ_o, λ_u zůstaly shodné s výchozím stavem tkaniny.) Pro výpočet bylo nutné znát empirické parametry k_d a $k_{l\mathrm{u}}$ a tažnost osnovní nitě ξ_o. (Pro výpočet napínání tkaniny ve směru útku je ovšem ještě nutné znát analogický parametr $k_{l\mathrm{o}}$ a tažnost útkové nitě ξ_u.)

NAPNUTÁ TKANINA

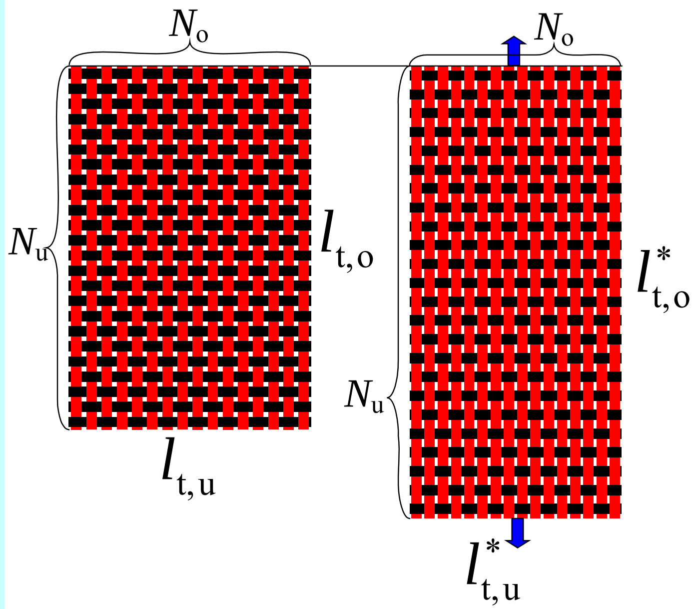
Z hypotetického mezistavu je tkanina napínána při zachování délek a (kruhových efektivních) průřezů nití, tedy za podmínek modelu, který byl již řešen. Proto je třeba užít dříve odvozený model s tím rozdílem, že na místě veličin výchozí tkaniny užijeme veličiny hypotetického mezistavu (”).

Pozn.: Ve vzorcích pro výpočet tažnosti tkaniny a její příčné kontrakce musí být použity dostavy **výchozí** tkaniny, nikoliv dostavy hypotetického mezistavu. Rozměrové změny totiž hodnotíme vůči výchozímu stavu.

Pozn.: Pro napínání tkaniny po útku platí analogicky všechny předchozí závěry a rovnice, a to po záměně indexů ‘o’ a ‘u’.

TKANINY 3

Pevnost tkaniny (po osnově)



Uvažujme vzorek výchozí tkaniny napínaný po osnově.

Šířka vzorku... $l_{t,u}$ (obv. 0,05m)

Dostava osnovy... D_o

Počet osnovních nití ve vzorku

$$N_o = D_o l_{t,u}$$

Pevnost tkaniny po osnově...F_o

Pevnost na jednu nit po osnově

$$F_{o,1} = F_o \Big/ \overbrace{N_o}^{=D_o l_{t,u}} = F_o \big/ D_o l_{t,u},$$ a odtud $$\boxed{F_o = F_{o,1} D_o l_{t,u}}$$

Pevnost nitě (výchozí volná nit) osnovní... P_o

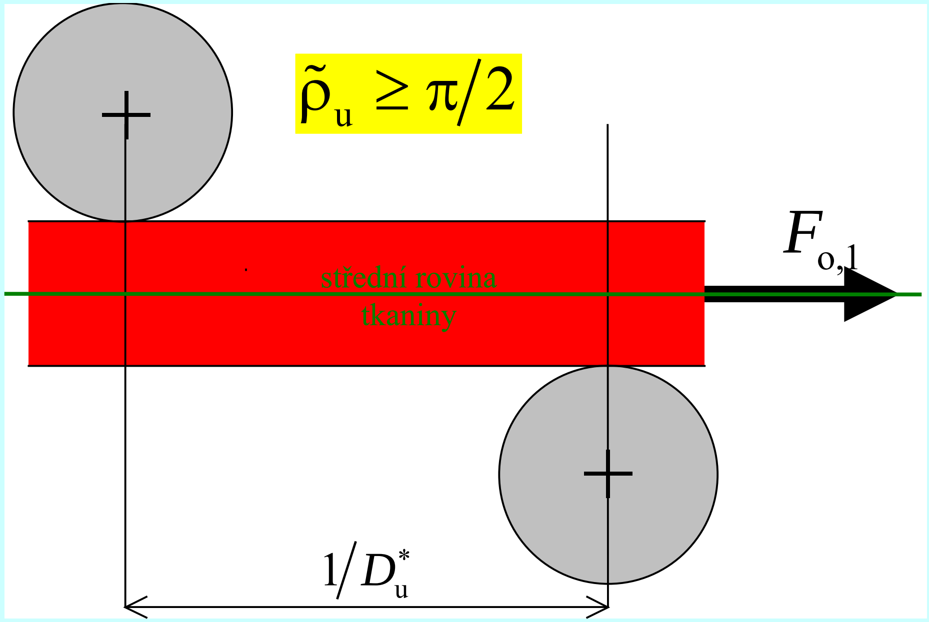
Pozn.: Pro pevnost tkaniny po útku se analogicky užijí symboly se zaměněnými indexy 'o' a 'u'.

TKANINY 3

1. Relativní délka půlvlny útkové nitě v hypotetickém mezistavu $\tilde{\rho}_u \geq \pi/2$

⇒ Osnova se zcela narovná!

⇒ Pevnost na jednu nit po osnově je rovna pevnosti nitě (výchozí, volné)



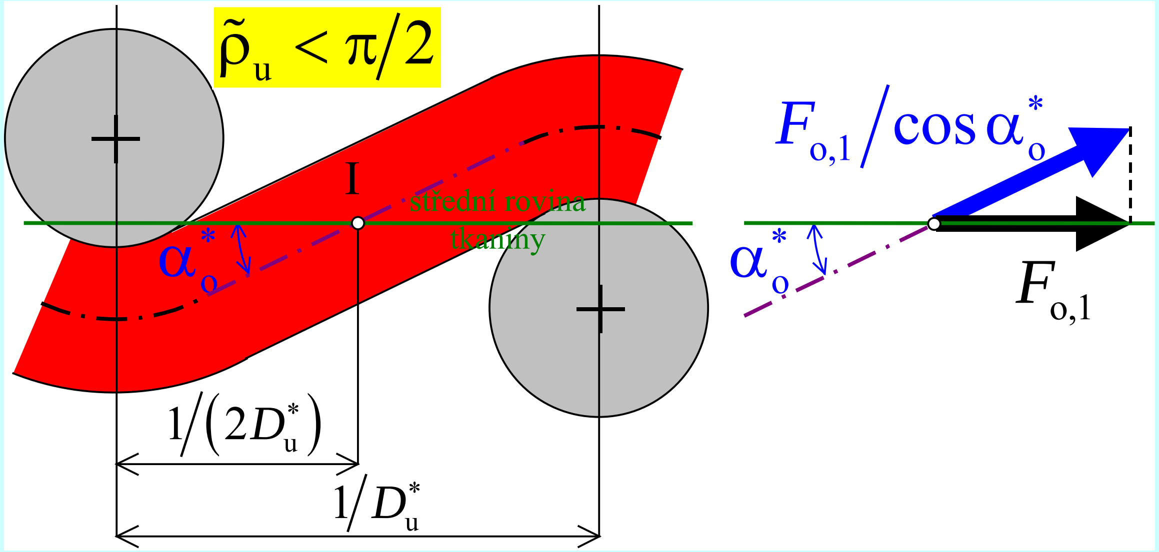
$$F_{o,1} = P_o$$

Pozn.: Hodnotu pevnosti výchozí volné nitě si prozatím představme jako průměrnou pevnost nitě (příze) změřenou obvyklým postupem trhání jednotlivých nití. Ve skutečnosti je problém složitější, jak uvedeme později.

2. Relativní délka půlvlny útkové nitě v hypotetickém mezistavu

$\tilde{\rho}_u \leq \pi/2$

$\Rightarrow$ **Osnova se nenarovná!**



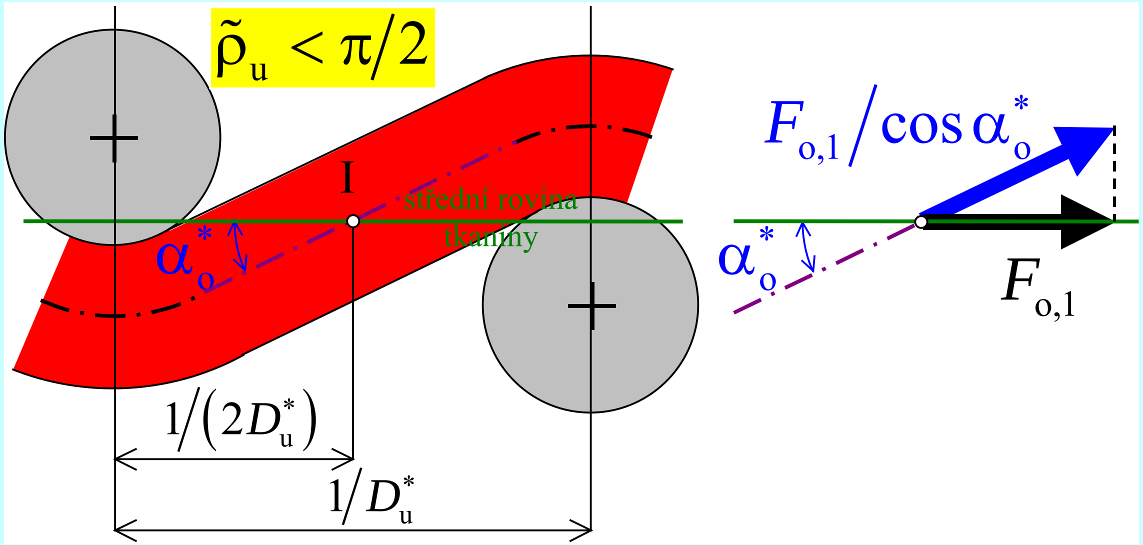
Osnova v hypotetickém mezistavu svírá se střední rovinou tkaniny (v okolí „inflexního" bodu) úhel α_o^*.

Pro podobný úhel α_u v opačné soustavě jsme v obecné geometrii Peirceova modelu již dříve nalezli vztah

$$\operatorname{tg}\alpha_u = \left[1 - \operatorname{tg}\beta_u \sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2\beta_u} - 1}\right] \Bigg/ \left[\sqrt{\frac{\lambda_o^2}{\sin^2\beta_u} - 1} + \operatorname{tg}\beta_u\right]$$

TKANINY 3

Záměnou indexů 'o' a 'u' a užitím úhlů platných pro napjatou tkaninu nalezneme z předchozí rovnice vyjádření

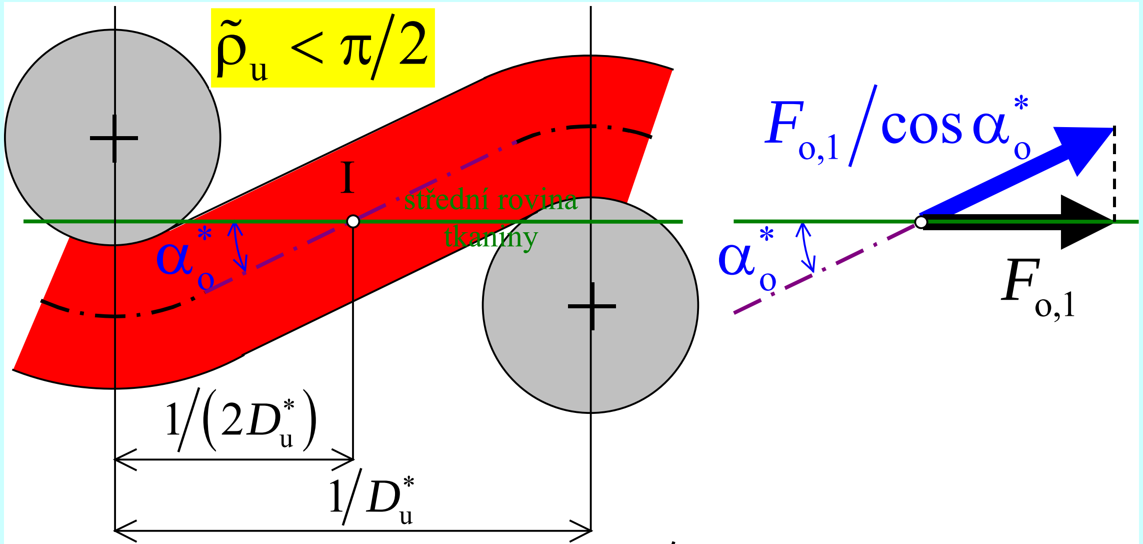


$$\operatorname{tg}\alpha_o^* = \left[1 - \operatorname{tg}\beta_o^* \sqrt{\frac{\lambda_u^{*2}}{\sin^2\beta_o^*} - 1}\right] \Bigg/ \left[\sqrt{\frac{\lambda_u^{*2}}{\sin^2\beta_o^*} - 1} + \operatorname{tg}\beta_o^*\right]$$

Poslední rovnice určuje úhel α_o^* .

TKANINY 3

Připadá-li na jednu osnovní nit ve tkanině tahová síla $F_{o,1}$, pak osová síla v osnovní niti je $F_{o,1}/\cos\alpha_o^*$.



V okamžiku přetrhu je tato síla rovna pevnosti nitě P_o ; $F_{o,1}/\cos\alpha_o^* = P_o$.

Odtud pevnost na jednu nit po osnově je rovna výrazu

$$F_{o,1} = P_o \cos\alpha_o^*$$

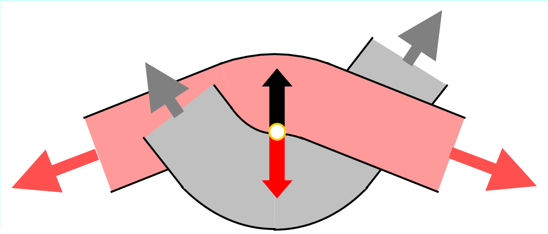
Pozn.: Záměnou indexů ‛o’ a ‛u’ lze využít předchozí postupy též pro výpočet pevnosti na jednu nit po útku.

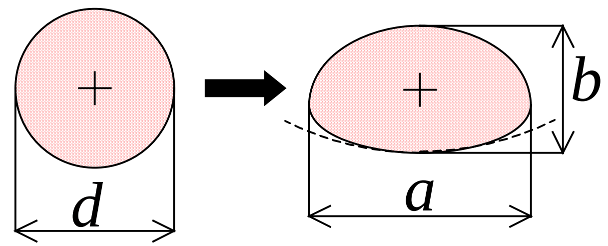
Poznámky k určení pevnosti volné nitě P_o.

a) Protože ve tkanině se současně namáhá celý svazek nití, je správnější užít pro hodnotu P_o sílu v jedné niti při přetržení svazku, tj. průměrnou pevnost nitě násobenou využitím pevnosti svazku η_P (viz poznámky v části „Tahové namáhání svazku“.)

b) Protože upínací délka tkaniny (20 cm) je obvykle jiná než upínací délka při zkoušení pevnosti nití (50 cm), je vhodné korigovat naměřenou průměrnou pevnost nití na tuto jinou upínací délku. (Nejjednodušeji existuje stochastický model této korekce, známý jako Peirceův model; v tomto kurzu přednášek není uveden.)

DEFORMACE NITĚ VE TKANINĚ

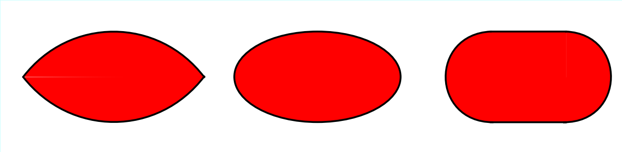




V tkacím procesu vznikají tahové (i jiné) síly v nitích ⇒ ve vazných bodech se nitě vzájemně stlačují a jejich průřez se deformuje. Zvedli jsme označení **šířka** a a **výška** b nitě, a ve vztahu k výchozímu („volnému") průměru příze d také pojmy **rozšíření** α a **stlačení** β nitě

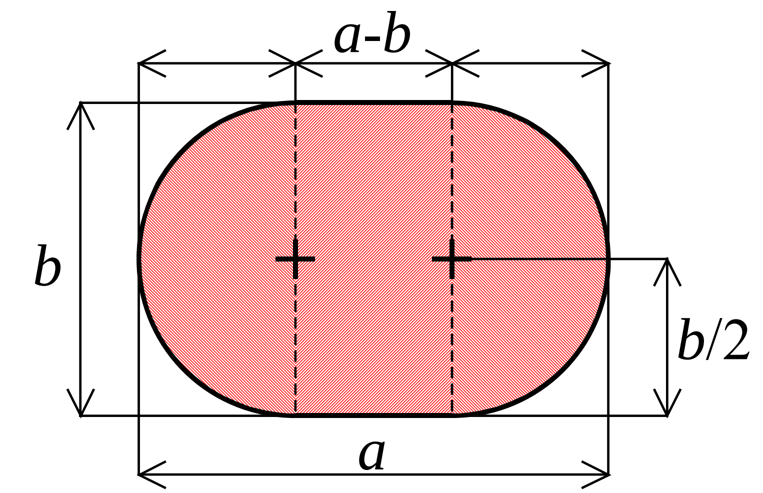
$$\alpha = a/d \qquad \beta = b/d$$

Protože mechanický výpočet skutečného tvaru průřezu nitě je mimořádně obtížný, většina modelů užívá apriorní tvary průřezů. Bývají to nejčastěji „čočka", elipsa a „atletická dráha" (Kemp)



Kempovy průřezy „atletické dráhy“

Kempův průřez nitě je tvořen dvěma půlkruhy o poloměru $b/2$ a obdélníkem o rozměrech b a $(a\text{-}b)$.



Plocha průřezu… A

$$A = \pi\Big(\overbrace{b/2}^{\text{poloměr}}\Big)^2 + b(a-b) =$$

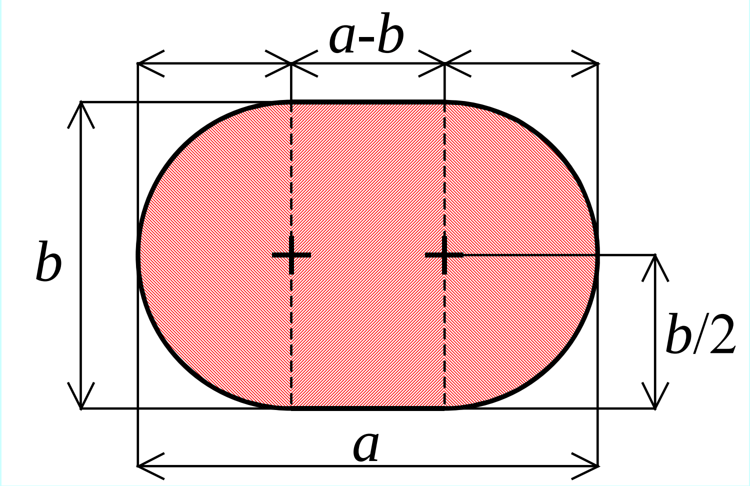
$$= \frac{\pi}{4}b^2 + ba - b^2 = ba - b^2(1-\pi/4) = d^2\left[\overbrace{\left(\frac{b}{d}\right)}^{=\beta}\overbrace{\left(\frac{a}{d}\right)}^{=\alpha} - \overbrace{\left(\frac{b}{d}\right)^2}^{=\beta^2}(1-\pi/4)\right],$$

$$\boxed{A = d^2\left[\beta\alpha - \beta^2(1-\pi/4)\right]}$$

Obvod… P

$$P = 2\pi \overbrace{b/2}^{\text{poloměr}} + 2(a-b) = \pi b + 2a - 2b = d\left[\overbrace{\left(\frac{b}{d}\right)}^{=\beta}(\pi-2) + 2\overbrace{\left(\frac{a}{d}\right)}^{=\alpha}\right],$$

$$\boxed{P = d\left[\beta(\pi-2) + 2\alpha\right]}$$



1. HRANIČNÍ HYPOTÉZA:

Předpoklad: Plocha průřezu výchozí nitě se zploštěním ve tkanině nezmění.

Plocha průřezu výchozí („volné“) nitě je $\pi d^2/4$, takže platí

$$\pi d^2/4 = \overbrace{A}^{=d^2\left[\beta\alpha-\beta^2(1-\pi/4)\right]}, \quad \pi d^2/4 = d^2\left[\beta\alpha - \beta^2(1-\pi/4)\right],$$

$$\pi/4 = \beta\alpha - \beta^2(1-\pi/4), \quad \boxed{(1-\pi/4)\beta^2 - \alpha\beta + \pi/4 = 0,}$$ …kvadratická rov.

$$\overbrace{(1-\pi/4)}^{"a"}\beta^2 \overbrace{-\alpha}^{"b"}\beta \overbrace{+\pi/4}^{"c"}=0,$$

Diskriminant: $\alpha^2-4(1-\pi/4)\pi/4=\alpha^2-(1-\pi/4)\pi\ >1$

$$\beta=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-(1-\pi/4)\pi}}{2(1-\pi/4)}=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-1+\overbrace{1-\pi+(\pi/2)^2}^{=(\pi/2-1)^2}}}{2-\pi/2}=$$

$$=\frac{\alpha\pm\sqrt{(\alpha^2-1)+(\pi/2-1)^2}}{2-\pi/2}$$. Fyzikální smysl má znaménko „-“

takže platí

$$\boxed{\beta=\frac{\alpha-\sqrt{(\alpha^2-1)+(\pi/2-1)^2}}{2-\pi/2}}$$

2. HRANIČNÍ HYPOTÉZA:

Předpoklad: <u>Obvod průřezu výchozí nitě se zploštěním ve tkanině nezmění.</u>

Obvod průřezu výchozí („volné“) nitě je πd, takže platí

$$\pi d = \overbrace{P}^{=d[\beta(\pi-2)+2\alpha]}, \quad \pi d = d\left[\beta(\pi-2)+2\alpha\right], \quad \pi = \beta(\pi-2)+2\alpha,$$

$$\beta(\pi-2) = \pi - 2\alpha, \qquad \boxed{\beta = \frac{\pi-2\alpha}{\pi-2}}$$

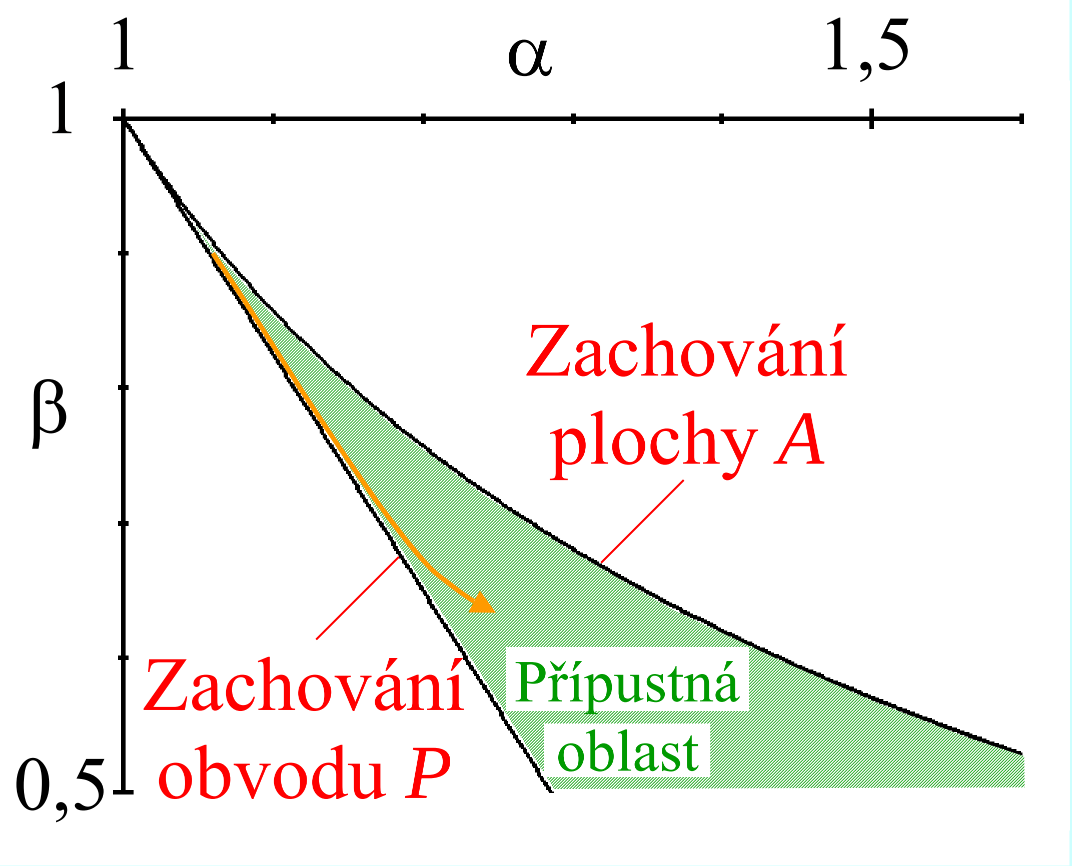
3. SKUTEČNÉ RELACE MEZI α A β

Kdyby povrchová vlákna tvořila jakési „obruče“, zůstal by obvod zachován. Ve skutečnosti se tyto „obruče“ působením sil trochu „roztáhnou“ – <u>obvod se zvětší</u>. Deformací průřezu se vlákna trochu více přitlačí – <u>zaplnění se zvětší</u>.

$\Rightarrow$ Realita leží <u>mezi zavedenými hraničními hypotézami</u>.

TKANINY 3

Nalezené křivky ilustruje graf:



Poznámky:

1) V okolí bodu $\alpha = \beta = 1$ mají křivky stejný sklon.

2) Empiricky je pozorováno, že při méně deformovaných nitech odpovídá relace hodnot α, β spíše hypotéze zachování obvodu, při větších deformacích se od tohoto předpokladu více či méně odklání - viz oranžová šipka v grafu. (Jiné relace však vykazuje nezakroucené hedvábí.)

3) <u>Výpočet geometrických parametrů tkaniny</u> je podobný, jako u Peirceova modelu, jak naznačuje schéma. Nutno ovšem znát hodnoty α, β pro osnovu i útek. (Místo d_o, d_u se užije b_o, b_u.)