

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Prof. RNDr. Ing. Miloslav Košek, CSc.
Ing. Tomáš Mikolanda

CVIČENÍ Z TEORIE ELEKTRICKÝCH OBVODŮ



Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

Katedra elektrotechniky

2005

Lektor: Doc. Ing. Jana Tučková, CSc.
Katedra teorie obvodů, FEL, ČVUT

© Prof. RNDr. Ing. Miloslav Košek, CSc.
© Ing. Tomáš Mikolanda

ISBN xx-xxxx-xxx-x

Obsah

| | |
|---|---|
| Předmluva | v |
| Cvičení z teorie elektrických obvodů | 1 |
| 1 | Matematické základy teorie obvodů 1 |
| 1.1 | Typy čísel 1 |
| 1.2 | Symboly a výrazy 2 |
| 1.3 | Operace nad celými čísly 2 |
| 1.4 | Operace nad reálnými čísly 2 |
| 1.5 | Semilogaritmický tvar 4 |
| 1.6 | Jednotky 6 |
| 1.7 | Jednoduché, ale málo známé definice 7 |
| 2 | Komplexní čísla 7 |
| 2.1 | Radiány a stupně 7 |
| 2.2 | Tvary komplexního čísla 8 |
| 2.3 | Základní matematické operace s komplexními čísly 13 |
| 3 | Goniometrické funkce 14 |
| 3.1 | Goniometrické funkce se součtem a rozdílem argumentů 14 |
| 3.2 | Součin goniometrických funkcí 15 |
| 3.3 | Goniometrické funkce dvojnásobku argumentu 16 |
| 3.4 | Goniometrické komplexní funkce 19 |
| 4 | Elementární komplexní funkce 20 |
| 5 | Stejnoseměrný proud 25 |
| 6 | Harmonický signál 28 |
| 7 | Základní prvky 35 |
| 8 | Harmonické střídavé proudy – jednoduché obvody 39 |
| 9 | Jednoduché náhradní obvody 52 |
| 10 | Srážecí kondenzátor – řešení jednoduchého technického problému 61 |
| 11 | Lineární zdroj 65 |
| 12 | Trojfázové obvody 70 |
| 13 | Dvoubřany 81 |
| 14 | Přechodový jev – analytické a grafické řešení 92 |
| 15 | Nelineární prvky 103 |
| Praktické úlohy | 105 |
| 16 | Základy elektrických měření 106 |
| 16.1 | Cíl cvičení a jeho zabezpečení 106 |
| 16.2 | Popis přístrojů a zařízení, zásady pro jejich užívání 106 |
| 16.3 | Měření 110 |
| 16.4 | Zpracování výsledků měření 117 |
| 16.5 | Diskuse 118 |

| | | |
|------|---|-----|
| 16.6 | Závěr | 120 |
| 17 | Měření charakteristik | 120 |
| 17.1 | Cíl cvičení a jeho zabezpečení | 121 |
| 17.2 | Popis přístrojů a zařízení, zásady pro jejich užívání | 122 |
| 17.3 | Měření | 124 |
| 17.4 | Zpracování výsledků měření | 133 |
| 17.5 | Diskuse | 137 |
| 17.6 | Závěr | 140 |
| 18 | Měření parametrů obvodových prvků | 140 |
| 18.1 | Cíl cvičení a jeho zabezpečení | 142 |
| 18.2 | Popis nových přístrojů | 143 |
| 18.3 | Měření | 143 |
| 18.4 | Diskuse | 149 |
| 18.5 | Závěr | 154 |
| 19 | Trojfázová soustava | 155 |
| 19.1 | Úvod | 155 |
| 19.2 | Teorie | 156 |
| 19.3 | Cíl cvičení a jeho zabezpečení | 161 |
| 19.4 | Popis nových přístrojů | 161 |
| 19.5 | Pokyny k měření | 162 |
| 19.6 | Zpracování dat | 169 |
| 19.7 | Diskuse | 173 |
| 19.8 | Závěr | 176 |

Literatura**177**

Předmluva

Předmět teorie obvodů je neodmyslitelnou součástí studia na elektrotechnických fakultách, poněvadž podává základy, na nichž mohou stavět mnohé další aplikační a specializované předměty. Jedná se o předmět obecný, exaktní a do značné míry abstraktní, důsledně používá standardní matematický aparát. Právě logičnost a abstraktnost jsou příčinou toho, že je považován za obtížný.

Na fakultě mechatroniky Technické univerzity v Liberci je tento předmět zařazen do druhého semestru bakalářského studia, což představuje určité problémy. Především bakalářské studium otevřelo přístup k vysokoškolskému vzdělání daleko širší třídě studentů, kteří však přicházejí ze středních škol s velmi rozdílnými znalostmi. Na druhé straně se předpokládá, že část absolventů bakalářského studia bude pokračovat v magisterském studiu, kde však žádný podobný předmět neexistuje. Na předmět jsou tedy kladeny dva protichůdné požadavky: učinit výuku dostatečně jednoduchou a srozumitelnou, aby předmět absolvovala většina studentů bakalářského studia, a současně zajistit dostatečnou odbornou úroveň, aby získané znalosti umožnily úspěšné studium v navazujícím magisterském studiu.

Splnění všech požadavků není jednoduché, zvláště z toho důvodu, že mnozí studenti mají problémy s matematikou, což současně znamená, že je u nich málo rozvinuté logické a abstraktní myšlení, které je pro pochopení teorie obvodů nezbytné. Poněvadž předmět teorie obvodů je na fakultě mechatroniky zaměřen spíše prakticky, považujeme za důležitou část výuky seminární a laboratorní cvičení. K zajištění efektivní výuky na cvičeních by proto mělo dopomoci i toto skriptum.

Praktické zaměření předmětu se projevilo i tím, že v současné době vedle deseti bloků seminárních cvičení existují čtyři bloky laboratorních cvičení. Perspektivně, po zajištění kvalitního vybavení laboratoře, by se počet měřicích bloků mohl zvýšit na pět. Ukazuje se totiž, že absolventi mnohých středních škol se se základním elektrickým měřením nesetkali buď vůbec, nebo jen sporadicky. Skriptum se proto skládá ze dvou přibližně stejně velkých a rovnocenných částí, početní a praktické.

Obsah skriptu vychází z několikaletých zkušeností autorů při výuce tohoto předmětu v magisterském a nyní bakalářském studiu. Početní část začíná opakováním středoškolské matematiky se zaměřením především na komplexní čísla a funkce. Pak následuje vlastní látka teorie obvodů, a to obvody stejnosměrného proudu, základní parametry signálu, obvody buzené harmonickým napětím, náhradní obvody reálných prvků, trojfázové obvody, střídavé proudy (Fourierova řada), přechodné jevy a nelineární obvody.

Výklad látky a odvození nepředpokládají rozsáhlejší samostatné matematické úpravy ze strany studentů. Řeší se však i složité příklady pro zvláště nadané studenty. Studenti bez rozdílu úrovně znalostí jsou vedeni k tvůrčí aktivitě, zejména k tomu, aby ze zadání příkladu zjistili maximum informací a pravdivost či věrohodnost získaného výsledku ověřili jiným nezávislým výpočtem. Autoři kladou důraz na pochopení fyzikálního a praktického významu výsledků. Praktické zaměření výuky se projevuje též v zařazení příkladů s grafickým řešením a v úplném návrhu jednoduchého prakticky využitelného obvodu. Pro samostatnou práci studentů budou též k dispozici neřešené příklady vystavené na

webových stránkách katedry elektrotechniky.

Součástí výuky jsou i dva testy, jejichž hlavním úkolem je ověřit, do jaké hloubky studenti teorii obvodů pochopili. Obsahují jednoduché otázky či příklady, jejichž správné zodpovězení však pro nepřipraveného studenta není jednoduché. Obsah testů se pravidelně mění (testy nejsou zveřejňovány).

Laboratorní cvičení obsahuje čtyři monotematicky zaměřené úlohy, které spočívají v řadě jednoduchých volně navazujících měření. V laboratoři je 10 stejných pracovišť, které umožňují měření po dvojicích i individuálně. První úloha je zaměřena na základy měření a je určena především pro ty studenty, kteří s elektrickým měřením vůbec nepřišli do styku. Ostatní studenti mají v tomto cvičení možnost ověřit si experimentální zručnost a získané návyky. V následující úloze měří charakteristiky pasivních a aktivních, lineárních a nelineárních prvků. Další úloha se soustředila na určení parametrů pasivních prvků s důrazem na vlastní a vzájemnou indukčnost. Poslední úloha je zaměřena na detailní studium odporové symetrické a nesymetrické trojfázové zátěže.

V laboratorním cvičení jsou studenti důsledně vedeni k vědecké experimentální práci, což se projevuje v přípravě na cvičení, vlastním měření, ale zejména požadavky na referát. Ten musí kromě naměřených dat obsahovat i jejich zpracování a vyhodnocení, čímž se nerozumí jen grafická podoba, ale i další grafické operace, např. určení směrnice u lineární závislosti, grafická derivace, nebo ověření výpočtem. Dále je nezbytnou součástí referátu diskuse a závěr. Požadavky na referát, který by měl obsahovat všechny náležitosti vědecké experimentální publikace, respektují též současný trend, kdy se informace předává téměř výhradně písemně. Poměrně rozsáhlé návody mají k tomuto cíli sloužit.

Návody k úlohám mají jednotnou strukturu. Po úvodní části, která se zaměřuje na význam úlohy a stručný popis měřících metod, následuje administrativní část, obsahující výčet měření a jejich materiální zajištění. V teoretické části jsou uvedeny nezbytné informace pro pochopení měření, ale zejména pro zpracování získaných dat. Pak jsou poměrně podrobně popsány používané přístroje (tato část je určena především pro studenty s minimálními experimentálními zkušenostmi). Následuje doporučený postup při měření včetně schématu. Další části mají rozvíjet tvůrčí schopnosti studentů: nejdříve jsou pokyny pro zpracování dat, které volně navazují na teoretickou část, pak následují náměty pro neformální diskusi výsledků a doporučené body do závěru.

Při přípravě seminárních cvičení byly numerické výsledky a grafické závislosti získány pomocí systému MATLAB. Stejně tak pro náročnější zpracování experimentálních dat byly připraveny jednoduché skripty. Autoři považují MATLAB za velmi efektivní nástroj umožňující snadné řešení všech praktických úloh z teorie obvodů. Jeho předností je zejména snadná práce s maticemi a kvalitní grafika. Proto je i několikrát zmíněn ve skriptu. Perspektivně se předpokládá praktické využití MATLABu ve výuce teorie obvodů, poté co bude k dispozici počítačová učebna. Prozatím budou vybrané skripty postupně zveřejňovány na webových stránkách katedry elektrotechniky.

Skriptum je první pokus autorů o přípravu užitečné učební pomůcky pro studenty bakalářského studia. Autoři jsou si vědomi, že je zde řada nedostatků a budou vděční za každé upozornění, návrh či námět, které povedou k jejich odstranění. Autoři na tomto místě vyslovují poděkování svým spolupracovníkům, kteří s přípravou skriptu pomáhali. Lektorce děkují za velmi pečlivé pročtení rukopisu, upozornění na různé nedostatky, opravy mnoha chyb, cenné rady, doporučení a připomínky, které pomohly zvýšit kvalitu této publikace.

1 Matematické základy teorie obvodů

Toto cvičení si klade možná přemrštěný, možná jednoduchý, cíl – dosáhnout toho, aby všichni studenti znali základy matematiky (a fyziky) nutné pro pochopení a používání základního matematického aparátu teorie obvodů. Vychází z toho, že na různých středních školách se matematika (a fyzika) vyučuje v různém rozsahu.

1.1 Typy čísel

V matematice se historickým vývojem dospělo k těmto typům čísel:

1. Přirozená, což jsou čísla 1, 2, 3, ... Tato množina se označuje symbolem N (Natural).
2. Celá, která vznikla z požadavku, aby vždy existoval rozdíl přirozených čísel. K označení této množiny se používá znak I (Integer).
3. Racionální, která zajistí, že vždy existuje podíl celých čísel. Matematicky se popisují nejčastěji ve formě zlomků, prakticky však ve formě čísla s desetinnou částí. Část za desetinnou čárkou nazýváme desetinný rozvoj. Desetinný rozvoj je
 - (a) ukončený, např. při dělení 2 či 5, což je výjimka,
 - (b) neukončený periodický, tzn. že určitá kombinace číslic se neustále opakuje.
4. Iracionální, která se vytvořila proto, aby např. rovnice

$$x^2 = 2$$

měla řešení. Tato čísla mají desetinný rozvoj neukončený, neperiodický.

5. Reálná, což je spojení racionálních a iracionálních čísel. Množina reálných čísel se značí R (Real).
6. Ryze imaginární, která zajistí, že např. rovnice

$$x^2 = -1$$

má řešení.

7. Komplexní, jejichž množina se značí symbolem C (Complex), která se skládají ze dvou částí
 - (a) reálná část, což je reálné číslo,
 - (b) imaginární část, což je ryze imaginární číslo.

Komplexní čísla umožňují prakticky všechny operace, např. funkce sinus může nabývat libovolné hodnoty, platí např. $\sin(x) = 5$, existuje logaritmus záporného čísla, apod. Podrobněji se komplexními čísly budeme zabývat dále. Zde jenom zdůrazníme, že komplexní čísla jsou tvořena třemi typy.

- (a) Reálná čísla – imaginární část je nulová.
- (b) Ryze imaginární čísla – reálná část je nulová.
- (c) Imaginární čísla – imaginární část je nenulová.

1.2 Symboly a výrazy

V matematice obvykle nepracujeme s čísly přímo, ale se symboly (proměnnými), které určitý typ čísla zastupují. Nad těmito symboly se provádějí povolené operace, sčítání (odečítání), násobení (dělení), umocňování. Tyto operace se zapisují ve formě výrazů, např. výraz

$$c = ab$$

znamená, že v proměnné c je součin čísel reprezentovaných symboly a a b . Obvykle jsou to reálná čísla. Do symbolů, proměnných, lze dosadit libovolné hodnoty z oboru těchto čísel. Případnou výjimku je nutno uvést. Např. ve všech výše popsaných oborech není možné dělit nulou. Proto je nutno pro obecný podíl psát toto:

$$z = \frac{x}{y} \quad y \neq 0 \quad (1.1)$$

Do proměnné y tedy můžeme dosadit jakoukoliv hodnotu kromě nuly.

1.3 Operace nad celými čísly

Nad celými čísly se provádějí operace součet a součin. Závádí se záporné číslo a rozdíl se definuje jako přičtení záporného čísla. Dělení není definováno. Zde by neměly být problémy ani při psaní výrazů.

Platí komutativní, asociativní a distribuční zákon. Připomeneme jen distribuční zákon, tj. vytýkání před závorku:

$$a^2 + ab = a \cdot a + a \cdot b = a \cdot (a + b) = a(a + b)$$

Pro dosažení rychlosti a jednoduchosti zápisu se symbol násobení, tečka, vynechává.

1.4 Operace nad reálnými čísly

Novou operací je podíl. Při ručních numerických výpočtech se pro operaci dělení používá symbol dvojtečka. Číslo před ní je *dělenec*, číslo za ní se nazývá *dělitel*. Daleko častěji, a při práci se symboly výlučně, se však podíl zapisuje ve tvaru zlomku. Symbol nad zlomkovou čarou je *čitatel*, pod zlomkovou čarou se nachází *jmenovatel*. Matematicky se zavádí reciproká, obrácená hodnota reálného čísla. Podíl je pak součin dělence a reciproké hodnoty dělitele. Poněvadž použití obecných výrazů je v tomto případě obtížnější, ale v teorii obvodů běžné, uvedeme několik příkladů.

Součet dvou jednoduchých zlomků se provede převodem na společného jmenovatele. Detailní postup v nejjednodušším případě je naznačen níže.

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{h} = 1 \cdot \frac{1}{g} + 1 \cdot \frac{1}{h} = \frac{h}{h} \cdot \frac{1}{g} + \frac{g}{g} \cdot \frac{1}{h} = \frac{h}{hg} + \frac{g}{hg} = \frac{1}{hg}(h + g) = \frac{g + h}{gh} \quad (1.2)$$

Společný jmenovatel je součin gh . První zlomek má ve jmenovateli proměnnou g , proto jej rozšíříme zlomkem $1 = \frac{h}{h}$. Podobně druhý zlomek rozšíříme číslem $1 = \frac{g}{g}$. Pak lze vytknout společný jmenovatel, přesněji výraz $\frac{1}{gh}$, a po formálních úpravách dostaneme výsledek v obvyklém tvaru. Pro jednoduchost jsme „zapomněli“ na podmínku $g \neq 0$, $h \neq 0$. Na ně budeme úmyslně zapomínat i nadále. V teorii obvodů jsou zpravidla splněny.

Poněkud složitější případ je tento

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} &= \frac{(a+b)}{(a+b)} \cdot \frac{1}{a} - \frac{a}{a} \cdot \frac{1}{a+b} = \frac{(a+b)}{a(a+b)} - \frac{a}{a(a+b)} = \\ &= \frac{(a+b) - a}{a(a+b)} = \frac{b}{a(a+b)} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Nyní již v rychlejším tempu.

$$\frac{c}{d} - \frac{p}{d+s} = \frac{c(d+s) - pd}{d(d+s)} = \frac{cd + cs - pd}{d(d+s)} \quad (1.4)$$

Přímým postupem je jmenovatel na pravé straně rovnice součinem obou jmenovatelů a výsledný čítec je kombinací (součtem nebo rozdílem) součinů dílčích čítec a jmenovatelů. V každém z těchto součinů čítele a jmenovatele z jiného zlomku je nutno dbát na správné pořadí, křížové násobení, viz střední část posledního výrazu (1.4).

Dále se často vyskytují složené zlomky. Ty postupně převádíme na zlomky jednoduché. U složeného zlomku existuje hlavní zlomková čára, proti ní se píše rovnítko. Nejjednodušší příklad

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad (1.5)$$

Postup by měl být jasný. Složený zlomek se převede na součin dvou zlomků, prvním z nich je zlomek v čitateli, druhý zůstává jako zjednodušený složený zlomek s jednotkou v čitateli. Ten se převede na převrácenou hodnotu zlomku ve jmenovateli, tj. jeho čítec a jmenovatel si „vymění místa“.

Jiný příklad

$$\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \quad (1.6)$$

Zde jsme využili výsledku příkladu (1.2). Tento výsledek je vhodné si zapamatovat, je to výsledný odpor dvou paralelně spojených odporů R_1 a R_2 . Podobný poněkud složitější příklad je tento:

$$\frac{\frac{1}{C_2}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{C_2} \cdot \frac{1}{\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}} = \frac{1}{C_2} \cdot \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad (1.7)$$

Jedná se o přenos napětí kapacitním děličem tvořeným kondenzátory o kapacitách C_1 a C_2 . Výstupní napětí se odebírá z kapacity C_2 .

Dalším problémem zůstává obecná mocnina. Z přednášek matematiky by si studenti měli pamatovat, že obecná mocnina je výraz (přesněji funkce) typu

$$y = x^a \quad x > 0 \quad a \in \mathbb{R} \quad (1.8)$$

Kladná reálná proměnná x se nazývá základ, obecné reálné číslo a je exponent. Uvedeme nejprve zvláštní případy pro speciální hodnoty exponentu.

1. Přirozený exponent – opakované násobení, např.

$$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.9)$$

2. Záporný exponent – opakované násobení ve jmenovateli, např.

$$x^{-3} = \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x \cdot x \cdot x} \quad x \neq 0 \quad (1.10)$$

Speciální případy

$$x^{-1} = \frac{1}{x} \quad \dots \quad x^0 = 1 \quad x \neq 0 \quad (1.11)$$

Záporná mocnina je jen jiný zápis převrácené hodnoty, nultá mocnina dává ve všech povolených případech hodnotu 1. Avšak výraz 0^0 není obvykle definován.

3. Exponent ve formě zlomku – odmocnina, speciální případy jsou např.

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} = \sqrt[2]{x} \quad x > 0 \quad (1.12)$$

$$x^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{x})^4 = \sqrt[3]{x^4} \quad x > 0 \quad (1.13)$$

$$x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{(\sqrt{x})^3} = \frac{1}{\sqrt{x^3}} \quad x > 0 \quad (1.14)$$

Poslední případ se často vyskytuje v elektrostatice.

4. Nyní již můžeme výraz s exponentem tvaru zlomku zobecnit. Všechny předchozí ukázky jsou speciálními případy s exponentem ve formě obecného zlomku

$$x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m} \quad x > 0 \quad (1.15)$$

Odmocnitel je ve jmenovateli, mocnitel v čitateli.

Pro výrazy s mocninami platí tato pravidla.

1. U součinu se exponenty sčítají, tj.

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad x > 0 \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (1.16)$$

2. U mocnění se exponenty násobí, tj.

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b} \quad x > 0 \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (1.17)$$

Tato pravidla je nejen nutno si dobře zapamatovat, ale je třeba je umět i bezchybně používat. Školské příklady jsou např. tyto

$$\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{3}{2} + \frac{2}{3}} = x^{\frac{13}{6}} = \sqrt[6]{x^{13}} \quad x > 0 \quad (1.18)$$

$$(\sqrt{x^3})^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}} = x \quad x > 0 \quad (1.19)$$

Podstatná část teorie obvodů je založena na aplikaci vztahu typu

$$e^{\omega t} \cdot e^{\varphi} = e^{\omega t + \varphi} \quad (1.20)$$

kde e je základ přirozených logaritmů.

1.5 Semilogaritmický tvar

Výsledek výpočtu či měření je vhodně zaokrouhlené reálné (racionální) číslo, které se zapisuje dvěma způsoby

1. desetinný tvar, např. 345,6

2. semilogaritmický tvar, např. 3,456 · 10⁴

Desetinný tvar je vhodný pro zápis hodnot blízkých jedné, např. 0,0789 nebo 345,6. Zápis příliš malých či příliš velkých čísel je sice možný, ale nepřehledný. S určitými potížemi např. pochopíme, že

- 0,000023 A je proud 23 μA , nebo
- 6800000 Ω znamená odpor 6,8 M Ω .

Semilogaritmický tvar se proto používá pro příliš velká nebo malá čísla. Skládá se ze dvou částí, *mantisy* a *exponentu*. Mantis je obvykle číslo od 1 do 10, přesněji v intervalu $< 1, 10$). Exponent pak znamená mocninu deseti, kterým musíme mantisu vynásobit, abychom dostali požadované číslo. V zápisu se přímo udává součin mantisy a čísla 10 umocněného exponentem, takže význam je jednoznačný. Tedy dříve uvedený příklad, $x = 3,456 \cdot 10^4$, znamená toto:

$$x = 3,456 \cdot 10^4 = 3,456 \cdot 10000 = 34560$$

Pro převod na semilogaritmický tvar platí zásada, že mocninu deseti, kterou ve formě vynásobení snížíme mantisu, musíme dodat do exponentu. Názorně to vysvětlí tento příklad

$$1250 = 1250 \cdot 1 = 1250 \cdot 10^{-1} \cdot 10^1 = (1250 \cdot 10^{-1}) \cdot 10^1 = 125 \cdot 10^1$$

Stručněji můžeme psát předchozí a další úpravy takto

$$1250 = 1250,0 \cdot 10^0 = 125,0 \cdot 10^1 = 12,5 \cdot 10^2 = 1,25 \cdot 10^3 = 0,125 \cdot 10^4 \quad \dots$$

Všechno jsou semilogaritmické tvary, používá se však jen ten s mantisou v intervalu $< 1, 10$), tj. předposlední. Z posledního výrazu též vidíme, že posun desetinné čárky o jedno místo vlevo je kompenzován zvýšením exponentu o jednotku. Rovněž je zřejmé, že desetinné číslo je zvláštním případem semilogaritmického tvaru s exponentem rovným nule.

Podobně platí pro čísla menší než nula

$$0,00345 = 0,00345 \cdot 1 = 0,00345 \cdot 10^1 \cdot 10^{-1} = 0,00345 \cdot 10^1 \cdot 10^{-1} = 0,0345 \cdot 10^{-1}$$

nebo rychleji

$$\begin{aligned} 0,00345 &= 0,00345 \cdot 10^0 = 0,0345 \cdot 10^{-1} = 0,345 \cdot 10^{-2} = \\ &= 3,45 \cdot 10^{-3} = 34,5 \cdot 10^{-4} \quad \dots \end{aligned}$$

Z tohoto výrazu je zřejmé, že posun desetinné čárky o jedno místo vpravo je doprovázen snížením exponentu o jednotku.

Na základě výše uvedených příkladů lze odvodit tato pravidla pro rychlý výpočet exponentu při převodu čísla na exponenciální tvar:

1. Pokud je číslo větší než 1, posune se desetinná tečka za první vedoucí číslicí a do exponentu se zapíše počet řádů, což je rovněž počet číslic, o který se posunula, např.

$$678000 = 678000,0 = 6,78 \cdot 10^5$$

Desetinná čárka se posunula o 5 číslic vlevo, exponent je kladný a roven 5.

2. Pokud je číslo menší než 1, posune se desetinná tečka za první nenulovou číslici a do exponentu se zapíše počet řádů, což je rovněž počet číslic, o který se posunula, ale se záporným znaménkem, např.

$$0,000678 = 6,78 \cdot 10^{-4}$$

Desetinná čárka se posunula o 4 číslice vpravo, exponent je záporný, rovný -4.

Tato pravidla lze zobecnit i pro případ, že mantisa není v intervalu $< 1, 10$).

Příklad: Na odporu je napětí 230 V a teče jím proud 45 μA . Jaká je hodnota odporu a jaký výkon se na něm uvolňuje?

Řešení:

Zadáno $U = 230\text{V} = 2,3 \cdot 10^2 \text{ V}$, $I = 45 \mu\text{A} = 45,0 \cdot 10^{-6}\text{A} = 4,5 \cdot 10^{-5}\text{A}$. Pro odpor R platí Ohmův zákon

$$\begin{aligned} R &= \frac{U}{I} = \frac{2,3 \cdot 10^2}{4,5 \cdot 10^{-5}} = \frac{2,3}{4,5} \frac{10^2}{10^{-5}} = \\ &= \frac{2,3}{4,5} 10^{2-(-5)} = 0,51 \cdot 10^7 = 5,1 \cdot 10^6 = 5,1 \text{ M}\Omega \end{aligned} \quad (1.21)$$

Pro elektrický výkon přeměněný na odporu v tepelný výkon platí Jouleův zákon

$$\begin{aligned} P &= UI = 2,3 \cdot 10^2 \cdot 4,5 \cdot 10^{-5} = 2,3 \cdot 4,5 \cdot 10^2 \cdot 10^{-5} = \\ &= 10,35 \cdot 10^{2-5} = 10,35 \cdot 10^{-3} = 1,035 \cdot 10^{-2} \text{ W} = 10,35 \text{ mW} \end{aligned} \quad (1.22)$$

1.6 Jednotky

Semilogaritmický tvar je výhodný pro zápis libovolné veličiny, nicméně není úplně přehledný a jeho zápis je relativně pracný. Proto se z praktických důvodů vyvinuly násobky jednotek v řádu po trojicích. Nejpoužívanější jsou v tabulce 1.1.

Tabulka 1.1: Základní předpony jednotek

| Název | Značka | Řád |
|-------|--------|------------|
| piko | p | 10^{-12} |
| nano | n | 10^{-9} |
| mikro | μ | 10^{-6} |
| mili | m | 10^{-3} |

| Název | Značka | Řád |
|-------|--------|-----------|
| Tera | T | 10^{12} |
| Giga | G | 10^9 |
| Mega | M | 10^6 |
| kilo | k | 10^3 |

Předpony se užívají dvěma způsoby, jak již bylo v předchozích příkladech naznačeno a jak předvádí několik typických ukázek, které následují:

- Převod ze standardního zápisu do semilogaritmického tvaru. Ten se používá na začátku řešení příkladu.
 - Rezistor (součástka) 4,7 $\text{M}\Omega$ má odpor (vlastnost) $R = 4,7 \cdot 10^6 \Omega$
 - Kondenzátor 22 pF má kapacitu $C = 22 \cdot 10^{-12} = 2,2 \cdot 10^{-11} \text{ F}$
 - Cívka 640 μH má indukčnost $L = 640 \cdot 10^{-6} = 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ H}$

2. Opačný převod ze semilogaritmického tvaru do standardního se používá na konci výpočtu nebo měření.

(a) Vypočtený proud $7,32 \cdot 10^{-4} \text{ A} = 732 \cdot 10^{-6} \text{ A}$ zapíšeme jako $732 \mu\text{A}$.

(b) Naměřené napětí $4,5 \cdot 10^4 \text{ V} = 45 \cdot 10^3 \text{ V}$, zapíšeme přehledně jako 45 kV .

1.7 Jednoduché, ale málo známé definice

Definice absolutní hodnoty

$$\begin{aligned} |a| &= 0 & \text{pro } a &= 0 \\ |a| &= a & \text{pro } a &> 0 \\ |a| &= -a & \text{pro } a &< 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Druhá odmocnina je nezáporné číslo, proto platí

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2} &= |x| & \text{pro všechna } x \\ \sqrt{x^2} &= x & \text{pouze pro } x \geq 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

2 Komplexní čísla

První část tohoto cvičení opakuje operace s komplexními čísly. Vychází z dlouholetých zkušeností, které říkají, že valná část studentů má s počítáním v komplexním oboru potíže nejen na cvičení, ale i u zkoušky.

2.1 Radiány a stupně

Úhel měříme ve dvou rozdílných jednotkách:

- Stupně – plný úhel je rozdělen na 360° dílků, stupňů. Přímemu úhlu pak odpovídá 180° .
- Radiány – úhel se vyjadřuje délkou oblouku na jednotkové kružnici. Plnému úhlu přísluší délka jednotkové kružnice, tj. $2 \cdot \pi \cdot 1 = 2\pi$ radiánů. Přímemu úhlu pak odpovídá π radiánů.

Převod mezi radiány a stupni vychází ze skutečnosti, že úhlu 180° odpovídá π radiánů, viz výše. Je-li α_s úhel ve stupních a α_r tentýž úhel v radinánech, pak platí převodní vztahy

$$\begin{aligned} \alpha_r &= \frac{\pi}{180} \alpha_s \\ \alpha_s &= \frac{180}{\pi} \alpha_r \end{aligned} \quad (2.1)$$

Převodní vztahy mezi úhlem α_r v radinánech a α_s ve stupních lze též odvodit z trojčlenky:

$$\begin{array}{ccc} 180^\circ & \dots & \pi \text{ radiánu} \\ \alpha_s & \dots & \alpha_r \end{array} \quad (2.2)$$

Poněvadž jde o přímou úměru, platí poměr

$$\frac{\alpha_s}{180} = \frac{\alpha_r}{\pi} \quad (2.3)$$

Z něho automaticky plynou vztahy (2.1)

Příklad: Kolik stupňů je 1 radián?

Řešení:

V rovnicích (2.1) nebo (2.3) volíme $\alpha_r = 1$. Po dosazení dostaneme

$$\alpha_s = \frac{180}{\pi} \alpha_r = 57,2958 \quad .$$

Desetinnou část převedeme na minuty a vteřiny. Při použití trojčlenky dostaneme pro minuty

$$\alpha_{min} = 0,2958 \cdot 60 = 17,748' \quad .$$

Pro úhlové vteřiny platí obdobně

$$\alpha_{vter} = 0,748 \cdot 60 = 45''$$

Odpověď tedy je: 1 radiánu přísluší úhel $57^\circ 17' 45''$.

2.2 Tvary komplexního čísla

Komplexní číslo¹ \hat{A} je možné napsat ve čtyřech tvarech, viz přednášky:

- Geometrický

$$\hat{A} = [a_1, a_2] \quad (2.4)$$

- Složkový²

$$\hat{A} = a_1 + j a_2 \quad (2.5)$$

- Goniometrický

$$\hat{A} = A_0(\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (2.6)$$

- Komplexní

$$\hat{A} = A_0 e^{j\varphi} \quad (2.7)$$

V těchto vztazích jsou a_1 a a_2 po řadě reálná a imaginární složka, A_0 je amplituda či modul a φ je fáze, přesněji fázová konstanta, či fázový úhel. Symbolem j je označena imaginární jednotka, pro kterou platí

$$j^2 = -1 \quad (2.8)$$

V praxi se nejčastěji používá tvar složkový, který je při ručních výpočtech vhodný pro sčítání a odečítání, a tvar exponenciální, určený pro ruční násobení, dělení a obecnou mocninu.

¹Komplexní čísla důsledně značíme stříškou nad symbolem.

²V souladu s elektrotechnikou značíme imaginární jednotku jako j .

2.2.1 Složkový tvar

Příklady složkového tvaru jsou např. tyto:

$$\hat{A} = 7 - 3j \quad \hat{I} = 0,24 + 349,5j \quad \hat{Z} = 2,48 \cdot 10^3 - j 1,23 \cdot 10^{-4} \quad (2.9)$$

Reálné složky \hat{A} , \hat{I} , \hat{Z} jsou po řadě

$$A_1 = \text{Re}(\hat{A}) = 7 \quad I_1 = 0,24 \quad Z_1 = 2,48 \cdot 10^3$$

Analogicky pro imaginární složky těchto komplexních proměnných platí

$$A_2 = \text{Im}(\hat{A}) = -3 \quad I_2 = 349,5 \quad Z_2 = -1,23 \cdot 10^{-4}$$

Velmi častá chyba spočívá v tom, že studenti si neuvědomí přesnou definici imaginární složky. Je to reálné číslo, koeficient, kterým je násobena imaginární jednotka. Zcela chybné je tedy tvrzení, že imaginární složky čísel (2.9) jsou

$$A_2 = -3j \quad I_2 = 349,5j \quad Z_2 = -j 1,23 \cdot 10^{-4}$$

Po dosazení těchto hodnot do příslušných vztahů dostaneme chybné výsledky.

Pro úplnost tuto chybu ještě jednou připomeneme:

$$\hat{A} = 3 - 5j$$

je komplexní číslo s reálnou složkou rovnou 3 a imaginární -5, nikoliv $-5j$.

Rovnost

$$x + jy = 3 - 5j$$

znamena

$$x = 3 \quad y = -5$$

nikoliv

$$x = 3 \quad y = -5j$$

Součin je komutativní i v komplexním oboru, lze zaměnit pořadí imaginární jednotky a imaginární složky, tj.

$$\hat{A} = 7 + 2j = 7 + j2$$

Žádné pevné pravidlo pro umístění symbolu j neexistuje, důležitá je srozumitelnost a přehlednost zápisu.

V první části jsme řekli, že komplexní čísla jsou buď reálná, ryze imaginární nebo imaginární. Tato čísla

$$-27,0, \quad -0,078j, \quad -3 \cdot 10^5 + j 7 \cdot 10^8$$

jsou po řadě reálné, ryze imaginární a imaginární komplexní číslo. Pokud je některá ze složek nulová, nebo je imaginární složka jednotková, nepíše se. Tedy

$$\hat{A} = 3 = 3 + j0$$

$$\hat{A} = 3j = 0 + 3j$$

$$\hat{A} = 1 + j = 1 + 1j$$

Vlevo je stručný tvar, vpravo tvar rozepsaný.

Poznamenejme ještě, že ve složkovém tvaru je imaginární jednotka pouze jednou, a to v čitateli. Tedy

$$\frac{1+j}{2} = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$$

je komplexní číslo ve složkovém tvaru. Zatímco výraz

$$\frac{2}{1+j}$$

není komplexní číslo ve složkovém tvaru, ale ani v žádném jiném. Lze jej však na tento tvar převést. Obecně platí, že výsledek musíme upravovat tak dlouho, až obsahuje jen reálnou a imaginární složku.

2.2.2 Exponenciální tvar

V exponenciálním tvaru

$$\hat{A} = A_0 e^{j\varphi} \quad (2.10)$$

se komplexní číslo \hat{A} popisuje *modulem* či *amplitudou* \hat{A}_0 a *argumentem*, *fázovým úhlem*, či prostě jen *úhlem* φ , který se uvádí v radiánech. To je dobré dodržovat, uvedeme-li jej ve stupních, např. jako $3e^{45^\circ}$, lze jej vyhodnotit i takto *chybně*

$$\hat{A} = 3e^{j45^\circ} = 3e^{j1} = 0,5403 + j0,8415$$

Přitom jsme měli na mysli

$$\hat{A} = 3e^{j45^\circ} = 3e^{j\frac{\pi}{4}} = 2,121 + j2,121$$

Exponenciální tvar velmi úzce souvisí s goniometrickým tvarem v důsledku Eulerova vztahu

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi \quad (2.11)$$

Tento vztah se používá v mnoha odvozeních a patří mezi matematické základy teorie obvodů, proto je samozřejmostí jeho zapamatování.

Připomeňme, že exponenciální tvar musí obsahovat pouze jednu amplitudu a jednu fázi, jinak jej musíme dále upravovat. Je nutno ještě upozornit, že v exponenciálním tvaru je imaginární jednotka pouze jednou, a to v exponentu. Tedy

$$7,8e^{-j1,23}$$

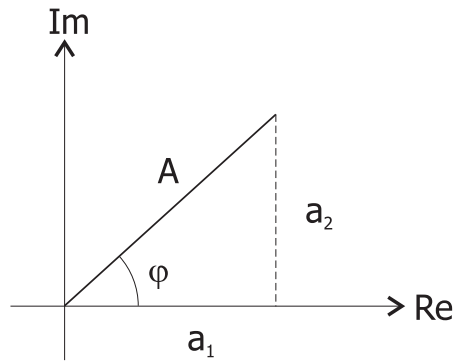
je komplexní číslo v exponenciálním tvaru. Zatímco výraz

$$je^{j\pi}$$

není komplexní číslo v exponenciálním tvaru, avšak ani v žádném jiném. Lze jej ovšem na exponenciální tvar převést.

2.2.3 Geometrický tvar

Pro snadné odvození některých vztahů je dobré zapamatovat si geometrický význam složkového a exponenciálního tvaru. Komplexní číslo můžeme považovat za bod v komplexní rovině. Souřadnou soustavu tvoří dvě navzájem kolmé osy, na vodorovné ose jsou reálná čísla, na svislé čísla ryze imaginární. Komplexní číslo lze pak znázornit bodem v komplexní rovině, viz obr. 2.1. Tento bod může mít souřadnice



Obrázek 2.1: Komplexní rovina

- kartézské, což jsou složky a_1, a_2 komplexního čísla $\hat{A} = a_1 + j a_2$,
- polární, které představují modul A_0 a fázový úhel φ komplexního čísla, $\hat{A} = A_0 e^{j\varphi}$.

Modul je průvodičem, tj. délkou spojnice počátku a bodu, znázorňujícího komplexní číslo. Úhel se měří od kladné reálné osy k průvodiči. Obvykle nabývá hodnot v symetrickém intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Interval $\langle 0, 2\pi \rangle$ se používá zřídka.

2.2.4 Převody

Při převodu mezi složkovým a exponenciálním tvarem lze postupovat dvěma způsoby.

- Názorně geometricky, jako převod mezi kartézskými a polárními souřadnicemi. Aplikují se definice goniometrických funkcí a Pythagorova věta.
- Matematicky, aplikací vztahu pro goniometrický tvar (2.6), což je vlastně jen jiný zápis exponenciálního vyjádření.

Převodní vztahy odvodíme porovnáním složkového a goniometrického vzorce. Poněvadž se jedná o jedno a totéž komplexní číslo \hat{A} , musí se vztahy (2.5) a (2.6) sobě rovnat.

$$\begin{aligned}\hat{A} &= a_1 + j a_2 = A_0(\cos \varphi + j \sin \varphi) \\ a_1 + j a_2 &= A_0 \cos \varphi + j A_0 \sin \varphi\end{aligned}\tag{2.12}$$

Dvě komplexní čísla jsou sobě rovna, pokud se rovnají reálné a imaginární složky. Z druhé části vztahu (2.12) plynou přímo vztahy

$$\begin{aligned}a_1 &= A_0 \cos \varphi \\ a_2 &= A_0 \sin \varphi\end{aligned}\tag{2.13}$$

Z těchto vztahů lze odvodit opačný převod. Umocněním na druhou a sečtením dostaneme amplitudu, z podílu vypočteme fázi. Snadno odvodíme následující vztahy:

$$\begin{aligned}A_0 &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ \varphi &= \arctg \frac{a_2}{a_1}\end{aligned}\tag{2.14}$$

Je nutno upozornit na omezenou platnost vztahu pro výpočet fáze. Platí jen pro komplexní čísla v pravé polorovině, což jsou čísla s nezápornou reálnou složkou. Pokud je reálná složka záporná, je nutno k funkci \arctg přičíst nebo odečíst $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$. V teorii

obvodů to však obvykle nevádí, poněvadž fáze se mění v rozsahu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$, tedy obvodové veličiny a parametry jsou v pravé polorovině.

Pokud se nechceme trápit přemýšlením zda v levé polorovině máme k vypočtenému fázovému úhlu $\frac{\pi}{2}$ přičíst nebo odečíst, můžeme postupovat takto

- Použít funkce MATLABu $\text{atan2}(a_1, a_2)$.
- Použít obecného vztahu

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \frac{a_2}{a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \quad (2.15)$$

Tento vztah nelze použít pro $a_2 = 0$ a $a_1 < 0$, pokud obě podmínky platí současně. V tomto případě $\varphi = \pi$

Pro teorii obvodů mají zásadní význam tyto vztahy mezi složkovým a exponenciálním tvarem, které lze snadno odvodit z geometrického významu exponenciálního tvaru.

$$\begin{aligned} 1 &= e^{j0} \\ j &= e^{j\frac{\pi}{2}} \\ -1 &= e^{-j\pi} = e^{j\pi} \\ -j &= e^{-j\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Odstrašující příklad: „Dokažte“, že v komplexním oboru platí $\sqrt{2} = 0$.

Běžné studentské řešení:

Uvažujme komplexní číslo

$$\hat{a} = a_1 + j a_2 = 1 + j = 1 + 1 \cdot j$$

Jeho absolutní hodnota je odmocninou součtu čtverců složek, tedy ze stručného zápisu

$$a = |\hat{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{1^2 + (j)^2} = \sqrt{1 - 1} = 0 \quad (2.17)$$

Rozepsaný tvar $\hat{a} = 1 + 1 \cdot j$ nám výpočet potvrdí

$$\begin{aligned} a = |\hat{a}| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{1^2 + (1 \cdot j)^2} = \sqrt{1 + 1^2 \cdot j^2} = \\ &= \sqrt{1 + 1 \cdot (-1)} = \sqrt{1 - 1} = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Podle geometrického významu je absolutní hodnota přeponou trojúhelníka, jehož odvěsnami jsou složky komplexního čísla. V našem případě jsou obě složky jednotkové a z Pythagorovy věty plyne

$$a = |\hat{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad (2.19)$$

Z těchto dvou vztahů (2.18) a (2.19), které počítají tutéž veličinu, ale každý jiným způsobem, plyne uvedené nesmyslné tvrzení.

Vysvětlení

Chyba je v nesprávném dosazení do vztahu pro výpočet absolutní hodnoty. Ve vztazích (2.18) a (2.19) se nedosazuje správně imaginární složka a_2 , ale její součin s imaginární jednotkou j , tj. $j a_2$. Správné dosazení

$$a = |\hat{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \quad (2.20)$$

vede ke shodě obou výsledků (2.19) a (2.20).

2.3 Základní matematické operace s komplexními čísly

Jedná se o sčítání, odečítání, násobení a dělení, případně o obecnou mocninu. Všechny tyto operace lze provádět ve složkovém tvaru. Připomeňme, že podíl se vypočte tak, že čítec i jmenovatel se násobí komplexně sdruženým jmenovatelem. Uvedeme velmi jednoduchý příklad:

$$\frac{1-j}{1+j} = \frac{(1-j)(1-j)}{(1+j)(1-j)} = \frac{1-2j+j^2}{1-j^2} = \frac{1-2j-1}{1-(-1)} = \frac{-2j}{2} = -j \quad (2.21)$$

V exponenciálním tvaru lze provádět pouze násobení, dělení a umocňování. Postupuje se takto

- Násobení: Amplitudy se vynásobí, fázové úhly se sečtou.
- Dělení: Amplituda čitatele se dělí amplitudou jmenovatele, fáze jmenovatele se odečte od fáze čitatele.
- Mocnina: Amplitudy se umocní, fáze se vynásobí mocnitelem.

Předchozí případ dělení se pomocí exponenciálního tvaru obecně řeší v těchto třech krocích:

- Čitatele i jmenovatele převedeme do exponenciálního tvaru. Zde se dá s výhodnou použít geometrického znázornění. V obou případech je amplituda rovna $\sqrt{2}$, fáze čitatele je $-\frac{\pi}{4}$, fáze jmenovatele $\frac{\pi}{4}$, nebo názorněji, průvodič čísla v čitateli svírá s vodorovnou osou úhel -45° , pro číslo ve jmenovateli je to 45° . Tedy

$$1-j = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad 1+j = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

- Dosadíme exponenciální tvar do čitatele i jmenovatele zlomku (2.21)

$$\frac{1-j}{1+j} = \frac{\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}} = \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{e^{j\frac{\pi}{4}}} = e^{-j\frac{\pi}{4}-j\frac{\pi}{4}} = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

- Ve třetím kroku můžeme přejít z exponenciálního tvaru na složkový, viz (2.16)

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

Jako příklad obecné mocniny vypočteme \sqrt{j} podle předchozího postupu, ale všechny kroky provedeme v jednom řádku výpočtu

$$\sqrt{j} = j^{\frac{1}{2}} = (e^{j\frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{2}} = e^{j\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}} = e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$$

O správnosti postupu se můžeme přesvědčit umocněním složkového tvaru.

Jako zajímavé cvičení mohou studenti vypočítat tento příklad:

$$(1+j)^8$$

Novou operací je komplexně sdružené číslo k číslu $\hat{A} = a_1 + ja_2$, které je definováno takto

$$\hat{A}^* = a_1 - ja_2 = A_0 e^{-j\varphi} \quad (2.22)$$

S výhodou se využívá pro výpočet čtverce absolutní hodnoty

$$\hat{A}\hat{A}^* = A_0 e^{j\varphi} A_0 e^{-j\varphi} = A_0^2 = |\hat{A}|^2 \quad (2.23)$$

Důležitý je rovněž tento vztah, který plyne též z předchozího odvození,

$$|e^{j\varphi}| = |\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)| = \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1 \quad (2.24)$$

Na rozdíl od reálných čísel nelze komplexní čísla navzájem porovnávat, porovnávat lze pouze jejich absolutní hodnoty. Např. vztah $(1 - j) > 0$ nemá v komplexním oboru smysl.

3 Goniometrické funkce

Goniometrické funkce jsou $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ a $\cotg(x)$. Funkce sinus a cosinus se běžně používají k popisu harmonického střídavého proudu. Využívá se řada jejich vlastností, které se probírají v matematice. Začneme tím, že odvodíme vztahy, které se v teorii obvodů velmi často používají. Jedná se o goniometrické funkce součtu argumentů a o vztahy převádějící součin goniometrických funkcí na kombinaci goniometrických funkcí součtu argumentů. Připomeňme, že v zápisu

$$y = f(x)$$

je f symbol funkce, v našem případě to bude \sin nebo \cos , x je nezávisle proměnná nebo též argument a y je závisle proměnná nebo též funkční hodnota.

3.1 Goniometrické funkce se součtem a rozdílem argumentů

Daleko jednodušší je součtové věty si pamatovat, nicméně, zde je odvodíme jako přípravu pro počítání s komplexními funkcemi. Vycházíme z Eulerova vztahu (viz.část 2.2.2 a vztah (2.11))

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x \quad (3.1)$$

Na levé straně je exponenciální způsob zápisu, na pravé goniometrický. Pro součet argumentů $x + y$ lze levou stranu rozepsat

$$e^{j(x+y)} = e^{jx+jy} = e^{jx} e^{jy} \quad (3.2)$$

Na obě krajní strany nyní použijeme Eulerův vztah (3.1). Na levé straně bude argumentem goniometrických funkcí součet $x + y$, na pravé jednotlivé sčítance x a y

$$\cos(x + y) + j \sin(x + y) = (\cos x + j \sin x)(\cos y + j \sin y) \quad (3.3)$$

Pravou stranu roznásobíme

$$\cos(x + y) + j \sin(x + y) = \cos x \cos y + j \sin x \cos y + j \cos x \sin y - \sin x \sin y \quad (3.4)$$

Reálná a imaginární složka se musí rovnat, což je vlastně již výsledek

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (3.5)$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad (3.6)$$

Pokud vystupuje v předchozích vztazích rozdíl argumentů, je nutno si uvědomit, že funkce kosinus je sudá

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad (3.7)$$

a změnou znaménka argumentu se nic nezmění. Funkce sinus je lichá

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad (3.8)$$

Záporný argument vede ke změně znaménka funkční hodnoty na opačné.

Při uvážení předchozích dvou vztahů můžeme vztahy (3.5) a (3.6) snadno upravit pro rozdíl argumentů

$$\cos(x - y) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad (3.9)$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \quad (3.10)$$

3.2 Součin goniometrických funkcí

V teorii obvodů je často nutné upravit vztahy pro součin goniometrických funkcí, např. $\cos(x) \sin(y)$. Systematický postup vychází z toho, že ve vztazích (3.5) až (3.10) se vyskytují všechny typy součinů. Postupuje se tak, že se vhodné rovnice sčítají nebo odečítají. Vztah pro součin kosinů $\cos(x) \cos(y)$ dostaneme tak, že rovnice (3.5) a (3.9) sečteme a upravíme

$$\begin{aligned} \cos(x + y) + \cos(x - y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \cos(x + y) + \cos(x - y) &= 2 \cos x \cos y \end{aligned} \quad (3.11)$$

Součin kosinů lze tedy vyjádřit vztahem

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x + y) + \cos(x - y)) \quad (3.12)$$

Vztah pro součin sinů $\sin(x) \sin(y)$ dostaneme tak, že rovnice (3.5) a (3.9) odečteme a upravíme

$$\begin{aligned} \cos(x + y) - \cos(x - y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y - (\cos x \cos y - \sin x \sin y) \\ \cos(x + y) - \cos(x - y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y - \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \cos(x + y) - \cos(x - y) &= -2 \sin x \sin y \end{aligned} \quad (3.13)$$

Součin sinů lze tedy vyjádřit vztahem

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y)) \quad (3.14)$$

Při zapamatování je nutno dát pozor na obrácené pořadí argumentů ve vztahu (3.14) v porovnání se vztahem (3.12).

Vztah pro smíšený součin $\sin(x) \cos(y)$ dostaneme tak, že rovnice (3.6) a (3.10) sečteme a upravíme

$$\begin{aligned} \sin(x + y) + \sin(x - y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \sin(x + y) + \sin(x - y) &= 2 \sin x \cos y \end{aligned} \quad (3.15)$$

Smíšený součin $\sin(x) \cos(y)$ lze tedy vyjádřit vztahem

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x + y) + \sin(x - y)) \quad (3.16)$$

Konečně vztah pro smíšený součin $\cos(x)\sin(y)$ dostaneme tak, že rovnice (3.6) a (3.10) odečteme a upravíme

$$\begin{aligned}\sin(x+y) - \sin(x-y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y - (\sin x \cos y - \cos x \sin y) \\ \sin(x+y) - \sin(x-y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y - \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \sin(x+y) - \sin(x-y) &= 2 \cos x \sin y\end{aligned}\quad (3.17)$$

Smíšený součin $\cos(x)\sin(y)$ lze tedy vyjádřit vztahem

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} (\sin(x+y) - \sin(x-y)) \quad (3.18)$$

Tento vztah ovšem můžeme získat též přímo ze vztahu (3.16) důslednou záměnou proměnných x a y a využitím toho, že funkce sinus je lichá, viz vztah (3.8).

3.3 Goniometrické funkce dvojnásobku argumentu

Vztahy pro goniometrické funkce součtu argumentů a pro součin goniometrických funkcí se zjednoduší pro případ $x = y$. Pak $x + y = 2x$, jedná se tedy o dvojnásobný argument. Ze součtového vztahu pro kosinus (3.5) po dosazení $x = y$ plyne

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (3.19)$$

Pro úplnost, z rozdílového vztahu (3.9) plyne známá identita

$$\cos(x-x) = \cos(0) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Ze součtového vztahu pro sinus (3.6) po dosazení $x = y$ plyne

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x \quad (3.20)$$

Z rozdílového vztahu (3.10) ověříme známou vlastnost funkce sinus

$$\sin(x-x) = \sin(0) = \sin x \cos x - \sin x \cos x = 0$$

Důležité vztahy dostaneme ze součtinových tvarů (3.12) až (3.16). Ze vztahu (3.12) pro $x = y$ plyne

$$\cos x \cos x = \cos^2 x = \frac{1}{2} (\cos(x+x) + \cos(x-x)) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2x)) \quad (3.21)$$

S ohledem na důležitost jej napíšeme přehledně

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad (3.22)$$

Ze vztahu (3.14) pro $x = y$ plyne

$$\sin x \sin x = \sin^2 x = \frac{1}{2} (\cos(x-x) - \cos(x+x)) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) \quad (3.23)$$

S ohledem na jeho stejně velkou důležitost jako předchozího vztahu jej napíšeme přehledně

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad (3.24)$$

Vztahy (3.22) a (3.24) pro čtverec funkce kosinus a sinus se liší pouze v čitateli, v prvním případě je v něm součet, ve druhém rozdíl. Jako mnemotechnickou pomůcku lze použít toho, že funkce kosinus je sudá, použijeme znaménko plus (součet), zatímco funkce sinus je lichá, aplikujeme tedy znaménko minus (rozdíl).

Ze vztahu (3.16) pro $x = y$ plyne

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} (\sin(x+x) + \sin(x-x)) = \frac{1}{2} \sin(2x) \quad (3.25)$$

To jsme ovšem odvodili již dříve a jinak, viz (3.20).

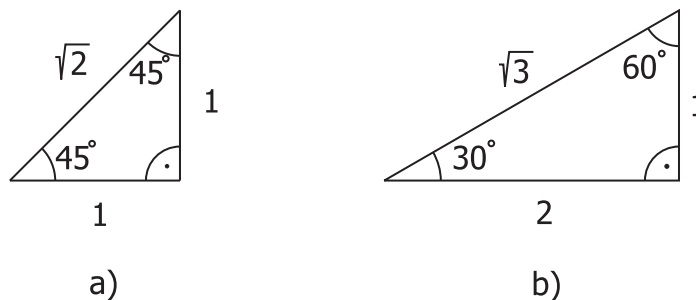
Na konec této části ještě připomeneme, že odvození vztahů (3.22) a (3.24) pro čtverec kosinu a sinu provedeme ještě jednou a jinak. Téměř všechny vztahy uvedené v této části se prakticky využívají v teorii obvodů, jednak při výpočtech výkonů v obvodech harmonického proudu, jednak při harmonické analýze.

Příklad 3.1:

Vypočítejte hodnoty funkce $\sin(\alpha)$ pro úhly 30° , 45° , 60° .

Řešení

V tomto případě použijeme geometrické definice funkcí sinus a cosinus. Pro úhel 45° vyjdeme z rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku s jednotkovými odvěsnami, viz obr. 3.1a. Přepona je potom rovna $\sqrt{2}$. Sinus je definován jako poměr protilehlé odvěsny



Obrázek 3.1: Trojúhelníky pro geometrickou definici harmonických funkcí

ku přeponě, tedy³ pro $\alpha = 45^\circ$

$$\sin \alpha = \sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0,707$$

Pro ostatní dva úhly vyjdeme z pravoúhlého trojúhelníku o úhlech 30° a 60° , viz obr. 3.1b. Proti úhlu 30° má odvěsna délku 1, zatímco proti úhlu 60° leží odvěsna o délce $\sqrt{3}$. Přepona je pak rovna 2. Podle geometrické definice sinu úhlu $\alpha = 30^\circ$ se jedná o poměr protilehlé odvěsny, která má délku 1, a přepony délky 2, takže

$$\sin \alpha = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2} = 0,5$$

Pro úhel $\alpha = 60^\circ$ má protilehlá odvěsna délku $\sqrt{3}$, délka přepony zůstává, takže

$$\sin \alpha = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 0,866$$

³V rozporu se zásadním pravidlem, že symbol stupeň se používá jen ve výsledku, zde jej uvádíme pro názornost i v argumentu funkce sinus. Toto pravidlo porušíme několikrát v tomto a následujícím příkladu.

Příklad 3.2:

Vypočítejte hodnoty funkce $\cos(\alpha)$ pro úhly $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$.

Řešení

Postupujeme jako v předchozím příkladu a přímo píšeme výsledky

$$\cos \alpha = \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0,707$$

$$\cos \alpha = \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 0,866$$

$$\cos \alpha = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2} = 0,5$$

Vidíme, že hodnoty funkce kosinus pro tyto úhly jsou v opačném pořadí hodnot pro funkci sinus. Této vlastnosti se kdysi, když ještě nebyly kalkulačky a počítače, používalo v tabulkách. Sinus se hledal od počátku, kosinus od konce.

Příklad 3.3:

Uveďte hodnoty funkcí sinus a kosinus pro úhly, které jsou násobky $\frac{\pi}{2}$ v základní periodě. Na základě těchto vlastností načrtněte jejich grafy.

Řešení

Základní periodou se rozumí interval $\langle 0, 2\pi \rangle$. Pro výpočet v tomto případě by stačilo si pamatovat hodnoty těchto funkcí pro úhel $\alpha = 0$ a $\alpha = \frac{\pi}{4}$, druhý případ jsme vyřešili v předchozích příkladech. Sinus je funkce lichá, proto

$$\sin(0) = 0 \tag{3.26}$$

Pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ použijeme součtové věty (3.6)

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Lze také postupovat rychleji. Poněvadž oba sčítanci v (3.27) jsou stejné, použijeme vztah (3.20) pro sinus dvojnásobného argumentu

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \tag{3.28}$$

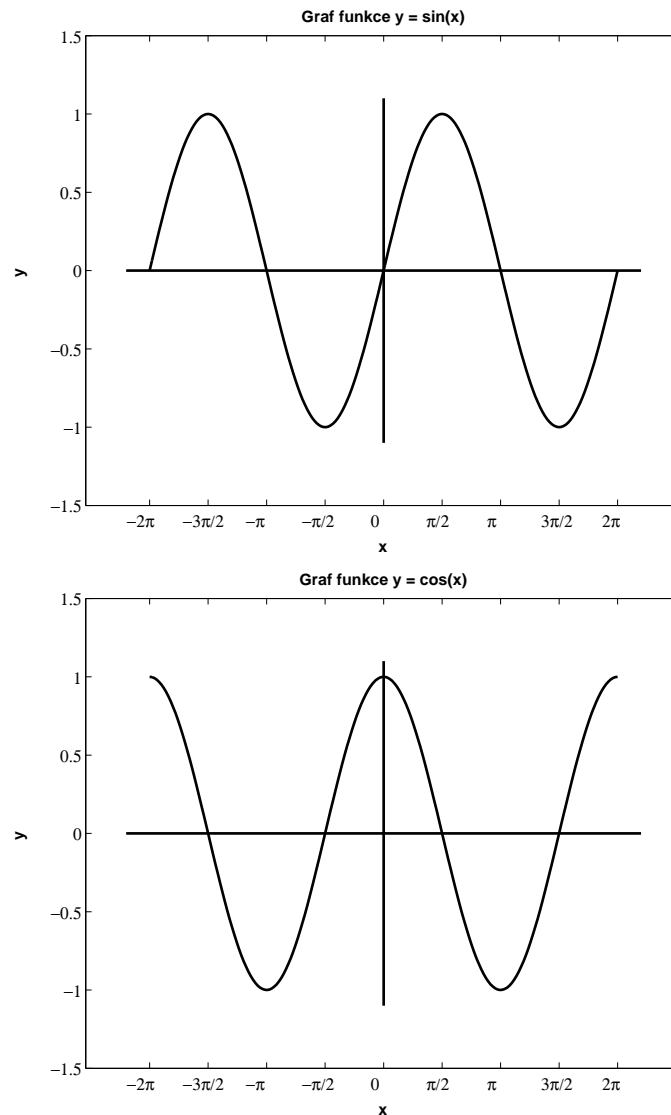
Vidíme, že odvození je početně zdlouhavé, a proto je lepší si významné hodnoty pamatovat. Pro funkci sinus platí

$$\sin(0) = 0 \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \sin(\pi) = 0 \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \quad \sin(2\pi) = 0 \tag{3.29}$$

Podobně lze odvodit, nebo si pamatovat, že funkce kosinus má tyto významné body

$$\cos(0) = 1 \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \cos(\pi) = -1 \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \quad \cos(2\pi) = 1 \tag{3.30}$$

Z těchto bodů lze sestavit graf, který je na obr. 3.2. Na vodorovné ose, pro nezávisle proměnnou, není úhel v radiánech, ale v násobcích π , např. 0,5 na vodorovné stupnici odpovídá $\frac{\pi}{2}$.



Obrázek 3.2: Průběhy goniometrických funkcí sinus a cosinus

3.4 Goniometrické komplexní funkce

Ze základních komplexních funkcí probereme pouze exponenciálu, kosinus a sinus, protože jsou matematickým základem teorie obvodů. Zde se omezíme pouze na případ reálného argumentu (nezávisle proměnné). Případy komplexního argumentu jsou v nadstavbové části.

Definice komplexní exponenciální funkce vychází přímo z Eulerova vztahu (2.11)

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x) \quad (3.31)$$

Na základě této definice jsme již odvodili převody mezi exponenciálním a složkovým tvarem, a to matematicky.

Odvození vztahu pro komplexní kosinus a sinus vychází z rovnic

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x) \quad (3.32)$$

$$e^{-jx} = \cos(x) - j \sin(x) \quad (3.33)$$

Při výpočtu funkce kosinus se tyto rovnice sečtou. Po jednoduché úpravě dostaneme

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad (3.34)$$

Funkce sinus se získá tak, že se tyto rovnice odečtou. Takto získáme vztah

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad (3.35)$$

Je nutno upozornit, že se nesmí zapomenout na imaginární jednotku ve jmenovateli.

4 Elementární komplexní funkce

Tato část je pokračováním základů komplexních čísel a do jisté míry představuje nadstavbu. Probírá se v ní vysokoškolská látka. Cílem je zejména ukázat, že v oboru komplexních čísel je možné téměř všechno. Má doplnit informace získané ve cvičení zabývajícím se základy komplexního oboru. Je určena zejména pro ty studenty, kteří chtějí pokračovat v magisterském studiu.

Příklad 4.1:

Existuje řešení rovnice

$$\sin(x) = 5 ?$$

Řešení

V reálném oboru tato rovnice nemá řešení, poněvadž

$$|\sin(x)| \leq 1$$

pro všechna reálná x .

Uvažujme proto komplexní obor. Zde platí pro funkci sinus definice (3.35)

$$\sin(\hat{z}) = \frac{e^{j\hat{z}} - e^{-j\hat{z}}}{2j}. \quad (4.1)$$

kde $\hat{z} = x + jy$ je komplexní číslo o složkách x a y . Tato komplexní funkce má podle zadání nabývat hodnoty 5. Z definice (4.1) plyne tato rovnice

$$\sin(\hat{z}) = \frac{e^{j\hat{z}} - e^{-j\hat{z}}}{2j} = 5. \quad (4.2)$$

kterou máme řešit. Poněvadž $\hat{z} = x + jy$ je komplexní číslo o složkách x a y , které této rovnici vyhovuje, musíme najít jeho složky. Po dosazení za \hat{z} a mírných úpravách ($j\hat{z} = j(x + jy) = -y + jx$, $-j\hat{z} = -j(x + jy) = y - jx$) dostaneme

$$e^{-y+jx} - e^{y-jx} = 10j \quad (4.3)$$

Po rozpisu součtu exponentů na součin jednoduchých mocnin získá tato rovnice tvar

$$e^{-y} e^{jx} - e^y e^{-jx} = 10j \quad (4.4)$$

Nyní použijeme Eulerův vztah

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x) \quad e^{-jx} = \cos(x) - j \sin(x) \quad (4.5)$$

Po jeho dosazení do (4.4) dostaneme

$$e^{-y}(\cos(x) + j \sin(x)) - e^y(\cos(x) - j \sin(x)) = 10j \quad (4.6)$$

Tuto rovnici roznásobíme

$$e^{-y} \cos(x) + j e^{-y} \sin(x) - e^y \cos(x) + j e^y \sin(x) = 10j \quad (4.7)$$

Nyní uspořádáme členy tak, abychom dostali reálnou a imaginární složku

$$(e^{-y} - e^y) \cos(x) + j (e^{-y} + e^y) \sin(x) = 10j \quad (4.8)$$

Konečně jsme pokročili. Z předchozí rovnice plyne, že se musí rovnat reálné a imaginární složky, tj.

$$\begin{aligned} (e^{-y} - e^y) \cos(x) &= 0 \\ (e^{-y} + e^y) \sin(x) &= 10 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Získali jsme dvě rovnice (4.9) pro dvě reálné proměnné x a y . Ty nyní musíme nalézt.

První rovnici z (4.9) vyhovuje např.

$$x = \frac{\pi}{2} \quad (4.10)$$

Po dosazení tohoto dílčího řešení do druhé rovnice v (4.9) dostaneme ($\sin(\pi/2) = 1$)

$$e^{-y} + e^y = 10 \quad (4.11)$$

Po jednoduchých úpravách (např. vynásobení celé rovnice e^y) a přerovnání členů dostaneme rovnici

$$e^{2y} - 10e^y + 1 = 0 \quad (4.12)$$

Substitucí

$$u = e^y \quad (4.13)$$

dostaneme kvadratickou rovnici pro proměnnou u

$$u^2 - 10u + 1 = 0 \quad (4.14)$$

Diskriminant této rovnice je

$$D = b^2 - 4ac = 100 - 4 = 96 \quad (4.15)$$

Kořeny rovnice (4.14) pak vypočteme ze vztahů

$$u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{96}}{2} = 5 \pm \sqrt{24} \quad (4.16)$$

Ze dvou řešení kvadratické rovnice (4.16) pro neznámou u stačí uvažovat pouze jedno. Zvolme řešení s kladným znaménkem

$$u = 5 + \sqrt{24} \quad (4.17)$$

Tuto hodnotu musíme přetransformovat do proměnné y . Mezi proměnnými u a y platí vztah (4.13). Z něho dostaneme

$$y = \ln(u) = \ln(5 + \sqrt{24}) \quad (4.18)$$

Ze vztahů (4.10) a (4.18) plyne, že rovnice $\sin(x) = 5$ má např. řešení

$$\hat{z} = x + jy = \frac{\pi}{2} + j \cdot \ln(5 + \sqrt{24}) \quad (4.19)$$

Po provedení numerických výpočtů zjistíme přibližnou, ale pro praxi dostatečně přesnou, hodnotu

$$\hat{z} = 1,5708 + j 2,2924$$

O správnosti tohoto řešení se můžeme přesvědčit po jeho dosazení do zadání (4.1).

Pro druhé řešení kvadratické rovnice (4.16) platí

$$u_2 = 5 - \sqrt{24} \quad (4.20)$$

Mezi proměnnými u a y platí vztah (4.13). Z něho dostaneme pro imaginární složku druhého řešení

$$y_2 = \ln(u_2) = \ln(5 - \sqrt{24}) \quad (4.21)$$

Ze vztahů (4.10) a (4.21) plyne, že rovnice $\sin(x) = 5$ má též řešení

$$\hat{z}_2 = x + j y_2 = \frac{\pi}{2} + j \cdot \ln(5 - \sqrt{24}) \quad (4.22)$$

Po provedení numerických výpočtů zjistíme přibližnou, ale pro praxi dostatečně přesnou, hodnotu

$$\hat{z} = 1,5708 - j 2,2924$$

O správnosti tohoto dalšího dílčího řešení se můžeme přesvědčit po jeho dosazení do zadání (4.1).

Toto druhé dílčí řešení je komplexně sdružené k prvnímu řešení (4.19). Lze ukázat, že to platí obecně, pokud je pravá strana zadané rovnice reálná.

Pokračujme dále s cílem uvažovat další možnosti. První rovnice z (4.9) má též řešení

$$x = \frac{3\pi}{2} \quad (4.23)$$

Po dosazení tohoto dílčího řešení do druhé rovnice v (4.9) dostaneme ($\sin(\pi/2) = -1$)

$$e^{-y} + e^y = -10 \quad (4.24)$$

Tato rovnice však nemá v reálném oboru řešení.

Ze dvou nul rovnice $\cos(x) = 0$ na základním intervalu $< 0, 2\pi$) lze tedy použít pouze první řešení $x = \pi/2$. K tomuto řešení však můžeme připočítat libovolný násobek čísla 2π tj. $2k\pi$, kde k je celé číslo. Možné hodnoty reálné části jsou tedy

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = (4k + 1) \frac{\pi}{2} \quad (4.25)$$

Obecně má rovnice $\sin(x) = 5$ v komplexním oboru tato řešení

$$\begin{aligned} \hat{z}_k &= x_k + j y_2 = (4k + 1) \frac{\pi}{2} + j \cdot \ln(5 + \sqrt{24}) \\ \hat{z}_k &= x_k + j y_2 = (4k + 1) \frac{\pi}{2} + j \cdot \ln(5 - \sqrt{24}) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Příklad ukazuje, že nalezení všech řešení zadané rovnice není jednoduché.

Příklad 4.2:

Existuje řešení rovnice

$$\exp(x) = -5 ?$$

Řešení:

V reálném oboru tato rovnice nemá řešení, poněvadž

$$\exp(x) = e^x > 0$$

pro všechna reálná x .

Uvažujme proto komplexní argument $\hat{z} = x + jy$ pro exponenciální funkci. Pak

$$e^{\hat{z}} = e^{x+jy} = e^x e^{jy} \quad (4.27)$$

Pro druhý člen součinu použijeme Eulerův vztah (4.5), který má nyní tvar

$$e^{jy} = \cos(y) + j \sin(y) \quad (4.28)$$

Ze vztahů (4.27) a (4.28) dostaneme praktičtější výraz pro komplexní exponenciální funkci

$$e^{\hat{z}} = e^{x+jy} = e^x \cdot (\cos(y) + j \sin(y)) \quad (4.29)$$

Podle zadání máme řešit rovnici

$$e^x \cdot (\cos(y) + j \sin(y)) = -5 \quad (4.30)$$

Levou část plně rozepsané předchozí rovnice převedeme na složkový tvar

$$e^x \cos(y) + j e^x \sin(y) = -5 \quad (4.31)$$

Poslední rovnice vyžaduje, aby se sobě rovnaly reálné a imaginární složky obou stran

$$\begin{aligned} e^x \cos(y) &= -5 \\ e^x \sin(y) &= 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Tyto dvě rovnice pro reálná x a y je nutno vyřešit. Druhé rovnici v (4.32) vyhovují tato dvě řešení pro hledané y

$$y = 0, \quad y = \pi \quad (4.33)$$

První řešení, $y = 0$, nelze použít, poněvadž po jeho dosazení do první rovnice v (4.32) dostaneme rovnici

$$e^x = -5 \quad (4.34)$$

poněvadž $\cos(0) = 1$. Tato rovnice nemá pro reálné x řešení.

Po dosazení druhého řešení, $y = \pi$, z (4.33) do první rovnice v (4.32) dostaneme

$$e^x = 5 \quad (4.35)$$

poněvadž $\cos(\pi) = -1$. Tato rovnice má řešení

$$x = \ln(5) \quad (4.36)$$

Komplexní řešení rovnice $\exp(x) = -5$ je tedy

$$\hat{z} = x + jy = \ln(5) + j\pi \quad (4.37)$$

Po numerickém dosazení

$$\hat{z} = 1,6094 + j3,1416$$

Zde se již omezíme na nalezení jediného řešení. Ostatní řešení by se hledala obdobně, jako v předchozím příkladu.

Příklad 4.3:

Vypočtete

$$\ln(-3)$$

Řešení:

Funkce přirozený logaritmus není v reálném oboru definována pro nekladná x . V tomto oboru tedy tento příklad nemá řešení.

Uvažujme komplexní přirozený logaritmus (pro komplexní argument). Pak lze očekávat komplexní funkční hodnotu $\hat{z} = x + jy$. Podle zadání

$$\ln(-3) = \hat{z} = x + jy \quad (4.38)$$

Použijeme inverzní funkci k $\ln(x)$ tj. $\exp(x) = e^x$. Formálně umocníme

$$e^{\ln(-3)} = e^{\hat{z}} = e^{x+jy} \quad (4.39)$$

To vede k rovnici

$$e^{\hat{z}} = e^{x+jy} = -3 \quad (4.40)$$

kterou jsme řešili v předchozím příkladu pro jinou hodnotu pravé strany, viz (4.30) v již rozepsaném tvaru pro komplexní exponenciálu. Opakováním naznačeného postupu dostaneme toto řešení, viz (4.37)

$$\ln(-3) = \ln(3) + j\pi = 1,0986 + j3,1416$$

Tento postup platí pro libovolný typ argumentu, reálný, ryze imaginární a imaginární. Pro záporný argument lze použít zjednodušeného postupu. Zadanou funkci upravíme

$$\ln(-3) = \ln(3j^2) = \ln(3) + 2\ln(j) \quad (4.41)$$

Zbývá tedy vypočítat hodnotu

$$\ln(j) = \hat{z} = x + jy \quad (4.42)$$

což odpovídá zjednodušené rovnici (4.38). Opět formálně umocníme

$$e^{\ln(j)} = e^{\hat{z}} = e^{x+jy} \quad (4.43)$$

To vede na rovnici

$$e^{\hat{z}} = e^{x+jy} = j \quad (4.44)$$

Její řešení bychom si měli pamatovat (viz (2.16))

$$\hat{z} = jy = j\frac{\pi}{2} \quad (4.45)$$

Po dosažení do (4.41) dostaneme výsledek

$$\begin{aligned} \ln(-3) &= \ln(3j^2) = \ln(3) + 2\ln(j) = \ln(3) + 2j\frac{\pi}{2} = \\ &= \ln(3) + j\pi = 1,0986 + j3,1416 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Nejjednodušší postup výpočtu $\ln(j)$ vychází z převodu imaginární jednotky na exponenciální tvar $j = \exp(j\frac{\pi}{2})$, viz vztahy (2.16).

$$\ln(j) = \ln(e^{j\frac{\pi}{2}}) = j\frac{\pi}{2} \quad (4.47)$$

5 Stejnoseměrný proud

Toto cvičení má sloužit především k zopakování a doplnění látky. Kromě příkladu na souvislost náboje a stejnosměrného proudu a výpočet výkonu tohoto proudu se systematicky řeší paralelní a seriové spojování odporů.

Příklad 5.1:

Na akumulátoru pro měřicí přístroje čteme tyto údaje:

Napětí: 9V, kapacita 110 mAh, nabíjecí proud: 16 mA, doba nabíjení 10 hod.

Uveďte všechny jeho vlastnosti.

Řešení

Především popíšeme pomocí symbolů po řadě všechny jeho zadané vlastnosti a pokud jsou v jiných jednotkách, převedeme je do soustavy SI:

$$U_0 = 9 \text{ V}, \quad Q = 110 \text{ mAh} = 0,11 \cdot 3600 = 396 \text{ C}, \quad I = 16 \text{ mA}$$

$$T = 10 \text{ hod} = 10 \cdot 3600 = 3,6 \cdot 10^4 \text{ s}$$

První odpověď je, že v nabitém stavu má akumulátor náboj

$$Q_0 = 396 \text{ C} \quad (5.1)$$

Při vybíjení tento náboj klesne z potenciálu $V_2 = U_0 = 9 \text{ V}$ na nulový potenciál $V_1 = 0 \text{ V}$, vykoná se tedy práce

$$A = W_0 = Q_0(V_2 - V_1) = Q_0(U_0 - 0) = Q_0U_0 = 9 \cdot 396 = 3560 \text{ J} = 3,56 \text{ kJ} \quad (5.2)$$

Energie nabitého akumulátoru je $W_0 = 3,56 \text{ kJ}$. Je nutno zdůraznit, že se jedná o maximální teoretickou energii, poněvadž vztah (5.2) předpokládá, že během vybíjení se svorkové napětí nemění. U všech reálných zdrojů však klesá.

Při nabíjení je nutno dodat akumulátoru náboj

$$Q = I \cdot T = 0,016 \cdot 3,6 \cdot 10^4 = 1,6 \cdot 10^{-2} \cdot 3,6 \cdot 10^4 = 5,76 \cdot 10^2 = 576 \text{ C} \quad (5.3)$$

Při nabíjení je nutno dodat energii

$$W = Q \cdot U_0 = 9 \cdot 576 = 5180 \text{ J} = 5,18 \text{ kJ} \quad (5.4)$$

Tento vztah předpokládá, že během nabíjení je napětí na svorkách nabíjecího zdroje rovno svorkovému napětí akumulátoru. Ve skutečnosti je asi o 10 procent vyšší a postupně mírně stoupá.

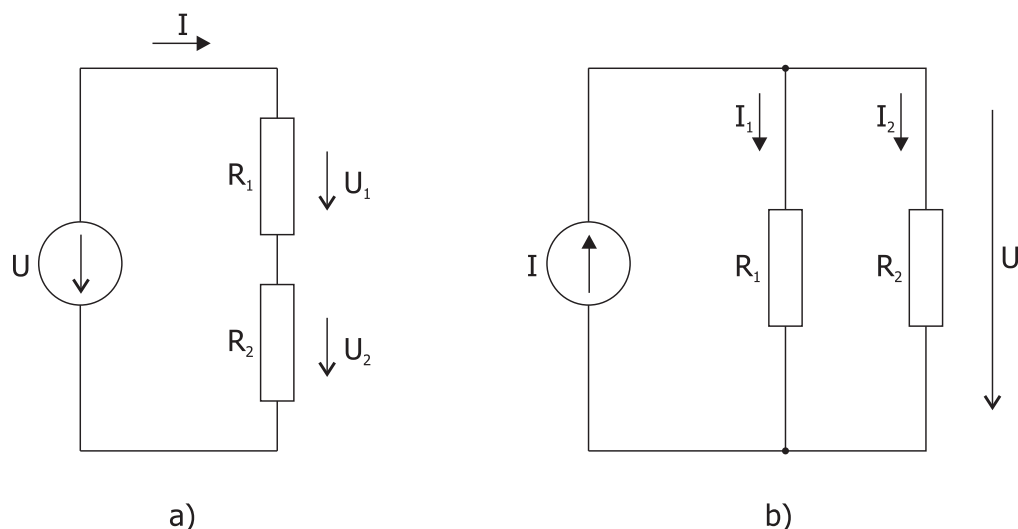
Z hlediska náboje je účinnost akumulátoru

$$\eta = \frac{Q_0}{Q} = \frac{396}{576} = 0,69 = 69\% \quad (5.5)$$

Z energetického hlediska se jedná o maximální účinnost. Reálná účinnost je podstatně nižší.

Příklad 5.2:

Odpor $R_1 = 4 \text{ k}\Omega$ a $R_2 = 8 \text{ k}\Omega$ jsou zapojeny do série a připojeny ke zdroji napětí $U = 240 \text{ V}$, viz obr. 5.1a. Jaké je napětí U_1, U_2 na jednotlivých odporech? Jaký jimi teče proud I ? Lze tento obvod zjednodušit?



Obrázek 5.1: Spojení dvou rezistorů

Řešení:

K řešení tohoto příkladu potřebujeme znát jen Ohmův zákon pro stejnosměrné proudy

$$I = \frac{U}{R} \quad (5.6)$$

a použít jednoduché úvahy. Používáme běžné značení, tj. symbol U pro napětí, I pro proud a R pro odpor. Tentýž termín odpor používáme jak pro obvodový prvek, tak pro jeho parametr. V teorii odvodů se však pro tento obvodový prvek důsledně používá termín rezistor.

Pro určení napětí U_1, U_2 potřebujeme dvě rovnice.

1. Součet napětí na odporech se musí rovnat napětí zdroje

$$U = U_1 + U_2 \quad (5.7)$$

2. Proud tekoucí oběma odpory musí být stejný, $I = I_1 = I_2$. Z Ohmova zákona, $I = U/R$, viz (5.6) plyne:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} = I_2 \quad (5.8)$$

Řešením dvou rovnic (5.7) a (5.8) získáme vztahy pro výpočet hledaných napětí:

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U \quad U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U \quad (5.9)$$

Proud kombinací se snadno určí např. z rovnice (5.8),

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} \quad (5.10)$$

Po dosazení do (5.9) zjistíme, že na odporu o hodnotě $R_1 = 4 \text{ k}\Omega$ je napětí $U_1 = 80 \text{ V}$ a na odporu $R_2 = 12 \text{ k}\Omega$ napětí $U_2 = 160 \text{ V}$. Součet napětí na odporech je roven napětí zdroje, rovnice (5.7) je splněna, což potvrzuje správnost výpočtu. Z rovnic (5.8) plyne, že poměr napětí na odporech je roven poměru odporů

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{R_1} \quad (5.11)$$

Na menším odporu je tedy nižší napětí. Výsledek splňuje jak tuto kvalitativní podmínku, tak kvantitativní požadavek vztahu (5.11).

Z rovnice (5.10) dostaneme v obou případech pro proud tekoucí odpory hodnotu $I = 20 \text{ mA}$.

Tento obvod lze zjednodušit. Oběma odpory teče tentýž proud I . Podle vztahů (5.8) platí pro napětí U_1 a U_2 na jednotlivých odporech

$$U_1 = R_1 I \quad U_2 = R_2 I \quad (5.12)$$

Po dosazení do (5.7) a jednoduchých úpravách dostaneme výraz

$$U = U_1 + U_2 = R_1 I + R_2 I = I(R_1 + R_2) = IR \quad (5.13)$$

Z tohoto vztahu plyne,

$$R = R_1 + R_2 \quad (5.14)$$

tedy dva sériově spojené odpory můžeme nahradit jediným, jehož velikost je rovna součtu dílčích odporů. To platí i pro sériová spojení více odporů.

Sériová kombinace odporů se v elektronice často používá jako dělič napětí. Snížené napětí odebíráme z jednoho z odporů. Předpokládejme, že napětí odebíráme z odporu R_2 . Pokud je dělič nezatížený, tj. na jeho výstup je teoreticky připojen pouze ideální voltmetr, platí pro odebírané napětí druhý vztah z (5.9), tj.

$$U_v = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U \quad (5.15)$$

kde U je napětí zdroje a U_v napětí na výstupu nezatíženého děliče. Ve vztahu (5.15) je v čitateli ten odpor děliče, z něhož se odebírá napětí. Tento vztah se často používá, proto je dobré si jej pamatovat.

Příklad 5.3:

Odpory $R_1 = 4 \text{ k}\Omega$ a $R_2 = 8 \text{ k}\Omega$ jsou zapojeny paralelně a jsou připojeny ke zdroji proudu $I = 6 \text{ mA}$, viz obr. 5.1b. Vypočítejte proudy I_1, I_2 jimi tekoucí. Jaké je na nich napětí? Lze tento obvod zjednodušit?

Řešení:

K řešení tohoto příkladu potřebujeme znát jen Ohmův zákon pro stejnosměrné proudy, který nyní píšeme ve tvaru

$$U = RI \quad (5.16)$$

Pro určení proudů I_1, I_2 potřebujeme dvě rovnice.

1. Součet dílčích proudů se musí rovnat celkovému proudu

$$I = I_1 + I_2 \quad (5.17)$$

2. Napětí na obou odporech musí být stejné, $U = U_1 = U_2$. Z Ohmova zákona, $U = RI$ (5.16) plyne:

$$U_1 = R_1 I_1 = R_2 I_2 = U_2 \quad (5.18)$$

Řešením těchto dvou rovnic získáme vztahy pro určení jednotlivých proudů:

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \quad (5.19)$$

Napětí na jednotlivých odporech vypočítáme ze vztahu (5.18).

$$U = R_1 I_1 = R_2 I_2 \quad (5.20)$$

Po dosazení do (5.19) zjistíme, že odporem $R_1 = 4 \text{ k}\Omega$ teče proud $I_1 = 4 \text{ mA}$ a odporem $R_2 = 8 \text{ k}\Omega$ proud $I_2 = 2 \text{ mA}$. Součet proudů tekoucích jednotlivými odpory je roven celkovému proudu zdroje podle zadání. Rovnice (5.17) je splněna, což potvrzuje správnost výpočtu. Z rovnic (5.18) plyne, že poměr proudů na odporech je roven převrácenému poměru hodnot odporů

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_2} \quad (5.21)$$

Menším odporem teče tedy větší proud. Výsledek splňuje jak tuto kvalitativní podmínku, tak kvantitativní požadavek daný vztahem (5.21).

Z rovnic (5.20) dostaneme v obou případech pro napětí na odporech hodnotu $U = 16 \text{ V}$.

Tento obvod lze zjednodušit. Na obou odporech je stejné napětí U . Podle vztahů (5.18) platí pro proudy I_1 a I_2 tekoucí jednotlivými odpory vztahy

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \quad I_2 = \frac{U}{R_2} \quad (5.22)$$

Po dosazení do (5.17) a jednoduchých úpravách dostaneme výraz

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = U \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = \frac{U}{R} \quad (5.23)$$

Z tohoto vztahu plyne

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (5.24)$$

tedy dva paralelně spojené odpory můžeme nahradit jediným, jehož velikost je dána tímto vztahem (5.24). Často se slovně uvádí ve formulaci: Převrácená hodnota výsledného odporu je rovna součtu převrácených hodnot dílčích odporů. Pro praktické výpočty je však vhodnější vztah (5.24). Proto je dobré si jej pamatovat.

Paralelní kombinace odporů lze použít jako děliče proudu. V praxi se však tato možnost téměř nevyužívá. Z tohoto důvodu se zdroje proudu používají zřídka.

Pokud důsledně v tomto příkladu nahradíme odpor R vodivostí G ,

$$G = \frac{1}{R} \quad (5.25)$$

všechny proudy zaměníme na napětí a naopak, budou všechny vztahy tohoto příkladu formálně shodné s odpovídajícími vztahy předchozího příkladu. Je nutno ještě dodat, že v tomto příkladu řešíme paralelní obvod napájený zdrojem proudu a v předchozím příkladu sériový obvod napájený zdrojem napětí. Tuto korespondenci nazýváme dualitou a v teorii obvodů se běžně využívá.

6 Harmonický signál

V tomto cvičení se počítají dva typy příkladů

1. Souvislost mezi harmonickým časovým průběhem, rotujícím fázorem a fázorem.
2. Výpočet parametrů střídavého proudu (efektivní a střední hodnota) pro dvoucestné a jednocestné usměrnění.

Příklad 6.1:

Jaké vlastnosti má elektrické napětí v síťové zásuvce v domácnosti? Uveďte úplný výčet.

Řešení:

Efektivní hodnota je $U = 230$ V.

Maximální hodnota činí

$$U_m = \sqrt{2}U \doteq 325 \text{ V}$$

Okamžitá hodnota napětí se tedy mění od -325 V do +325 V, rozkmit je 650 V.

Střední aritmetická hodnota se určí podle vztahu

$$U_{sa} = \frac{2}{\pi}U_m \doteq 207 \text{ V}$$

Často užívaný činitel tvaru je

$$k_t = \frac{U}{U_{sa}} \doteq 1,11$$

Frekvence sítě je $f = 50$ Hz. Periodu T určíme podle vztahu

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = \frac{1}{5 \cdot 10^1} = 10^{-1} \frac{1}{5} = 10^{-1} \cdot 0,2 = 10^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-1} = 2 \cdot 10^{-2} = 0,02 \text{ s} = 20 \text{ ms}$$

Výpočet je proveden možná zbytečně podrobně z toho důvodu, že studenti v něm dělají často chybu. Proto je naznačen postup, který by měl nebezpečí vzniku chyby snížit.

Úhlová frekvence ω činí

$$\omega = 2\pi f = 314 \text{ rad/s}$$

Příklad 6.2:

Napětí je popsáno vztahem

$$u(t) = 120 \cos\left(942t + \frac{\pi}{6}\right) \quad (6.1)$$

Uveďte všechny jeho vlastnosti. Napište jej v symbolickém tvaru a uveďte jeho fázor.

Řešení:

Poněvadž ve vztahu pro okamžitou hodnotu napětí je funkce kosinus, jedná se o napětí harmonické.

1. Amplituda $U_0 = 120$ V, což znamená, že okamžitá hodnota $u(t)$ se mění od -120 do +120 V.
2. Úhlová frekvence $\omega = 942$ rad/s. Frekvence

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \doteq 150 \text{ Hz}$$

Perioda

$$T = \frac{1}{f} \doteq 6,67 \text{ ms}$$

3. Fáze

$$\varphi = 942t + \frac{\pi}{6}$$

4. Fázová konstanta

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

Vzhledem k tomu, že je udáno jen jedno napětí, nelze mluvit o fázovém posuvu.

5. Z amplitudy lze odvodit další parametry:

Pro efektivní hodnotu použijeme známý vztah, který platí jen pro harmonický průběh (odvodíme jej později)

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \doteq 84,8 \text{ V}$$

Střední hodnota U_s je rovna nule, jedná se o střídavé a navíc harmonické napětí, $U_s = 0$. Je nutno počítat střední aritmetickou hodnotu, která má podle vzorce, který odvodíme později, hodnotu

$$U_{as} = \frac{2}{\pi} U_0 \doteq 76,4 \text{ V}$$

Střední aritmetická hodnota se počítá z absolutní hodnoty harmonického napětí, tedy z ideálně dvoucestně usměrněného napětí.

Symbolický tvar se píše v mnoha formách, jednak jako rotující fázor, jednak jako fázor, který může být v měřítku amplitud nebo efektivních hodnot. Úplný přehled následuje.

1. Rotující fázor

(a) Měřítko amplitud

$$\hat{u}(t) = U_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = 120 \exp\left(j\left(942t + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 120 e^{j(942t + \frac{\pi}{6})} \quad (6.2)$$

(b) Měřítko efektivních hodnot

$$\hat{u}(t) = \sqrt{2}U e^{j(\omega t + \varphi)} = 1,414 \cdot 84,8 \exp\left(j\left(942t + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 120 e^{j(942t + \frac{\pi}{6})} \quad (6.3)$$

2. Fázor

(a) Měřítko amplitud

$$\hat{U} = U_0 e^{j\varphi} = 120 \exp\left(j\frac{\pi}{6}\right) = 120 e^{j\frac{\pi}{6}} \quad (6.4)$$

(b) Měřítko efektivních hodnot

$$\hat{U} = U e^{j\varphi} = 84,8 \exp\left(j\frac{\pi}{6}\right) = 84,8 e^{j\frac{\pi}{6}} \quad (6.5)$$

Pozor: U fázoru dáváme přednost měřítku efektivních hodnot, poněvadž ty se obvykle měří. Rovněž tak nepoužíváme rozšířeného zápisu pro exponenciální funkci, ale její obecnou mocninu, i když se složitější výraz píše do exponentu obtížně.

Příklad 6.3:

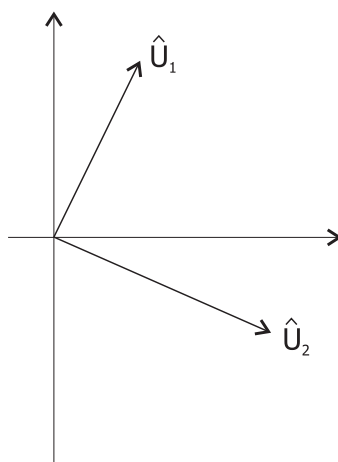
Dvě napětí jsou popsána vztahy

$$u_1(t) = 100 \cos\left(314t - \frac{\pi}{6}\right) \quad u_2(t) = 150 \cos\left(314t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (6.6)$$

Co vše lze o nich říci?

Řešení:

Pro jednotlivá napětí lze aplikovat vše, co bylo řečeno v příkladu 6.2. Obě napětí mají stejnou frekvenci, takže můžeme určit jejich fázový posuv.

Obrázek 6.1: Grafické znázornění fázorů napětí u_1 a u_2

1. Napětí u_2 předbíhá napětí u_1 o úhel

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

2. Napětí u_1 se zpožďuje za napětím u_2 o tentýž úhel 90° . Fázory obou napětí jsou znázorněny na obr. 6.1.

Příklad 6.4:

Dvě napětí jsou popsána vztahy

$$u_1(t) = 50 \cos\left(314t + \frac{2}{3}\pi\right) \quad u_2(t) = 50 \cos\left(628t + \frac{4}{3}\pi\right) \quad (6.7)$$

Co vše lze o nich říci?

Řešení:

Pro jednotlivá napětí lze aplikovat vše, co bylo řečeno v příkladu 6.2. Napětí nemají stejnou frekvenci, takže nemůžeme určit jejich fázový posuv. Fázový posuv se tedy mění s časem.

Příklad 6.5:

Napětí popsané vztahem

$$u(t) = U_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (6.8)$$

nabývá v okamžiku $t = 0$ hodnoty $u(t) = 30$ V. Určete jeho amplitudu.

Řešení

Po dosazení zadaných hodnot získáme rovnici

$$30 = U_0 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = U_0 \cos(60^\circ)$$

Poněvadž $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$, což lze například odvodit z pravoúhlého trojúhelníku s úhly 60° a 30° , s odvěsnami 1 a $\sqrt{3}$ a s přeponou 2, viz obr. 3.1, zjistíme

$$U_0 = 60 \text{ V.}$$

Příklad 6.6:

Odvoďte vztah pro efektivní a střední hodnotu jednocestně a dvoucestně ideálně usměrněného napětí.

Řešení:

Napětí je popsáno vztahem

$$u(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

to znamená, že jeho fázová konstanta je nulová.

Efektivní hodnota je definována vztahem

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (u(t))^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 \sin^2(\omega t) dt} = U_0 \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt} \quad (6.9)$$

kde T je perioda.

Úloha se tedy redukuje na výpočet integrálu

$$\int_0^T \sin^2(\omega t) dt. \quad (6.10)$$

Na první pohled by se zdálo vhodné použít substituci $x = \omega t$ a dvakrát integrovat metodou per partes. Tento přímočarý postup by však byl složitý, namáhavý a tudíž by se mohl stát i zdrojem mnoha chyb. Vhodnější je jiný, zdánlivě složitější postup, který se často používá i při jiných výpočtech. Použijeme jej proto i zde s tím, že je vhodné si jej zapamatovat.

Druhou mocninu sinu převedeme na první mocninu kosinu dvojnásobného argumentu takto:

Platí

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (6.11)$$

Tuto rovnici dále upravíme pomocí vztahu

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

a vypočteme $\cos^2 x$. Dostaneme

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad (6.12)$$

Tento výraz dosadíme do (6.11) za $\cos^2 x$ a provedeme v něm jednoduché úpravy, jak je naznačeno dále:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \quad (6.13)$$

Z krajních stran této rovnice tj.

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

snadno dostaneme hledaný výraz pro $\sin^2 x$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad (6.14)$$

Připomeňme, že tento vztah jsme již odvodili dříve jiným způsobem, viz vztah 3.24. Nyní jsme vytvořili podmínky pro snadný výpočet klíčového integrálu (6.10). Budeme jej aplikovat podle zadání.

Dvoucestné usměrnění – efektivní hodnota

Pro dvoucestně usměrněné harmonické napětí platí

$$u_s(t) = |U_0 \sin(\omega t)| \quad \rightarrow \quad (u_s(t))^2 = |U_0 \sin(\omega t)|^2 = U_0^2 \sin^2(\omega t) \quad (6.15)$$

Při výpočtu efektivní hodnoty se ve vztazích (6.9) a (6.10) integruje přes celou periodu T . Po nahrazení $x = \omega t$ v (6.14) a dosazení z (6.14) do (6.10) dostaneme

$$\int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos(2\omega t) dt \quad (6.16)$$

Druhý integrál je roven nule, poněvadž se integruje periodická funkce přes dvě periody. Můžeme se o tom též přesvědčit přímým výpočtem.

$$\int_0^T \cos(2\omega t) dt = \left[\frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right]_0^T = \frac{1}{2\omega} [\sin(2\omega T) - \sin(2\omega 0)] = \frac{1}{2\omega} [\sin(4\pi) - \sin(0)] = 0 \quad (6.17)$$

Při úpravách jsme použili známého praktického vztahu

$$\omega T = 2\pi f T = 2\pi, \quad (6.18)$$

poněvadž

$$f = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad f T = 1 \quad (6.19)$$

První integrál v (6.16) již spočteme velmi snadno a dostaneme výsledek

$$\int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T dt - 0 = \frac{T}{2} \quad (6.20)$$

Po dosazení tohoto výsledku do definice efektivní hodnoty (6.9) dostáváme známý výraz

$$U = U_0 \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt} = U_0 \sqrt{\frac{1}{T} \frac{T}{2}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \doteq 0,707 U_0 \quad (6.21)$$

Efektivní hodnota dvoucestně usměrněného harmonického napětí je shodná s efektivní hodnotou původního harmonického napětí.

Dvoucestné usměrnění – střední hodnota

Vyjdeme ze statistické definice aritmetické střední hodnoty

$$U_s = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 |\sin(\omega t)| dt \quad (6.22)$$

V této definici se integruje přes dvě identické půlvlny. Výpočet zjednodušíme tím, že budeme integrovat přes jednu půlvlnu (ve vztahu (6.22) dosadíme za horní integrační mez $T/2$ a výsledek vynásobíme dvěma). Zvolíme první půlvlnu a v integrálu odpadne

absolutní hodnota

$$\begin{aligned}
 U_s &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} U_0 \sin(\omega t) dt = U_0 \frac{2}{T} \left[-\frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right]_0^{T/2} = -U_0 \frac{2}{T} \frac{1}{\omega} \left[\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) - \cos(\omega 0) \right] = \\
 &= -U_0 \frac{2}{T} \frac{T}{2\pi} \left[\cos\left(\frac{2\pi T}{T} \frac{T}{2}\right) - \cos(0) \right] = -U_0 \frac{1}{\pi} (\cos \pi - \cos 0) = \\
 &= -U_0 \frac{1}{\pi} (-1 - 1) = \frac{2}{\pi} U_0
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Při úpravách jsme opět použili vztahu $\omega = \frac{2\pi}{T}$, viz vztahy (6.18) a (6.19). Docházíme k závěru, že střední hodnota napětí dvoucestného usměrnění je dána vztahem

$$U_s = \frac{2}{\pi} U_0 \tag{6.24}$$

Jednocestné usměrnění – efektivní hodnota

Lze postupovat dvěma způsoby:

1. Energetickou úvahou
2. Úpravou výpočtu pro dvoucestné usměrnění.

Energetická úvaha vychází z toho, že výkon jednocestného usměrnění P_1 je polovinou výkonu dvoucestného usměrnění P_2

$$P_1 = \frac{P_2}{2} \tag{6.25}$$

Je-li k usměrňovači připojen odpor R , platí pro efektivní hodnotu napětí U a uvolněný výkon P podle definice vztah

$$P = \frac{U^2}{R} \tag{6.26}$$

Po dosazení ze vztahu (6.26) do vztahu (6.25) dostaneme

$$\frac{U_1^2}{R} = \frac{U_2^2}{2R} \tag{6.27}$$

$$U_1^2 = \frac{U_2^2}{2} = \frac{U_0^2}{2 \cdot 2} \tag{6.28}$$

poněvadž pro dvoucestné usměrnění $U_2 = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$, jak jsme již odvodili. Docházíme k závěru, že efektivní hodnota napětí na výstupu jednocestného usměrňovače je polovinou jeho amplitudy

$$U_1 = \frac{U_0}{2} \tag{6.29}$$

Při výpočtu se postupuje stejně jako pro případ dvoucestného usměrnění s tím, že se ve vztazích (6.9) a (6.10) integruje přes polovinu periody T , tj. horní integrační mez je $\frac{T}{2}$.

$$\int_0^{T/2} \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{T/2} dt - \frac{1}{2} \int_0^{T/2} \cos(2\omega t) dt \tag{6.30}$$

Druhý integrál je roven nule, poněvadž se integruje periodická funkce přes jednu periodu. Můžeme se o tom též přesvědčit přímým výpočtem.

$$\begin{aligned} \int_0^{T/2} \cos(2\omega t) dt &= \left[\frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right]_0^{T/2} = \frac{1}{2\omega} \left[\sin\left(2\omega \frac{T}{2}\right) - \sin(2\omega 0) \right] = \\ &= \frac{1}{2\omega} [\sin(2\pi) - \sin(0)] = 0 \end{aligned} \quad (6.31)$$

Při úpravách jsme opět použili známého praktického vztahu (6.18), $\omega T = 2\pi fT = 2\pi$. První integrál v (6.30) již vypočítáme velmi snadno a dostaneme výsledek

$$\int_0^{T/2} \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{T/2} dt - 0 = \frac{1}{2} \frac{T}{2} = \frac{T}{4} \quad (6.32)$$

Po dosazení tohoto výsledku do definice efektivní hodnoty (6.9) dostáváme známý výraz

$$U = U_0 \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T/2} \sin^2(\omega t) dt} = U_0 \sqrt{\frac{1}{T} \frac{T}{4}} = \frac{U_0}{\sqrt{4}} = \frac{U_0}{2} \quad (6.33)$$

Jednocestné usměrnění – střední hodnota

Střední hodnota napětí pro jednocestné usměrnění bude rovna polovině střední hodnoty dvoucestného usměrnění. Podle vztahu (6.24) tedy platí

$$U_{s1} = \frac{U_{s2}}{2} = \frac{1}{\pi} U_0 \quad (6.34)$$

K témuž výsledku můžeme také dojít, když ve vztahu (6.22) volíme integrační mez $\frac{T}{2}$. Střední hodnota se však počítá přes celou periodu

$$\begin{aligned} U_s &= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} U_0 \sin(\omega t) dt = U_0 \frac{1}{T} \left[-\frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right]_0^{T/2} = -U_0 \frac{1}{T} \frac{1}{\omega} \left[\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) - \cos(\omega 0) \right] = \\ &= -U_0 \frac{1}{T} \frac{T}{2\pi} \left[\cos\left(\frac{2\pi T}{T} \frac{T}{2}\right) - \cos(0) \right] = \\ &= -U_0 \frac{1}{2\pi} (\cos \pi - \cos 0) = -U_0 \frac{1}{2\pi} (-1 - 1) = \frac{1}{\pi} U_0 \end{aligned} \quad (6.35)$$

7 Základní prvky

Cílem tohoto cvičení je, aby studenti pochopili význam fázorového popisu harmonického napětí a proudu a jeho souvislost s časovým průběhem. Procvičuje se na třech typech příkladů: napětí a proud s počáteční fází, vztah mezi nimi na ideálním kondenzátoru a na ideální cívce.

Příklad 7.1:

Harmonické napětí má efektivní hodnotu 50 V, frekvenci 2 kHz a počáteční fázi 45° . Harmonický proud se zpožďuje za napětím o 60° a má efektivní hodnotu 15 mA. Napište

oba fázory, uveďte časové průběhy a nakreslete fázorový diagram.

Řešení:

Otázka: Je nutné používat slova *harmonický* u proudu? Nestací jen u napětí?

Odpověď: Pokud se slovo *harmonický* u proudu vynechá, mělo by se říci, že se jedná o lineární obvod.

Veličiny označme symboly podle zadání: $U = 50 \text{ V}$, $\varphi = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$, $I = 0,015 \text{ A}$, $\Delta\varphi = -60^\circ = -\frac{\pi}{3} \text{ rad}$. Pro úhlovou frekvenci platí $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 2000 = 4\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$. Podle zadání se proud zpožďuje za napětím, fázový posuv je tedy se znaménkem minus. Pro fázor napětí a proudu pak můžeme podle zadání psát

$$\begin{aligned}\hat{U} &= U \cdot e^{j\varphi} = 50 e^{j\frac{\pi}{4}} \quad \text{V} \\ \hat{I} &= I \cdot e^{j\psi} = I \cdot e^{j(\varphi+\Delta\varphi)} = 0,015 e^{-j\frac{\pi}{12}} \quad \text{A}\end{aligned}\quad (7.1)$$

Úhly ve fázorech by se měly vždy uvádět v radiánech, tedy $-15^\circ = -\frac{\pi}{12} \text{ rad}$.

Pokud chceme vypočítat časový průběh, je nutno převést fázor do měřítka amplitud, tj. efektivní hodnotu vynásobit $\sqrt{2}$. Pro časový průběh napětí platí

$$\hat{u}(t) = \sqrt{2}\hat{U} \cdot e^{j\omega t} = \sqrt{2}U \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \doteq 70 e^{j(4\pi \cdot 10^3 t + \frac{\pi}{4})} \quad \text{V} \quad (7.2)$$

Fyzikální význam má reálná nebo imaginární složka. Uvažujme imaginární složku

$$u(t) \doteq 70 \sin\left(4\pi \cdot 10^3 t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{V} \quad (7.3)$$

Ze vztahu (7.3) plyne, že amplituda (maximální hodnota) napětí je 70 V a jeho fázový úhel 45° .

Pro časový průběh proudu platí analogicky

$$\hat{i}(t) = \sqrt{2}\hat{I} \cdot e^{j\omega t} = \sqrt{2}I \cdot e^{j(\omega t + \psi)} \doteq 21,2 e^{j(4\pi \cdot 10^3 t - \frac{\pi}{12})} \quad \text{mA} \quad (7.4)$$

Fyzikální význam má reálná nebo imaginární složka. Uvažujme imaginární složku

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin\left(\omega t + \psi\right) \doteq 21,2 \sin\left(4\pi \cdot 10^3 t - \frac{\pi}{12}\right) \quad \text{mA} \quad (7.5)$$

Ze vztahu (7.5) plyne, že amplituda (maximální hodnota) proudu je 21,2 mA a jeho fázový úhel -15° .

Přibližný fázorový diagram je na obr. 7.1, časový průběh proudu a napětí na obr. 7.2.

Příklad 7.2:

Cívka o indukčnosti 0,22 H je připojena ke zdroji napětí efektivní hodnoty 24 V a proměnné frekvence. Jaký proud teče cívkou pro frekvence 10 Hz, 300 Hz, 3 kHz a 10 kHz?

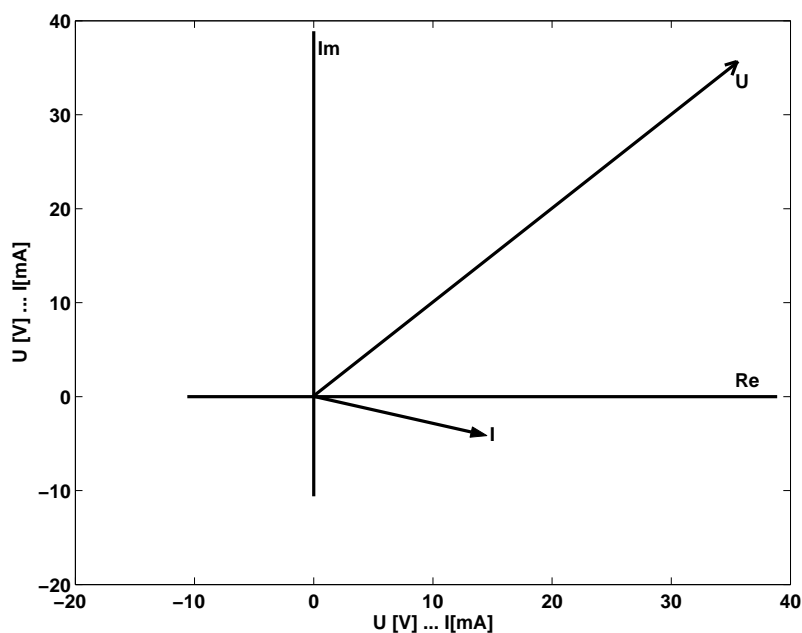
Řešení:

Řeší se pomocí Ohmova zákona pro střídavé proudy

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}} \quad (7.6)$$

kde \hat{I} je fázor proudu, \hat{U} je fázor napětí a \hat{Z} je obvodový parametr zvaný impedance. Pro impedanci cívky o indukčnosti L při úhlové frekvenci $\omega = 2\pi f$ platí vztah

$$\hat{Z} = j\omega L \quad (7.7)$$



Obrázek 7.1: Fázorový diagram mezi napětím a proudem (příklad 7.1)

Předpokládejme pro jednoduchost, že počáteční fáze napětí je nulová, pak $\hat{U} = U$ a po dosazení z (7.7) do (7.6) dostaneme pro fázor proudu vztah

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}} = \frac{U}{\hat{Z}} = \frac{U}{j\omega L} = -j \frac{U}{\omega L} \quad (7.8)$$

Při úpravě jsme využili důležitého praktického vztahu

$$\frac{1}{j} = -j$$

Fázor proudu je ve složkovém tvaru. Převédeme jej do tvaru exponenciálního, když si připomeneme tento další praktický vztah, viz (2.16)

$$-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Dostaneme

$$\hat{I} = -j \frac{U}{\omega L} = \frac{U}{\omega L} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (7.9)$$

Obecný vztah pro fázor proudu je

$$\hat{I} = I e^{-j\varphi} \quad (7.10)$$

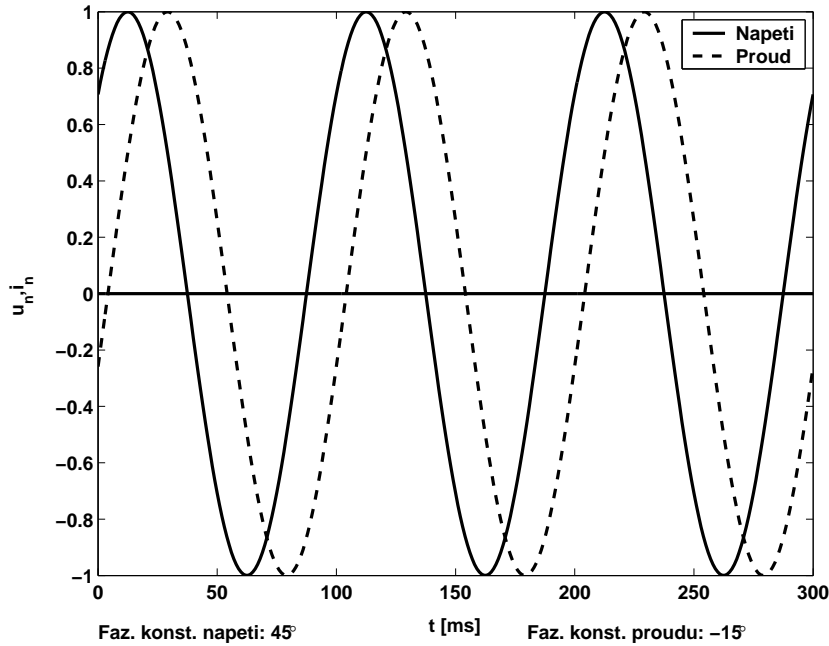
Z porovnání (7.10) a (7.9) plyne vztah pro efektivní hodnotu a fázovou konstantu proudu tekoucího cívkou.

$$I = \frac{U}{\omega L} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad (7.11)$$

Fyzikální význam posledních vztahů je tento. Efektivní hodnota proudu tekoucího cívkou při konstantním budícím napětí je nepřímo úměrná frekvenci a indukčnosti. Je též úměrná budícímu napětí, poněvadž obvod je lineární. Proud se zpožďuje o úhel 90° za napětím. Z první části vztahu (7.11) vypočteme, že pro zadané frekvence teče ideální cívkou po řadě proud 1,74 A, 57,9 mA, 5,8 mA a 1,7 mA.

Příklad 7.3:

Kondenzátor o kapacitě 47 nF je připojen ke zdroji napětí o efektivní hodnotě 15 V



Obrázek 7.2: Časový průběh napětí (plná čára) a proudu (tečkovaná čára) (příklad 7.1)

a proměnné frekvenci. Jaký proud teče kondenzátorem pro frekvence 1 kHz, 30 kHz, 1 MHz, 30 MHz?

Řešení:

Řeší se pomocí Ohmova zákona pro střídavé proudy (7.6), tj.

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}} \quad (7.12)$$

kde \hat{I} je fázor proudu, \hat{U} je fázor napětí a \hat{Z} je impedance. Pro impedanci kondenzátoru o kapacitě C při úhlové frekvenci $\omega = 2\pi f$ platí vztah

$$\hat{Z} = \frac{1}{j\omega C} \quad (7.13)$$

Předpokládejme opět, že počáteční fáze napětí je nulová, pak $\hat{U} = U$ a po dosazení z (7.13) do (7.12) dostaneme pro fázor proudu vztah

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}} = \frac{U}{\frac{1}{j\omega C}} = j\omega CU \quad (7.14)$$

Fázor proudu je ve složkovém tvaru. Převeďme jej do tvaru exponenciálního, pomocí tohoto praktického vztahu, viz (2.16)

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Dostaneme

$$\hat{I} = j\omega CU = \omega CU \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (7.15)$$

Obecný vztah pro fázor proudu je

$$\hat{I} = I e^{j\varphi} \quad (7.16)$$

Z porovnání (7.16) a (7.15) plynou pro efektivní hodnotu a fázovou konstantu proudu tekoucího kondenzátorem vztahy

$$I = \omega CU \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (7.17)$$

Fyzikální význam posledních vztahů je tento. Efektivní hodnota proudu tekoucího kondenzátorem při konstantním budícím napětí je přímo úměrná frekvenci a kapacitě. Poněvadž obvod je lineární, je efektivní hodnota proudu též úměrná budícímu napětí. Proud předbíhá napětí o úhel 90° . Z první části vztahu (7.17) vypočteme, že pro zadané frekvence teče kondenzátorem po řadě proud 4,4 mA, 133 mA, 4,43 A a 133 A.

8 Harmonické střídavé proudy – jednoduché obvody

Toto cvičení je klíčové. Pro sériovou či paralelní kombinaci disipativního a akumulativního prvku buzeného harmonickým napětím se počítají všechny obvodové veličiny, dále všechny výkony, činné a jalové proudy, činitel jakosti nebo ztrátový činitel, kompenzace účinníku atd. Vypočtené hodnoty se ověřují jiným nezávislým výpočtem. Lze je též aplikovat na sériový nebo paralelní rezonanční obvod. Paralelním rezonančním obvodem se rozumí paralelní zapojení všech tří prvků: cívky, kondenzátoru a odporu.

Příklad 8.1:

Ideální cívka o indukčnosti 0,65 H a ideální odpor 300Ω jsou zapojeny do série a připojeny ke zdroji harmonického napětí 230 V o frekvenci 50 Hz. Vypočítejte všechny obvodové a další významné veličiny (napětí na obvodových prvcích, proud, výkony, účinník, činitel jakosti, apod.).

Řešení:

Obecný postup

Výchozím vztahem pro výpočet základních obvodových veličin (proudů a napětí) je Ohmův zákon pro střídavé proudy. Poněvadž se jedná o sériové zapojení dvou prvků, kdy se impedance sčítají, je vhodné pracovat s formou Ohmova zákona pro impedance

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}} \quad (8.1)$$

kde je \hat{U} fázor napětí, \hat{I} fázor proudu a \hat{Z} je impedance. Pozor! Impedance není fázor, ale komplexní obvodový parametr.

Pro impedance jednotlivých ideálních obvodových prvků platí následující vztahy

1. Ideální rezistor o odporu R

$$\hat{Z} = \hat{Z}_R = R = R e^{j0} \quad (8.2)$$

2. Ideální cívka o indukčnosti L

$$\hat{Z} = \hat{Z}_L = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (8.3)$$

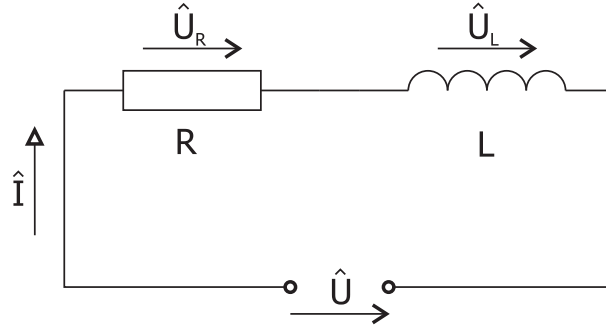
3. Ideální kondenzátor o kapacitě C

$$\hat{Z} = \hat{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (8.4)$$

V předchozích vztazích je uveden jak složkový, tak exponenciální tvar, symbol $\omega = 2\pi f$ je použit pro úhlovou frekvenci.

Vlastní řešení

Schéma obvodu a všechny důležité obvodové veličiny a parametry jsou znázorněny na obr. 8.1. Všeobecně je úkolem řešení obvodu vypočítat odezvu na budící obvodovou veličinu, či veličiny. V našem případě je budící veličinou harmonické napětí poskytované ideálním zdrojem napětí. Odezvou, při buzení ideálními zdroji napětí, jsou všeobecně proudy tekoucí jednotlivými prvky a napětí na pasivních prvcích. V našem jednoduchém případě se v případě odezev jedná o jediný proud, který teče oběma prvky, a o napětí na nich.



Obrázek 8.1: Obvodové schéma

Pro výpočet fázoru proudu \hat{I} použijeme Ohmův zákon pro střídavé proudy (8.1). Nejprve musíme určit impedanci obvodu \hat{Z} . Podle zadání se jedná o sériové zapojení rezistoru a cívky, impedance se sčítají, výsledná impedance ve složkovém tvaru je dána vztahem

$$\hat{Z} = R + j\omega L = 300 + j204 \Omega \quad (8.5)$$

Pro výpočty je často vhodnější exponenciální tvar

$$\hat{Z} = Z_0 e^{j\varphi} = 363 e^{j\varphi} \Omega \quad \text{kde} \quad \varphi = 34,2^\circ \quad (8.6)$$

Při výpočtu absolutní hodnoty (modulu) Z_0 a fáze φ impedance jsme po řadě použili vztahy

$$Z_0 = \sqrt{(\text{Re}(\hat{Z}))^2 + (\text{Im}(\hat{Z}))^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (8.7)$$

$$\varphi = \arctan \frac{\text{Im}(\hat{Z})}{\text{Re}(\hat{Z})} = \arctan \frac{\omega L}{R} \quad (8.8)$$

Symboly Re a Im jsou po řadě označeny reálné a imaginární složky komplexního čísla. Zjednodušený vztah pro výpočet fázového úhlu můžeme použít, viz (2.14), poněvadž pro pasivní obvodové prvky leží impedance v pravé komplexní polorovině.

To platí pro všechny výpočty z oblasti dvojpólů a proto to nadále nebudeme zdůrazňovat. Připomínáme však, že v obecném případě (záporná reálná složka) je nutno použít pro výpočet fázového úhlu univerzální vztah (2.15). Počáteční fázi napětí volíme pro jednoduchost nulovou, tj.

$$\hat{U} = U = U e^{j\varphi_U} = U e^{j0} \quad \varphi_U = 0 \quad (8.9)$$

Proud pak určíme z Ohmova zákona pro střídavé proudy

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}} = \frac{U}{Z_0 e^{j\varphi}} = \frac{U}{Z_0} e^{-j\varphi} = I e^{j\varphi_I} = 0,634 e^{j\varphi_I} \quad \varphi_I = -34,2^\circ \quad (8.10)$$

kde $\varphi_I = -\varphi$ je fázová konstanta proudu.

Výsledek (8.10) můžeme fyzikálně interpretovat (vysvětlit) takto. Efektivní hodnota proudu tekoucího obvodem činí 0,634 A. Poněvadž fázová konstanta (počáteční fáze) napětí je nulová, viz (8.9), a fázová konstanta proudu $\varphi_I = -34,4^\circ$ je záporná, proud v obvodu se zpožďuje za napětím o úhel $34,4^\circ$. Napětí tudíž předbíhá proud o úhel $34,4^\circ$. Fázový posuv mezi napětím a proudem, měřený od proudu k napětí je $\varphi_U - \varphi_I = 34,4^\circ$. Fázový posuv mezi napětím a proudem, měřený od napětí k proudu je $\varphi_I - \varphi_U = -34,4^\circ$. Lépe je fázový posuv pochopitelný z fázorového diagramu na obr. 8.2b.

Napětí na odporu R určíme z Ohmova zákona a ze znalosti proudu, který jím teče.

$$\begin{aligned}\hat{U}_R &= \hat{Z}_R \hat{I} = R \hat{I} = RI e^{j\varphi_I} = RI e^{-j\varphi} = U_R e^{j\varphi_R} = 190 e^{j\varphi_R} \\ U_R &= 190\text{V} \quad \varphi_R = -34,2^\circ\end{aligned}\quad (8.11)$$

Docházíme k tomuto výsledku. Napětí na odporu má efektivní hodnotu $U_R = 190$ V. Poněvadž je ve fázi s proudem, $\varphi_R = \varphi_I$, zpožďuje se za napětím zdroje o úhel $34,4^\circ$. Napětí zdroje tudíž předbíhá napětí na odporu o úhel $34,4^\circ$.

Napětí na cívce o indukčnosti L je⁴

$$\begin{aligned}\hat{U}_L &= \hat{Z}_L \hat{I} = j\omega L \hat{I} = j\omega LI e^{j\varphi_I} = \omega LI e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\varphi_I} = \omega LI e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\varphi} = U_L e^{j\varphi_L} = 130 e^{j\varphi_L} \\ U_L &= 130\text{V} \quad \varphi_L = 55,8^\circ\end{aligned}\quad (8.12)$$

Při odvození jsme použili vztah

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

o jehož platnosti se snadno přesvědčíme dosazením viz též vztah (2.16). Máme si jej však pamatovat!

Napětí na indukčnosti má efektivní hodnotu $U_L = 130$ V. Poněvadž fázová konstanta (počáteční fáze) napětí zdroje je nulová, viz (8.9), předbíhá napětí na cívce napětí zdroje o $55,8^\circ$. Napětí zdroje se o tento úhel zpožďuje za napětím cívky. Fázový úhel mezi napětím na cívce a proudem v obvodu, měřený od proudu obvodem k napětí na cívce dostaneme ze vztahu

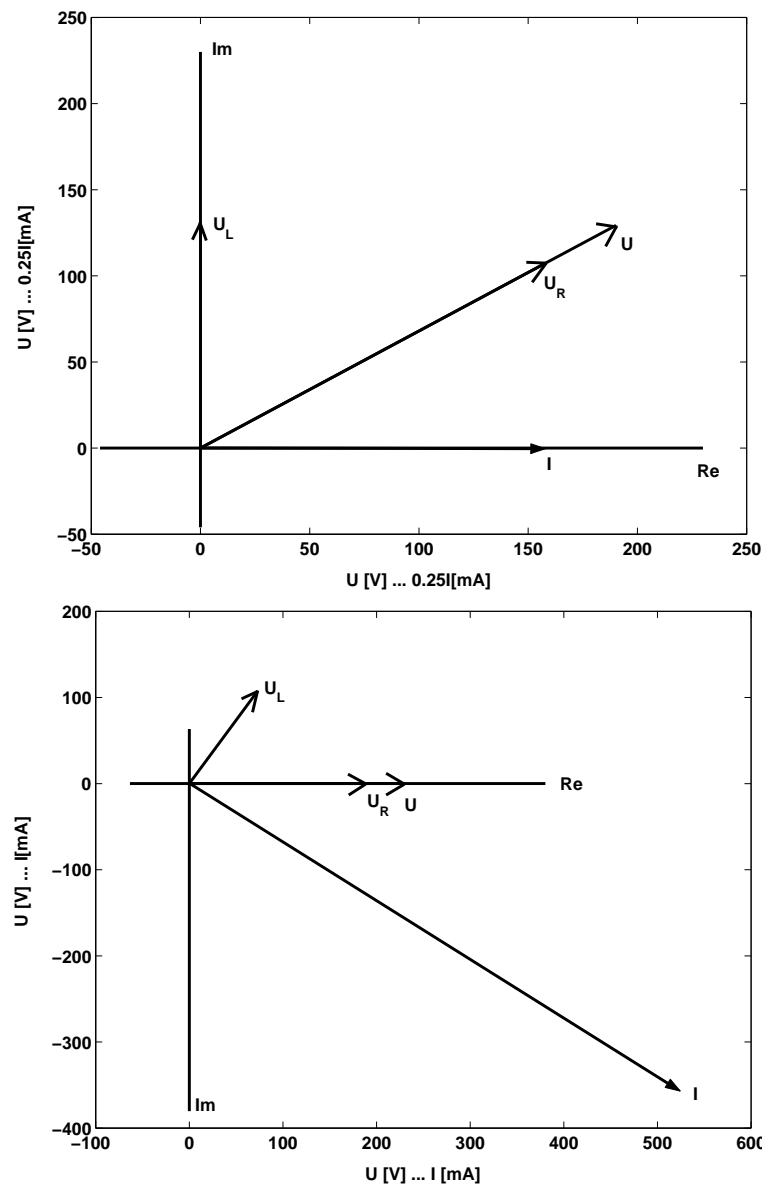
$$\varphi_L - \varphi_I = \varphi_L - \varphi_R = 55,8^\circ - (-34,2^\circ) = 90^\circ \quad (8.13)$$

Napětí na cívce předbíhá proud v obvodu o úhel 90° . To je v pořádku, jedná se o ideální cívku. Tento speciální fázový posuv označujeme jako kvadraturu; napětí na indukčnosti a proud v obvodu jsou v kvadratuře. Totéž platí mezi napětím na indukčnosti a napětím na odporu (napětí na odporu je ve fázi s proudem tekoucím v obvodu).

Fázorové diagramy se nejspodněji kreslí, nanese-li proud, který je společný všem prvkům, na vodorovnou osu. Správně je však nezávisle proměnnou napětí. Oba typy jsou na obr. 8.2, na obr. 8.2a je na vodorovné ose proud jako odezva, zatímco na obr. 8.2b je na vodorovné ose napětí jako budící veličina. Obvodové veličiny nejsou nakresleny ve vzájemném měřítku.

Dalšími obvodovými veličinami jsou výkony. V jednoduchých vztazích pro jednotlivé typy výkonů se vyskytuje fázový posuv φ mezi proudem a napětím. Podle dohody se fázový posuv mezi proudem a napětím měří od proudu k napětí. Tuto dohodu je nutno respektovat. Úhel měřený mezi proudem a napětím, měřený od proudu k napětí je v obecných vztazích pro výkony označen jako φ . Můžeme jej určit dvěma způsoby.

⁴Často se pro jednoduchost říká napětí na indukčnosti L , ačkoliv indukčnost je vlastnost cívky a nikoliv obvodový prvek, kterým je právě cívka. S ohledem na rozšíření této fráze ji též často používáme.



Obrázek 8.2: Fázorový diagram sériového spojení ideální cívky a ideálního rezistoru

1. Je-li φ_Z fázový úhel impedance, pak $\varphi = \varphi_Z$
2. Je-li φ_I fázová konstanta proudu v obvodu, pak $\varphi = -\varphi_I$, pokud je ovšem fázová konstanta budícího napětí nulová, $\varphi_U = 0$

V případě řešeného obvodu je tedy

$$\varphi = \varphi_Z = \varphi_U - \varphi_I = -\varphi_I = -(-34,2^\circ) = 34,2^\circ \quad (8.14)$$

Pro účinník tedy dostaneme po dosazení fázového posuvu $\varphi = 34,2^\circ$ hodnotu

$$\cos \varphi = 0,827$$

Účinník je vysoký, dosahuje hodnoty udávané pro zatížené elektromotory.
Pro výkony platí:

1. Činný výkon

$$P = UI \cos \varphi = 110 \text{ W}$$

Tento střední výkon se v obvodu spotřebovává, např. mění se na teplo buď přímo (elektrické topení) nebo prostřednictvím mechanické práce (elektromotory).

2. Jalový výkon

$$Q = UI \sin \varphi = -UI \sin \varphi_I = 75 \text{ VAr} = 75 \text{ VAr ind}$$

Tento střední výkon popisuje přelévání energie ze zdroje do zátěže a zpět, celý cyklus proběhne dvakrát během periody. Jalový výkon je kladný, což podle dohody znamená, že se jedná o induktivní zátěž. Zkratka ind u jednotky tuto skutečnost ještě zdůrazňuje.

3. Zdánlivý výkon

$$S = UI = 133 \text{ VA}$$

Na tento výkon (jako činný, tj. ve W) se musí navrhnout zdroj a přívodní vodiče. Na nich se chová jako činný výkon.

4. Komplexní výkon

$$\hat{S} = \hat{U}\hat{I}^* = UI e^{-j\varphi_I} = UI e^{j\varphi} = 133 e^{j\varphi} \quad \varphi = 34,2^\circ$$

Popisuje všechny výkony, reálná složka je činný, imaginární jalový a absolutní hodnota zdánlivý výkon. Z fázového úhlu komplexního výkonu lze vypočítat účinník.

Ještě jednou zdůrazníme, že při výpočtech jalového výkonu je nutno být obezřetný při používání fázové konstanty proudu. Dosazuje se podle dohody fázový rozdíl φ napětí a proudu měřený od proudu k napětí, tedy fáze impedance, jak plyne z Ohmova zákona, nebo záporná hodnota fázové konstanty proudu, pokud je fázová konstanta napětí nulová. Opačné znaménko způsobí chybnou interpretaci jalového výkonu, nezmění však jeho absolutní hodnotu. Jinde se neprojeví vůbec.

Přelévání energie můžeme popsat též pomocí činného a jalového proudu. Činný a jalový proud jsou po řadě

$$\begin{aligned} I_c &= I \cos \varphi = 0,5 \text{ A} \\ I_j &= I \sin \varphi = 0,34 \text{ A} \end{aligned} \quad (8.15)$$

kde φ je fázový rozdíl napětí a proudu měřený od proudu k napětí, neboli fáze impedance. Při respektování dohody o znaménku fázového rozdílu φ vyjde jalový proud kladný, někdy jej nazýváme jako induktivní jalový proud. Špatné znaménko má za následek změnu induktivního jalového proudu na kapacitní či naopak.

Činný proud je nezbytný k přenášení požadovaného výkonu. Jalový proud souvisí s přeléváním energie ze zdroje do zátěže a naopak. Při průchodu spojovacím vodičem se chová jako činný proud a zahřívá vodič. Na přenosu energie do zátěže se nepodílí, proto je snahou jej co nejvíce omezit. Metody redukce jalového proudu nazýváme obecně metodami kompenzace účinníku. Poznamenejme ještě, že zavedení jalového proudu má pravděpodobně za cíl názornější vysvětlení jalového výkonu.

Kompenzace účinníku spočívá v odstranění jalového proudu. Paralelně k zátěži připojíme pasivní (bezeztrátový) prvek, kterým bude procházet jalový proud o stejné absolutní hodnotě, avšak opačného znaménka. Poněvadž se ve vyšetřovaném obvodu proud zpožďuje za napětím, musíme připojit kondenzátor, na kterém proud předbíhá napětí. Kondenzátorem poteče proud I_j při napětí zdroje U . Absolutní hodnotu jeho impedance $Z_C = \frac{1}{\omega C}$ určíme z Ohmova zákona pro střídavé proudy

$$Z_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{U}{I_j} \quad (8.16)$$

Odtud

$$C = \frac{I_j}{\omega U} = \frac{I \sin \varphi}{\omega U} = \frac{UI \sin \varphi}{\omega U^2} = \frac{Q}{\omega U^2} \quad (8.17)$$

Po dosazení vyjde $C = 4,9 \mu\text{F}$.

Řešený obvod (viz obr. 8.1) se používá též jako náhradní obvod kvalitní cívky. Pro celkové posouzení cívky pro speciální použití se zavádí činitel jakosti. Pomineme obecnou definici a uvedeme výsledný vztah

$$Q = \frac{\omega L}{R} \quad (8.18)$$

Po dosazení dostaneme hodnotu 1,5. Nejedná se tedy o kvalitní cívku, pro ni je činitel jakosti alespoň 10, ale o elektrický stroj. U elektrického stroje nás zajímá z hlediska celkového posouzení účinník. Jeho hodnota 0,82 je poměrně vysoká, stroj je efektivně využit.

Příklad 8.2:

Ověřte platnost výsledků z předchozího příkladu.

Řešení:

Jako nejjednodušší ověření se zdá, v analogii se stejnosměrným proudem, sečtení napětí na prvcích a porovnání jej s napětím zdroje. V našem případě součet efektivních hodnot napětí na obou prvcích

$$U_R + U_L = 190 + 130 = 320 \text{ V}$$

není roven napětí zdroje $U = 230 \text{ V}$. Rozdíl je příliš velký na to, aby se jednalo o chybu výpočtu způsobenou zaokrouhlováním. Chyba je v postupu, v obvodech střídavého proudu se napětí musí sčítat jako fázory, často se říká vektorově, tj.

$$\hat{U} = \hat{U}_R + \hat{U}_L \quad (8.19)$$

V obecném případě se musí ověřit tato rovnost. V našem speciálním případě využijeme ještě toho, že obě napětí jsou na sebe kolmá, jak jsme ukázali ve vztahu (8.13). Pro moduly a fázové konstanty musí tedy platit

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} \quad \varphi_L - \varphi_R = 90^\circ \quad (8.20)$$

Obě tyto podmínky jsou splněny v rámci zaokrouhlovacích chyb.

Výkony a účinník nejsou navzájem nezávislé, stačí znát dva z těchto parametrů a zbývající se dopočtou. Nejznámější vztah mezi výkony je trojúhelník výkonů.

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (8.21)$$

V rámci zaokrouhlovacích chyb zjistíme že trojúhelník výkonů platí.

Dalším ověřením správnosti výpočtu může být to, že činný a jalový proud (8.15) jsou z hlediska fázorů navzájem kolmé. Pro celkový proud I tedy platí

$$I = \sqrt{I_c^2 + I_j^2} \quad (8.22)$$

Jenom připomeneme, že ze stejných důvodů jako u napětí na prvcích nemůžeme použít jednoduchý vztah pro součet činného a jalového proudu

$$I = I_c + I_j = 0,5 + 0,34 = 0,84 \text{ A}$$

Vyjde hodnota podstatně odlišná od skutečného proudu v obvodu $I = 0,634$ A. Konečně můžeme z komplexního výkonu vypočítat jednotlivé výkony

$$\begin{aligned} P &= \operatorname{Re} \hat{S} = S \cos(\varphi) \\ Q &= \operatorname{Im} \hat{S} = S \sin(\varphi) \\ S &= |\hat{S}| \end{aligned} \quad (8.23)$$

Kompenzace účinníku pomocí kapacity má i jinou interpretaci. Paralelním připojením kondenzátoru dostáváme praktický paralelní rezonanční obvod. Kompenzační kapacita se volí tak, aby byl pro danou frekvenci obvod v rezonanci. Používáme termín praktický paralelní obvod proto, že v teorii obvodů je (klasický) paralelní rezonanční obvod tvořen paralelním zapojením cívky, odporu a kondenzátoru. Pro důkaz tohoto tvrzení upravíme vztah pro jalový výkon tak, že jej vyjádříme pomocí reaktance a čtverce proudu, který snadno plyne z aplikace komplexního výkonu:

$$Q = XI^2 = \omega LI^2 = \omega L \frac{U^2}{Z^2} = U^2 \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \quad (8.24)$$

Symbolem $X = \omega L$ je označena reaktance cívky a symbolem $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ modul impedance sériově zapojené cívky a rezistoru. Po dosazení za jalový výkon dostaneme pro kompenzační kapacitu vztah

$$C_k = \frac{Q}{\omega U^2} = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} \quad (8.25)$$

Tento vztah lze také získat z podmínky rezonance praktického paralelního rezonančního obvodu.

Poznamenejme ještě, že známý vztah pro rezonanční frekvenci

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8.26)$$

lze použít jen pro klasický sériový a paralelní rezonanční obvod. U praktického paralelního rezonančního obvodu platí s přijatelnou přesností jen pokud je činitel jakosti cívky Q , viz (8.18), dostatečně vysoký, minimálně však 10. Tato podmínka zde není splněna ($Q = 1,5$), proto by nemělo překvapit, že ze vztahu (8.26) vyjde rezonanční frekvence podstatně odlišná od síťové frekvence zadané v příkladu.

Příklad 8.3:

Paralelně zapojený kondenzátor o kapacitě 68 nF a odpor 47 k Ω jsou připojeny ke zdroji napětí 850 V o frekvenci 1,5 kHz. Určete všechny obvodové veličiny (proud, výkony, účinník, ztrátový činitel, ztrátový úhel, apod.).

Řešení:

Obecný postup

Výchozím vztahem pro výpočet základních obvodových veličin (proudů a napětí) je Ohmův zákon pro střídavé proudy. Poněvadž se jedná o paralelní zapojení dvou prvků, kdy se sčítají admitance, je vhodné pracovat s formou Ohmova zákona pro admitance. Výchozím vztahem je tedy Ohmův zákon pro střídavé proudy, který však napíšeme v pozměněné podobě

$$\hat{I} = \hat{U} \hat{Y} \quad (8.27)$$

kde je \hat{U} fázor napětí, \hat{I} fázor proudu a \hat{Y} je admitance, což je převrácená hodnota impedance \hat{Z} ,

$$\hat{Y} = \frac{1}{\hat{Z}} \quad (8.28)$$

Pro admitance jednotlivých ideálních obvodových prvků platí následující vztahy:

1. Ideální rezistor o odporu R nebo vodivosti G

$$\hat{Y} = G = \frac{1}{R} = G e^{j0} \quad (8.29)$$

kde $G = 1/R$ je vodivost.

2. Ideální cívka o indukčnosti L

$$\hat{Y} = \hat{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{\omega L} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (8.30)$$

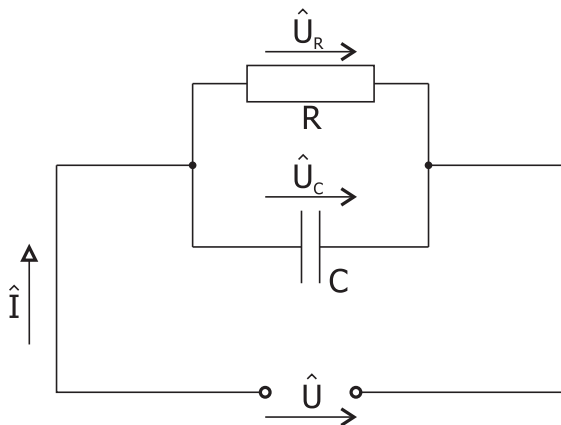
3. Ideální kondenzátor o kapacitě C

$$\hat{Y} = \hat{Y}_C = j\omega C = \omega C e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (8.31)$$

V předchozích vztazích je uveden jak složkový, tak exponenciální tvar, symbol $\omega = 2\pi f$ je použit pro úhlovou frekvenci.

Vlastní řešení

Schéma obvodu a všechny důležité obvodové veličiny a parametry jsou znázorněny na obr. 8.3. Na obou prvcích obvodu je stejné napětí \hat{U} rovné napětí zdroje. Obvodem však tečou tři proudy: celkový, proud kondenzátorem a proud odporem. Pro výpočet fázoru proudu \hat{I} tekoucího ze zdroje použijeme Ohmův zákon pro střídavé proudy (8.27). Nejprve musíme určit admitanci \hat{Y} . Podle zadání se jedná o paralelní zapojení odporu a kondenzátoru, admitance se sčítají, výsledná admitance ve složkovém tvaru je dána vztahem



Obrázek 8.3: Obvodové schéma paralelního spojení R, C

$$\hat{Y} = G + j\omega C = 21,2 + j641 \mu\text{S} \quad (8.32)$$

Pro výpočty je často vhodnější exponenciální tvar

$$\hat{Y} = Y_0 e^{j\varphi_Y} = 641 e^{j\varphi_Y} \mu\text{S} \quad \varphi_Y = 88,1^\circ \quad (8.33)$$

Při výpočtu absolutní hodnoty (modulu) Y_0 a fáze φ_Y admitance jsme po řadě použili vztahů

$$Y_0 = \sqrt{(\text{Re}(\hat{Y}))^2 + (\text{Im}(\hat{Y}))^2} = \sqrt{G^2 + (\omega C)^2} \quad (8.34)$$

$$\varphi_Y = \arctan \frac{\text{Im}(\hat{Y})}{\text{Re}(\hat{Y})} = \arctan \frac{\omega C}{G} = \arctan(\omega RC) \quad (8.35)$$

Symbole Re a Im jsou po řadě označeny reálné a imaginární složky komplexního čísla. Pro impedanci dostaneme s použitím (8.28) vztahy

$$\hat{Z} = \frac{1}{\hat{Y}} = 5,17 - j 1559 \Omega = 1,559 e^{j\varphi_Z} \text{ k}\Omega \quad \varphi_Z = -88,1^\circ \quad (8.36)$$

Počáteční fázi napětí volíme pro jednoduchost nulovou, tj.

$$\hat{U} = U \quad \varphi_U = 0 \quad (8.37)$$

Celkový proud pak určíme z Ohmova zákona pro střídavé proudy (8.27).

$$\hat{I} = \hat{U}\hat{Y} = UY_0 e^{j\varphi_Y} = I e^{j\varphi_I} = 0,545 e^{j\varphi_I} \text{ A} \quad \varphi_I = 88,1^\circ \quad (8.38)$$

kde $\varphi_I = \varphi$ je fázová konstanta proudu. Poněvadž fázová konstanta budícího napětí je nulová, $\varphi_U = 0^\circ$, a $\varphi_I = 88,1^\circ$ je kladný úhel, proud předbíhá napětí o úhel $88,1^\circ$. Jeho efektivní hodnota $I = 0,545 \text{ A}$. Můžeme též říci, že napětí se zpožďuje za proudem o úhel $88,1^\circ$. Fázový posuv mezi napětím a proudem, měřený od proudu k napětí je $\varphi_U - \varphi_I = -88,1^\circ$. Fázový posuv mezi napětím a proudem, měřený od napětí k proudu je $\varphi_I - \varphi_U = 88,1^\circ$. Lépe je fázový posuv pochopitelný z fázorového diagramu, který najdeme v další části, na obr. 8.4.

Proud tekoucí odporem R či vodivostí G určíme opět z Ohmova zákona (8.27), avšak pro obvod obsahující jen tento prvek

$$\hat{I}_R = \hat{Y}_R \hat{U} = UG = \frac{U}{R} = 18,1 \text{ mA} \quad \varphi_R = 0 \quad (8.39)$$

Proud tekoucí odporem R má efektivní hodnotu $I_R = 18,1 \text{ mA}$ a je ve fázi s napětím zdroje, $\varphi_R = 0$. Poněvadž proud ze zdroje, čili celkový proud, předbíhá napětí zdroje o úhel $\varphi_I = 88,1^\circ$, proud tekoucí odporem se o úhel $88,1^\circ$ zpožďuje za celkovým proudem. Proud tekoucí kondenzátorem C určíme rovněž z Ohmova zákona (8.27), avšak obvod bude obsahovat pouze tento prvek

$$\hat{I}_C = \hat{Y}_C \hat{U} = j\omega C \hat{U} = j\omega CU = \omega CU e^{j\frac{\pi}{2}} = 0,545 e^{j\varphi_C} \text{ A} \quad \varphi_C = 90^\circ \quad (8.40)$$

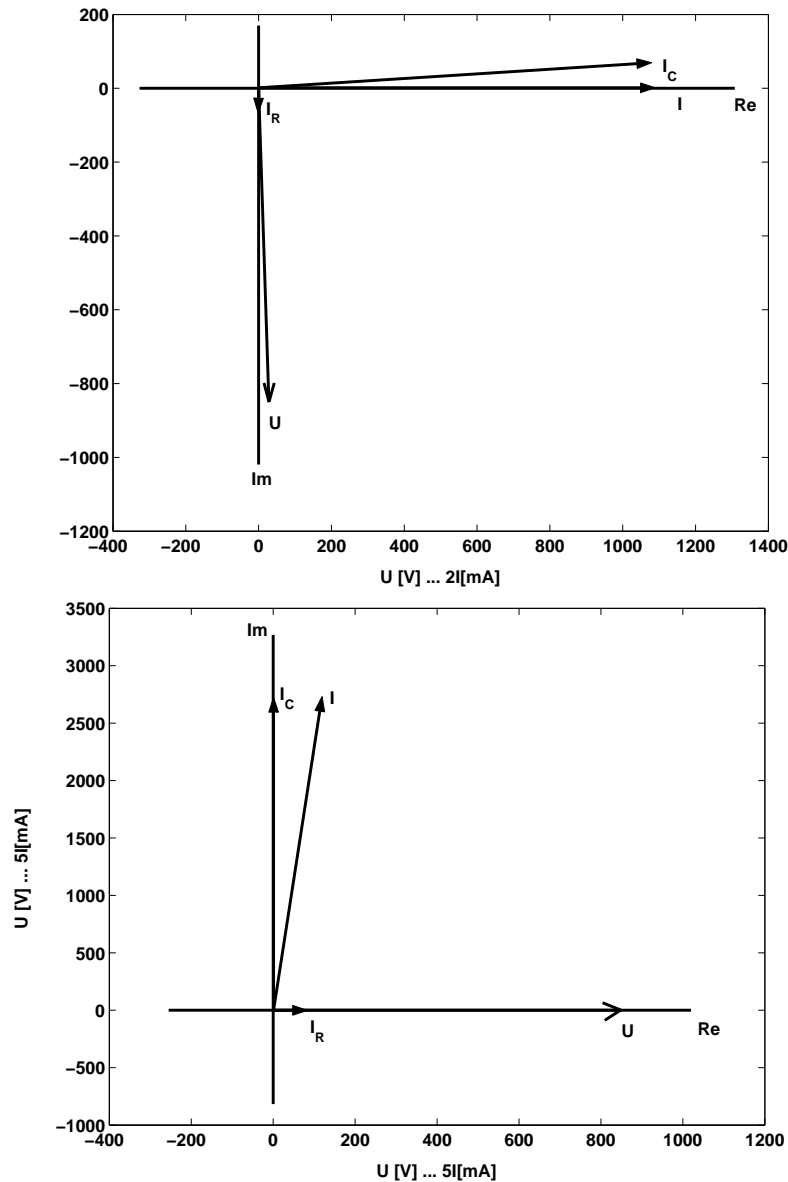
Při odvození jsme opět použili vztah, viz (2.16)

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}} \quad .$$

Proud tekoucí kondenzátorem o efektivní hodnotě $I_C = 0,545 \text{ A}$ předbíhá napětí zdroje o 90° . To je v pořádku, jedná se o ideální kondenzátor. Poněvadž celkový proud předbíhá napětí o úhel $\varphi_I = 88,1^\circ$, je mezi celkovým proudem a proudem kondenzátoru fázový posuv $\varphi_C - \varphi_I = 90^\circ - 88,1^\circ = 1,9^\circ$, měřený od celkového proudu k proudem tekoucím kondenzátorem. Celkový proud se tedy opožďuje o úhel $1,9^\circ$ za proudem tekoucím kondenzátorem.

Fázorové diagramy se nejsnadněji kreslí, vyneseme-li napětí, které je společné všem prvkům, na vodorovnou osu. Na obr. 8.4 je fázorový diagram načrtnut, není ovšem v měřítku.

Dalšími obvody veličinami jsou výkony. Před dosazováním do jednoduchých vztahů je však nutno respektovat, že fázový rozdíl $\varphi = \varphi_U - \varphi_I$ mezi napětím a proudem se podle dohody měří od proudu k napětí. Použijeme-li fázi impedance φ_Z nebo admittance φ_Z nebo fázové konstanty proudu φ_I za předpokladu, že fázová konstanta budícího napětí je nulová, $\varphi_U = 0$, pak platí:



Obrázek 8.4: Fázorový diagram paralelního spojení ideálního kondenzátoru a ideálního rezistoru

1. Impedance $\varphi = \varphi_Z$
2. Admittance $\varphi = -\varphi_Y$
3. Celkový proud $\varphi = -\varphi_I$, pokud $\varphi_U = 0$

Všechny tyto možnosti vedou k jednotné numerické hodnotě

$$\varphi = -88,1^\circ \quad (8.41)$$

Znaménko však ovlivní jen typ jalového výkonu, na jeho velikost ani na velikost ostatních výkonových veličin nemá vliv. Ve výrazu pro účinník po dosazení z (8.41) dostaneme

$$\cos \varphi = 0,033 \quad (8.42)$$

Účinník je velmi malý, téměř všechna energie cirkuluje v obvodu.

Pro výkony po dosazení z (8.41) vyjdou následující numerické hodnoty:

1. Činný výkon

$$P = UI \cos \varphi = 15,4 \text{ W} \quad (8.43)$$

Tento střední výkon se v obvodu spotřebovává, např. mění na teplo. Zde ovšem nezáleží na tom, zda použijeme fázi admitance, impedance nebo počáteční fázi proudu.

2. Jalový výkon

$$Q = UI \sin \varphi_Z = -UI \sin \varphi_Y = -UI \sin \varphi_I = -463 \text{ VAr} = 463 \text{ VAr kap.} \quad (8.44)$$

Tento střední výkon popisuje přelévání energie ze zdroje do zátěže a zpět, celý cyklus proběhne dvakrát během periody. Jalový výkon je záporný (podle dohody), poněvadž proud předbíhá napětí, fázový posuv mezi proudem a napětím, měřený od proudu k napětí, je záporný. Zkratka kap se používá místo záporného znaménka a tak naznačuje, že se jedná o kapacitní zátěž. V porovnání s činným výkonem lze soudit, že se přelévá značné množství energie.

3. Zdánlivý výkon

$$S = UI = 463 \text{ VA} \quad (8.45)$$

Na tento výkon (jako činný, tj. ve W) se musí navrhnout zdroj a přívodní vodiče. Na nich se chová jako činný výkon.

4. Komplexní výkon

$$\hat{S} = \hat{U} \hat{I}^* = UI e^{-j\varphi_I} = UI e^{j\varphi_Z} = 463 e^{j\varphi}, \quad \text{kde } \varphi = -88,1^\circ \quad (8.46)$$

Popisuje všechny výkony, reálná složka je činný, imaginární složka dává jalový a absolutní hodnota představuje zdánlivý výkon. Z fázového úhlu komplexního výkonu lze vypočítat účinník.

Činný a jalový proud jsou po řadě

$$I_c = I \cos \varphi = 18,1 \text{ mA} \quad I_j = I \sin \varphi = -545 \text{ mA} \quad (8.47)$$

Jalový proud je podle dohody záporný. To jen potvrzuje, že se jedná o kapacitní zátěž. Můžeme též mluvit o jalovém kapacitním proudu 545 mA.

V tomto speciálním případě je činný proud roven proudu tekoucímu odporem $I_R = I_c$, viz (8.39) a jalový proud je (až na znaménko) shodný s proudem tekoucímu kondenzátorem, $I_C = I_j$, viz (8.40). Je tomu tak proto, že se jedná o paralelní zapojení prvků. Činný a jalový proud tedy nepřinášejí v tomto speciálním případě nové informace.

Účinník je velmi malý, možnosti zdroje jsou využity velmi málo. Proto je vhodné použít kompenzaci účinníku. Kompenzace účinníku spočívá v odstranění jalového proudu. Paralelně k zátěži připojíme pasivní (bezeztrátový) prvek, kterým bude procházet jalový proud o stejné absolutní hodnotě, avšak opačného znaménka. Poněvadž ve vyšetřovaném obvodu proud předbíhá napětí, musíme připojit cívku, na níž se proud za napětím zpožďuje. Cívkou musí téci proud I_j při napětí zdroje U . Absolutní hodnotu její impedance $Z_L = \omega L$ určíme z Ohmova zákona pro střídavé proudy

$$Z_L = \omega L = \frac{U}{I_j} \quad (8.48)$$

Odtud

$$L = \frac{U}{\omega I_j} = \frac{U}{\omega I \sin \varphi_I} \quad (8.49)$$

Vyjde $L = 165$ mH, což je prakticky hodně vysoká hodnota.

Pro celkové posouzení impedance s kapacitní složkou se zavádí ztrátový činitel, definovaný dvěma způsoby:

1. Poměr činného a jalového výkonu

$$D = \frac{P}{Q} = \frac{GU^2}{\omega CU^2} = \frac{1}{\omega RC} \quad (8.50)$$

2. Pomocí doplňku δ fázového úhlu φ_Z impedance nebo fázové konstanty celkového proudu φ_I do 90° , který se nazývá ztrátový úhel, tj.

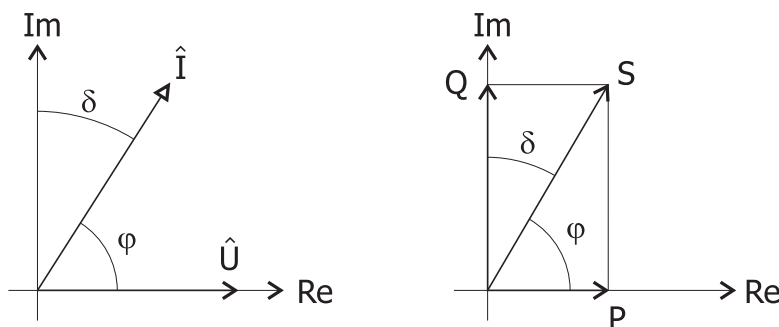
$$\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi_Z = \frac{\pi}{2} - \varphi_I \quad (8.51)$$

Ztrátový činitel je tangentou ztrátového úhlu:

$$D = \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_Z \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_I \right) \quad (8.52)$$

Názorná definice ztrátového činitele a ztrátového úhlu plyne z obr. 8.5. Pro kvalitní kondenzátory není rozdíl mezi ztrátovým úhlem (v radiánech) a ztrátovým činitelem:

$$D = \operatorname{tg} \delta \doteq \delta \quad (8.53)$$



Obrázek 8.5: Ztrátový činitel a ztrátový úhel

Velikost ztrátového úhlu je po dosazení z $\delta = 90^\circ - \varphi_I = 1,9^\circ$. Podle definice ztrátového úhlu (8.51) pak platí pro ztrátový činitel vztah

$$D = \operatorname{tg} \delta = \operatorname{cotg} \varphi = \frac{G}{\omega C} = \frac{1}{\omega RC} \quad (8.54)$$

Numerická hodnota ztrátového činitele je 0,033. Pro malé hodnoty ztrátového činitele je $\operatorname{tg} \delta \doteq \delta$, to je v našem případě splněno, takže ztrátový úhel $\delta \doteq 0,033$ rad = $1,9^\circ$, což je obrácený postup jeho určení.

Z praktického hlediska poznamenejme, že se jedná o speciální poměrně nový elektronický prvek, aktuátor. Ten využívá piezoelektrického jevu. Přiložené elektrické napětí vyvolá malé posunutí, které je tomuto napětí úměrné. Pro představu, napětí kolem 1 kV vyvolá posunutí 5 až 100 μm , podle konstrukce aktuátoru. Proto je v zadání poměrně vysoké napětí. Řešený obvod je nejjednodušším náhradním obvodem aktuátoru, kapacita je statická kapacita aktuátoru, odpor souvisí s přenosem energie při buzení harmonickým

napětím. Malý účinník vede k tomu, že aktuátor musí být napájen ze zdroje, který je schopen při vysokém napětí dodávat poměrně vysoký proud. Na přeměnu energie se ovšem spotřebuje jen malá část výkonu zdroje. Naznačená kompenzace účinníku není technicky jednoduchá, má zásadní vedlejší účinky. Jejich rozbor je mimo rozsah tohoto kurzu.

Příklad 8.4:

Ověřte platnost výsledků z předchozího příkladu.

Řešení:

Jako nejjednodušší ověření můžeme vypočítat součet efektivních hodnot proudů tekoucích odporem a kondenzátorem a porovnat je s proudem odebíraným ze zdroje. Avšak součet efektivních hodnot proudů odporem a kondenzátorem

$$I_R + I_C = 0,545 + 0,018 = 563 \text{ mA} \quad (8.55)$$

se liší od celkového proudu $I = 545 \text{ mA}$ více, než činí zaokrouhlovací chyba. To však není chyba výpočtu, ale nesprávný postup, poněvadž proudy se musí sčítat jako fázory, tj. komplexní čísla, často se říká vektorově. Pro efektivní hodnoty proudu celkového a proudu tekoucího odporem a kondenzátorem tedy platí

$$\hat{I} = \hat{I}_R + \hat{I}_C \quad (8.56)$$

Tuto rovnici můžeme v našem případě zjednodušit, uvědomíme-li si, že fázory proudů kondenzátorem a odporem svírají pravý úhel. Tedy platí

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} \quad (8.57)$$

Tato rovnice je skutečně splněna v rámci zaokrouhlovacích chyb.

V rámci zaokrouhlovacích chyb platí trojúhelník výkonů

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (8.58)$$

Dalším ověřením správnosti výpočtu může být to, že činný a jalový proud (8.47) jsou z hlediska fázorů navzájem kolmé. Pro celkový proud I odebíraný ze zdroje tedy platí

$$I = \sqrt{I_c^2 + I_j^2} \quad (8.59)$$

Jenom připomeneme, že ze stejných důvodů jako u napětí na prvcích nemůžeme použít jednoduchý vztah pro součet činného a jalového proudu (pokud navíc ještě zapomeneme na jeho zápornou hodnotu)

$$I = I_c + I_j = 18 + 545 = 563 \text{ mA}$$

Výsledná hodnota je odlišná od skutečného proudu v obvodu $I = 545 \text{ mA}$.

Konečně můžeme z komplexního výkonu vypočítat jednotlivé výkony

$$\begin{aligned} P &= \text{Re } \hat{S} = S \cos(\varphi) \\ Q &= \text{Im } \hat{S} = S \sin(\varphi) \\ S &= |\hat{S}| \end{aligned} \quad (8.60)$$

Jako další ověření správnosti výpočtu, můžeme brát dvojí výpočet ztrátového úhlu, či ztrátového činitele. To jsme však provedli již v předchozím příkladu, nebudeme se zde opakovat.

Konečně můžeme jiným způsobem interpretovat kompenzační indukčnost. Jejím přidáním vznikne paralelní rezonanční obvod používaný v teorii obvodů. Hodnota indukčnosti se volí tak, aby byl obvod v rezonanci. Vztah (8.49) lze upravit takto:

$$L = \frac{U}{\omega I_j} = \frac{U}{\omega I \sin \varphi_I} = \frac{1}{\omega Y \sin \varphi_Y} = \frac{1}{\omega B} = \frac{1}{\omega^2 C} \quad (8.61)$$

Při odvození jsme využili těchto vztahů:

$$\frac{I}{U} = Y \quad Y \sin \varphi_I = B \quad B = \omega C$$

kde Y je admitance, $\varphi_Y = \varphi_I$ její fáze a B susceptance. Ta je imaginární složkou admitance, takže se z jejího modulu získá pomocí sinu fázového úhlu, viz prostřední vztah. Poslední vztah je susceptance kondenzátoru.

Poslední výraz v (8.61) dostaneme též z podmínky rezonance paralelního obvodu

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8.62)$$

V tomto případě se jedná o klasický paralelní rezonanční obvod. Proto po dosazení hodnot kapacity aktuátoru C a kompenzační indukčnosti L do tohoto výrazu dostaneme v mezích zaokrouhlovacích chyb frekvenci budicího zdroje uvedenou v zadání.

9 Jednoduché náhradní obvody

Reálný prvek je jen omezenou aproximací ideálního prvku. Používá se pouze v prvním přiblížení. Při přesnějším popisu se dává přednost dvouprvkovému náhradnímu obvodu. Tento náhradní obvod lze popsat parametry obou ideálních prvků, které však nedávají praktickou představu o kvalitě reálného prvku a neumožňují jejich porovnání. Proto je výhodnější používat názornějších fyzikálních veličin: činitel jakosti nebo ztrátový činitel. Obě veličiny lze definovat pro každý typ náhradního obvodu.

Na začátku cvičení se porovnají jednotlivé typy náhradních obvodů. Aplikační příklady se soustřeďují na převodní vztahy, např. výpočet ztrátového činitele reálné cívky se seriovým náhradním obvodem. Toto cvičení lze považovat za nadstandardní.

Úvaha

Dvouprvkový náhradní obvod reálné cívky a reálného kondenzátoru může obsahovat prvky spojené sériově nebo paralelně. Proč se u cívky dává přednost sériovému obvodu a u kondenzátoru paralelnímu?

Odpověď

Dvouprvkové náhradní obvody jsou na obr. 9.1 až 9.4. Jedním z důvodů je hodnota impedance při krajních frekvencích, nulové a nekonečné. U ideálních prvků platí toto:

- Ideální cívka
 - Při nulové frekvenci představuje zkrat.
 - Při nekonečné frekvenci se chová jako rozpojený obvod.
- Ideální kondenzátor
 - Při nulové frekvenci se chová jako rozpojený obvod.
 - Při nekonečné frekvenci představuje zkrat.

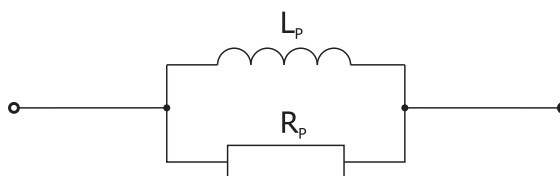
Z toho lze pro jednotlivé kombinace usuzovat takto:

- Sériový náhradní obvod reálné cívky
 - Při nulové frekvenci má konečný, obvykle malý, odpor.
 - Při nekonečné frekvenci se chová jako rozpojený obvod.
- Paralelní náhradní obvod reálné cívky
 - Při nulové frekvenci představuje zkrat.
 - Při nekonečné frekvenci má konečný, obvykle velký, odpor.
- Paralelní náhradní obvod reálného kondenzátoru
 - Při nulové frekvenci má konečný, obvykle velký, odpor.
 - Při nekonečné frekvenci se chová jako zkratovaný obvod.
- Sériový náhradní obvod reálného kondenzátoru
 - Při nulové frekvenci se chová jako rozpojený obvod.
 - Při nekonečné frekvenci má konečný, obvykle malý, odpor.

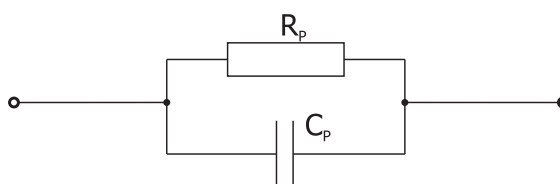
Vlastnosti sériového náhradního obvodu reálné cívky a paralelního náhradního obvodu reálného kondenzátoru poněkud lépe odpovídají skutečnosti pro nízké frekvence. V oblasti velmi vysokých frekvencí se uplatňují další parazitní jevy, takže je nutno použít složitější náhradní obvody.



Obrázek 9.1: Sériový náhradní obvod reálné cívky



Obrázek 9.2: Paralelní náhradní obvod reálné cívky



Obrázek 9.3: Paralelní náhradní obvod reálného kondenzátoru

Příklad 9.1:

Vypočtěte činitel jakosti sériového a paralelního náhradního obvodu reálné cívky.



Obrázek 9.4: Sériový náhradní obvod reálného kondenzátoru

Řešení:

Činitel jakosti je pro jakýkoliv dvojpól definován vztahem

$$Q = 2\pi \frac{W_a}{W_d} \quad (9.1)$$

kde

- W_a je maximální energie soustředěná v akumulativním prvku (prvcích dvojpólu), v našem případě to je ideální cívka
- W_d je energie přeměněná v teplo na disipativním prvku (prvcích dvojpólu) během jedné periody. V našem případě se jedná o ideální odpor.

Sériový náhradní obvod

Sériový náhradní obvod cívky sestává z ideální cívky, induktoru o indukčnosti L a ideálního rezistoru o odporu R , obr. 9.1

Maximální energie magnetického pole cívky je dána vztahem

$$W_a = \frac{1}{2} L I_0^2 = L I^2 \quad (9.2)$$

kde I_0 je maximální hodnota harmonického proudu a I je jeho efektivní hodnota.⁵ Mezi nimi platí známý vztah

$$I_0 = \sqrt{2} I \quad (9.3)$$

který byl použit při úpravě.

Průměrný elektrický výkon na odporu je dán těmito vztahy

$$P = UI = \frac{U^2}{R} = R I^2 \quad (9.4)$$

Poněvadž se jedná o konstantní střední hodnotu, elektrickou energii přeměněnou na odporu v teplo během jedné periody T dostaneme jednoduchým násobením (místo komplikované integrace)

$$W_d = PT = \frac{P}{f} = \frac{R I^2}{f} \quad (9.5)$$

Při odvození jsme využili vztah (9.4) a vztah

$$T = \frac{1}{f} \quad (9.6)$$

mezi periodou T a frekvencí f .

Činitel jakosti reálné cívky získáme dosazením (9.2) a (9.5) do obecné definice (9.1).

$$Q = 2\pi \frac{W_a}{W_d} = 2\pi \frac{L I^2}{\frac{R I^2}{f}} = 2\pi f \frac{L I^2}{R I^2} = \frac{\omega L}{R} \quad (9.7)$$

⁵Všude pracujeme pouze s efektivními hodnotami, proto vynecháváme symboly pro fázory.

Paralelní náhradní obvod

V případě paralelního náhradního obvodu uvažujeme paralelní cívku o indukčnosti L_p a paralelní ideální rezistor o odporu R_p , obr. 9.2. Tím odlišíme parametry tohoto obvodu od sériového⁶. Při určení maximální energie magnetického pole cívky je nutno si uvědomit, že v případě paralelní kombinace je dáno napětí U na obou prvcích. Proud I_L tekoucí cívku o indukčnosti L_p při frekvenci ω zjistíme z Ohmova zákona

$$I_L = \frac{U}{Z_L} = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{\omega L_p} \quad (9.8)$$

poněvadž $X_L = \omega L_p$ je induktivní reaktance ideální cívky. Maximální energie magnetického pole cívky se pak získá po dosazení (9.8) do poslední části (9.2)

$$W_a = L_p I_L^2 = L_p \left(\frac{U}{\omega L_p} \right)^2 = \frac{U^2}{\omega^2 L_p} \quad (9.9)$$

Elektrický výkon na odporu je dán těmito vztahy

$$P = UI = \frac{U^2}{R_p} \quad (9.10)$$

poněvadž je zadáno napětí. Jedná se o konstantní střední hodnotu výkonu, takže elektrickou energii přeměněnou na odporu v teplo během jedné periody T dostaneme jednoduchým násobením (místo komplikované integrace)

$$W_d = PT = \frac{P}{f} = \frac{U^2}{R_p f} \quad (9.11)$$

Při odvození jsme využili vztah (9.10) a vztah

$$T = \frac{1}{f} \quad (9.12)$$

mezi periodou T a frekvencí f .

Činitel jakosti reálné cívky získáme dosazením (9.9) a (9.11) do obecné definice (9.1).

$$Q_p = 2\pi \frac{W_a}{W_d} = 2\pi \frac{\frac{U^2}{\omega^2 L_p}}{\frac{U^2}{R_p f}} = 2\pi f \frac{R_p U^2}{\omega^2 L_p U^2} = \frac{R_p}{\omega L_p} \quad (9.13)$$

Činitel jakosti paralelního náhradního obvodu (9.13) je převrácený k činiteli jakosti sériového obvodu (9.7).

$$Q_p = \frac{1}{Q_s} \quad (9.14)$$

Příklad 9.2:

Vypočítejte ztrátový činitel paralelního a sériového náhradního obvodu reálného kondenzátoru.

Řešení:

Podle výkonové definice je ztrátový činitel dán vztahem

$$D = \operatorname{tg} \delta = \frac{P}{|Q|} \quad (9.15)$$

kde

⁶U sériového náhradního obvodu s ohledem na jeho výlučné využití neuvádíme indexy.

- δ je doplněk fázového rozdílu φ mezi napětím a proudem do $\frac{\pi}{2}$. Nazývá se ztrátový úhel.
- P je činný výkon na dvojbranu. V našem případě jde o činný výkon na ideálním odporu, rezistoru.
- Q je jalový výkon na dvojbranu. V našem případě je to jalový výkon na ideálním kondenzátoru, kapacitoru. Je nutno použít absolutní hodnotu, poněvadž podle dohody je jalový výkon na kapacitní zátěži záporný.

Náhradní paralelní obvod reálného kondenzátoru

Paralelní náhradní obvod kondenzátoru sestává z ideálního kondenzátoru, kapacitoru, o kapacitě C a ideálního rezistoru o odporu R , případně vodivosti $G = \frac{1}{R}$, viz obr. 9.3. Pro admintaci tohoto obvodu platí vztah

$$\begin{aligned}\hat{Y} &= G + jB = \frac{1}{R} + j\omega C \\ G &= \frac{1}{R} \quad B = \omega C\end{aligned}\tag{9.16}$$

Výkony nejsnadněji určíme pomocí komplexního výkonu, pro který platí

$$\hat{S} = \hat{U}\hat{I}^* = P + jQ\tag{9.17}$$

kde \hat{U} je fázor napětí, \hat{I}^* je komplexně sdružený fázor proudu, P je činný výkon a Q je jalový výkon. Po dosazení admitance (9.16) do definice komplexního výkonu (9.17) a úpravách dostaneme

$$\hat{S} = \hat{U}\hat{I}^* = \hat{U}(\hat{Y}\hat{U})^* = \hat{Y}^*\hat{U}\hat{U}^* = \hat{Y}^*U^2 = (G - jB)U^2 = GU^2 - jBU^2 = P + jQ\tag{9.18}$$

poněvadž $\hat{I} = \hat{Y}\hat{U}$ a $\hat{U}\hat{U}^* = U^2$.

Porovnáme reálné a imaginární složky v koncové části odvození (9.18)

$$GU^2 - jBU^2 = P + jQ\tag{9.19}$$

Pro činný a jalový výkon po řadě dostaneme

$$\begin{aligned}P &= GU^2 = \frac{U^2}{R} \\ |Q| &= BU^2 = \omega CU^2\end{aligned}\tag{9.20}$$

poněvadž $B = \omega C$, viz (9.16).

Ztrátový činitel reálného kondenzátoru získáme po dosazení výkonů z (9.20) do (9.15)

$$D = \frac{P}{|Q|} = \frac{\frac{U^2}{R}}{\omega CU^2} = \frac{1}{\omega RC}\tag{9.21}$$

Náhradní sériový obvod reálného kondenzátoru

Sériový náhradní obvod reálného kondenzátoru sestává z ideálního kondenzátoru, kapacitoru, o kapacitě C_s a ideálního rezistoru o odporu R_s ⁷, viz obr. 9.4. Nyní je společný

⁷U paralelního náhradního obvodu kondenzátoru s ohledem na jeho výlučné využití neuvádíme indexy.

proud, proto je výhodnější pracovat s impedancí. Pro impedanci tohoto obvodu platí vztah

$$\begin{aligned}\hat{Z} &= R + jX = R_s + \frac{1}{j\omega C_s} = R_s - jX_C = R_s - j\frac{1}{\omega C_s} \\ R &= R_s \quad X = -X_C = -\frac{1}{\omega C_s} \quad X_C = \frac{1}{\omega C_s}\end{aligned}\quad (9.22)$$

Symbol R je užít pro obecnou rezistanci, kdežto symbol R_s značí sériový odpor náhradního obvodu. X je obecná a X_C je kapacitní reaktance ideálního kondenzátoru o kapacitě C_s .

Výkony nejsnadněji určíme pomocí komplexního výkonu, pro který platí

$$\hat{S} = \hat{U}\hat{I}^* = P + jQ \quad (9.23)$$

kde \hat{U} je fázor napětí, \hat{I}^* je komplexně sdružený fázor proudu, P je činný výkon a Q je jalový výkon. Po dosažení impedance (9.22) do definice komplexního výkonu (9.23) a po úpravách dostaneme vztah

$$\hat{S} = \hat{U}\hat{I}^* = \hat{Z}\hat{I}\hat{I}^* = \hat{Z}I^2 = (R + jX)I^2 = RI^2 + jXI^2 = P + jQ \quad (9.24)$$

poněvadž $\hat{U} = \hat{Z}\hat{I}$ a $\hat{I}\hat{I}^* = I^2$.

Porovnáme reálné a imaginární složky v koncové části odvození (9.24)

$$RI^2 + jXI^2 = P + jQ \quad (9.25)$$

Pro činný a jalový výkon po řadě dostaneme

$$\begin{aligned}P &= R_s I^2 \\ |Q| &= |X|I^2 = X_C I^2 = I^2 \frac{1}{\omega C_s}\end{aligned}\quad (9.26)$$

poněvadž $|X| = X_C = \frac{1}{\omega C_s}$, viz druhá část vztahů (9.22).

Ztrátový činitel reálného kondenzátoru získáme po dosažení výkonů z (9.26) do (9.15)

$$D = \frac{P}{|Q|} = \frac{R_s I^2}{I^2 \frac{1}{\omega C_s}} = \omega R C_s \quad (9.27)$$

Ztrátový činitel sériového náhradního obvodu (9.27) je převrácený ke ztrátovému činiteli paralelního obvodu (9.21).

$$D_s = \frac{1}{D_p} \quad (9.28)$$

Příklad 9.3:

Vypočtete činitel jakosti paralelního náhradního obvodu reálného kondenzátoru, viz obr. 9.3.

Řešení:

Na kondenzátoru C i na odporu R je stejné napětí U . Budeme tedy počítat energii elektrického pole kondenzátoru. Maximální energie elektrického pole kondenzátoru je dána vztahem

$$W_a = \frac{1}{2} C U_0^2 = C U^2 \quad (9.29)$$

kde U_0 je maximální hodnota harmonického napětí a U je jeho efektivní hodnota⁸. Mezi nimi platí známý vztah

$$U_0 = \sqrt{2}U \quad (9.30)$$

který byl použit při úpravě.

Elektrický výkon na odporu je dán vztahem

$$P = UI = \frac{U^2}{R} \quad (9.31)$$

Poněvadž se jedná o konstantní střední hodnotu výkonu, elektrickou energii přeměněnou na odporu v teplo během jedné periody T , dostaneme jednoduchým násobením (místo komplikované integrace)

$$W_d = PT = \frac{P}{f} = \frac{U^2}{Rf} \quad (9.32)$$

Při odvození jsme využili vztah (9.31) a vztah

$$T = \frac{1}{f} \quad (9.33)$$

mezi periodou T a frekvencí f .

Činitel jakosti reálného kondenzátoru (s paralelním náhradním obvodem) získáme dosazením (9.29) a (9.32) do obecné definice (9.1)

$$Q = 2\pi \frac{W_a}{W_d} = 2\pi \frac{CU^2}{\frac{U^2}{Rf}} = 2\pi f \frac{CRU^2}{U^2} = \omega RC \quad (9.34)$$

Ze vztahů (9.21) a (9.34) plyne, tento vztah mezi ztrátovým činitelem D a činitelem jakosti Q náhradního obvodu reálného kondenzátoru

$$D = \frac{1}{Q} \quad (9.35)$$

Příklad 9.4:

Uveďte podmínky ekvivalence sériového a paralelního náhradního obvodu reálné cívky.

Řešení:

Oba náhradní obvody reálné cívky jsou znázorněny na obrázcích 9.3 a 9.4. Parametry sériového náhradního obvodu označme R_s (sériový rezistor), L_s (sériový induktor), R_p (paralelní rezistor), L_p (paralelní induktor). Oba obvody jsou při dané frekvenci ω ekvivalentní, jestliže se rovnají jejich impedance nebo admitance, stručněji imitance.

Pro výslednou impedanci \hat{Z}_v dvou paralelně zapojených impedancí \hat{Z}_1 a \hat{Z}_2 se používá

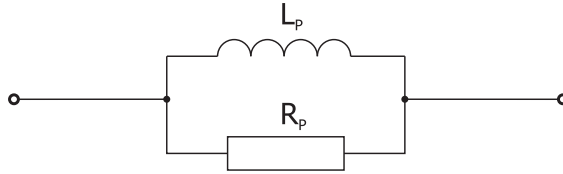


Obrázek 9.5: Sériový náhradní obvod reálné cívky

tento praktický vztah

$$\hat{Z}_v = \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2} \quad (9.36)$$

⁸Všude pracujeme pouze s efektivními hodnotami, proto vynecháváme symboly pro fázory.



Obrázek 9.6: Paralelní náhradní obvod reálné cívky

Tento vztah použijeme pro výpočet impedance paralelního náhradního obvodu. Podmínku rovnosti impedancí pak můžeme psát ve tvaru

$$\hat{Z}_s = R_s + j\omega L_s = \hat{Z}_p = \frac{R_p j\omega L_p}{R_p + j\omega L_p} \quad (9.37)$$

V poslední části tohoto vztahu jsme do výrazu pro paralelní kombinaci (9.36) dosadili impedance paralelních prvků, $\hat{Z}_1 = R_p$, $\hat{Z}_2 = j\omega L_p$. Symboly s a p označujeme po řadě sériové a paralelní prvky, impedance, admittance atd.

Výraz pro impedance paralelní kombinace převedeme do složkového tvaru

$$\begin{aligned} \hat{Z}_p &= \frac{R_p j\omega L_p}{R_p + j\omega L_p} = \frac{R_p j\omega L_p}{R_p + j\omega L_p} \cdot \frac{R_p - j\omega L_p}{R_p - j\omega L_p} = \frac{j R_p \omega L_p R_p - j^2 \omega L_p R_p \omega L_p}{R_p^2 + (\omega L_p)^2} = \\ &= \frac{R_p (\omega L_p)^2 + j \omega L_p R_p^2}{R_p^2 + (\omega L_p)^2} = \frac{R_p (\omega L_p)^2}{R_p^2 + (\omega L_p)^2} + j \omega \frac{L_p R_p^2}{R_p^2 + (\omega L_p)^2} \end{aligned} \quad (9.38)$$

Rovnost $\hat{Z}_s = \hat{Z}_p$ podle (9.36) a (9.37) vede na výraz

$$R_s + j\omega L_s = \frac{R_p (\omega L_p)^2}{R_p^2 + (\omega L_p)^2} + j \omega \frac{L_p R_p^2}{R_p^2 + (\omega L_p)^2} \quad (9.39)$$

Po jednoduchých úpravách vyjádříme sériové parametry pomocí paralelních

$$R_s = \frac{R_p (\omega L_p)^2}{R_p^2 + (\omega L_p)^2} \quad L_s = \frac{L_p R_p^2}{R_p^2 + (\omega L_p)^2} \quad (9.40)$$

Oba sériové parametry jsou složitou funkcí frekvence. Převodní vztah (9.40) umožňuje převést paralelní obvod na sériový, numerické hodnoty prvků sériového obvodu však platí jen pro jednu frekvenci.

Za předpokladu nízkého činitele jakosti paralelního náhradního obvodu, $Q_p \ll 1$, platí podle vztahu (9.13):

$$Q_p = \frac{R_p}{\omega L_p} \ll 1 \quad \rightarrow \quad R_p \ll \omega L_p \quad (9.41)$$

Tato podmínka vede k podstatnému zjednodušení převodních vztahů (9.40)-

$$R_s \doteq R_p \quad L_s \doteq \frac{L_p R_p^2}{\omega^2 L_p^2} = L_p \left(\frac{R_p}{\omega L_p} \right)^2 = L_p Q_p^2 \quad (9.42)$$

Převodní vztahy nejsou frekvenčně závislé, teoreticky platí pro všechny frekvence. Navíc mají jednoduchý praktický význam: oba ztrátové odpory jsou zhruba stejné, poměr sériové a paralelní náhradní indukčnosti je přibližně určen čtvercem paralelního činitele

jakosti. Z tohoto hlediska je paralelní náhradní obvod vhodný pro cívky s nízkým činitelem jakosti. Z definice $\hat{Z} = R + jX$ můžeme z posledního výrazu ve vztahu (9.38) získat rezistanci a reaktanci paralelního obvodu.

$$R(\omega) = \frac{\omega^2 R_p L_p^2}{R_p^2 + \omega^2 L_p^2} \quad X(\omega) = \frac{\omega L_p R_p^2}{R_p^2 + \omega^2 L_p^2} \quad (9.43)$$

Jak rezistance, tak reaktance ve vztahu (9.43) jsou racionální lomenné funkce úhlové frekvence ω . V případě rezistance jsou stupně polynomů v čitateli a jmenovateli stejné, oba mají stupeň 2. U reaktance je stupeň polynomu v čitateli, který je nyní 1, nižší než ve jmenovateli, který je opět 2. Obecně platí pravidlo, že u imitance stupeň čitatele není vyšší než stupeň jmenovatele.

Druhý převodní vztah získáme z rovnosti admitancí, tj. $\hat{Y}_s = \hat{Y}_p$. Pro sériovou kombinaci je admitance

$$\hat{Y}_s = \frac{1}{\hat{Z}_s} = \frac{1}{R_s + j\omega L_s} \quad (9.44)$$

Pro paralelní kombinaci platí

$$\hat{Y}_p = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L_p} = \frac{1}{R_p} - j \frac{1}{\omega L_p} \quad (9.45)$$

Podmínkou porovnání admitancí je, aby obě byly ve složkovém tvaru. Proto musíme nejprve admitanci \hat{Y}_s do tohoto tvaru převést

$$\hat{Y}_s = \frac{1}{R_s + j\omega L_s} = \frac{1}{R_s + j\omega L_s} \cdot \frac{R_s - j\omega L_s}{R_s - j\omega L_s} = \frac{R_s - j\omega L_s}{R_s^2 + (\omega L_s)^2} \quad (9.46)$$

Podmínka rovnosti admitancí (9.45) a (9.46) vede na rovnici

$$\hat{Y}_p = \frac{1}{R_p} - j \frac{1}{\omega L_p} = \hat{Y}_s = \frac{R_s}{R_s^2 + (\omega L_s)^2} - j \frac{\omega L_s}{R_s^2 + (\omega L_s)^2} \quad (9.47)$$

Podmínka rovnosti reálných a imaginárních částí v (9.47) vede na tyto dvě rovnice

$$\frac{1}{R_p} = \frac{R_s}{R_s^2 + (\omega L_s)^2} \quad -j \frac{1}{\omega L_p} = -j \frac{\omega L_s}{R_s^2 + (\omega L_s)^2} \quad (9.48)$$

Odtud již snadno vypočítáme převodní vztahy pro přechod od sériového náhradního obvodu reálné cívky k ekvivalentnímu paralelnímu náhradnímu obvodu

$$R_p = \frac{R_s^2 + (\omega L_s)^2}{R_s} \quad L_p = \frac{R_s^2 + (\omega L_s)^2}{\omega^2 L_s} \quad (9.49)$$

Oba parametry paralelního obvodu jsou funkcí frekvence. Převodní vztah (9.49) umožňuje převést sériový obvod na paralelní, numerické hodnoty prvků paralelního obvodu však platí jen pro jednu frekvenci.

Za předpokladu vysokého činitele jakosti seriového náhradního obvodu, $Q_s \gg 1$, platí podle vztahu (9.7):

$$Q_s = \frac{\omega L_s}{R_s} \gg 1 \quad \rightarrow \quad R_s \ll \omega L_s \quad (9.50)$$

Tato podmínka vede k podstatnému zjednodušení převodních vztahů (9.49).

$$R_p \doteq \frac{(\omega L_s)^2}{R_s} = R_s \left(\frac{\omega L_s}{R_s} \right)^2 = R_s Q_s^2 \quad L_p \doteq L_s \quad (9.51)$$

Převodní vztahy nejsou frekvenčně závislé, teoreticky platí pro všechny frekvence. Navíc mají jednoduchý praktický význam: obě náhradní indukčnosti jsou přibližně stejné, poměr paralelního a sériového náhradního odporu je téměř roven čtverci sériového činitele jakosti. Z tohoto hlediska je sériový náhradní obvod vhodný pro cívky s vysokým činitelem jakosti.

Z definice $\hat{Y} = G + jB$ můžeme z posledního výrazu ve vztahu (9.47) získat konduktanci a susceptanci sériového obvodu

$$G(\omega) = \frac{R_s}{R_s^2 + (\omega L_s)^2} \quad B(\omega) = -\frac{\omega L_s}{R_s^2 + (\omega L_s)^2} \quad (9.52)$$

Jak konduktance, tak susceptance ve vztahu (9.52) jsou racionální lomenné funkce úhlové frekvence ω . V případě konduktance je stupeň polynomu v čitateli roven nule a ve jmenovateli roven 2, tedy stupeň čitatele je nižší než stupeň jmenovatele. U susceptance je stupeň polynomu v čitateli roven jedné, stupeň polynomu jmenovatele zůstává roven 2. Oba případy potvrzují obecné pravidlo, že pro imitanci stupeň čitatele není vyšší než stupeň jmenovatele.

10 Srážecí kondenzátor – řešení jednoduchého technického problému

Teorie obvodů je bezprostředně aplikovatelná pro návrh elektrických zařízení. Ašak postup při návrhu se dosti liší od výpočtů v teorii obvodů. Optimální návrh musí brát v úvahu mnoho dalších faktorů. Příklad návrhu velmi jednoduchého praktického obvodu ukazuje všechny typické kroky, které je nutno učinit. Součástí teorie obvodů jsou i reálné aplikace.

Příklad 10.1:

Žárovka na napětí 120 V o výkonu 15 W se má připojit k napětí⁹ 220 V, o frekvenci 50 Hz. Uvažujte možná řešení, porovnejte je, vyberte nejlepší a pro toto řešení navrhnete příslušný obvod.

Rozbor

Možná, zdaleka ne však všechna, řešení jsou v níže uvedeném přehledu. Předpokládá se, že princip je dobře znám (ostatně je velmi jednoduchý) a diskutují se hlavní výhody a nevýhody, a to i se zřetelem na realizaci a výrobu.

1. Transformátor

(a) Výhody

- i. Vysoká bezpečnost, dochází k oddělení spotřebiče od sítě.
- ii. Jen malé zvýšení spotřeby.

(a) Nevýhody

- i. Drahý, možná, že by byla nutná kusová výroba.
- ii. Těžký.

2. Srážecí odpor

(a) Výhody

⁹Uvažujeme harmonické napětí v síti.

- i. Technicky jednoduché řešení a jednoduchý návrh.
- ii. Při spálení nepoškodí žárovku, odpojí ji.
- iii. Levný, běžně dostupný.

(a) Nevýhody

- i. Na odporu se bude vyvíjet poměrně velký tepelný výkon. Součástka bude dražší než běžné odpory. Dále bude nutno zajistit odvod tepla, čímž se řešení technicky komplikuje.
- ii. Problém se zajištěním bezpečnosti, důsledkem mohou být dodatečné náklady.

3. Srážecí kondenzátor

(a) Výhody

- i. Technicky jednoduché řešení, složitější návrh.
- ii. Nedojde ke zvýšení spotřeby energie.
- iii. Levný, běžně dostupný.
- iv. Na kondenzátoru se uplatní kapacitní jalový výkon, který v principu vede k částečné kompenzaci induktivního jalového výkonu sítě a tím teoreticky ke zlepšení účinníku.

(a) Nevýhody

- i. Při průrazu bude plné napětí na žárovce, které ji zničí.
- ii. Problém se zajištěním bezpečnosti, což může vyžadovat dodatečné náklady.

4. Dělič napětí

(a) Výhody

- i. Technicky jednoduché řešení, návrh je obtížnější.

(a) Nevýhody

- i. Mnohonásobné zvýšení spotřeby.
- ii. Při přepálení se může dostat vyšší napětí na žárovku.
- iii. Problém se zajištěním bezpečnosti, případně spojení s dodatečnými náklady.
- iv. Poněvadž je na děliči vyšší tepelný výkon než na žárovce, vznikají vážné problémy se zajištěním odvodu tepla. Dělič by musel být rozměrný.

Volba: Srážecí kondenzátor v sérii se žárovkou.

Výpočet parametrů (kapacity a průrazného napětí) kondenzátoru.

Žárovka představuje prakticky ideální odpor. Je nepřímo zadána velikost proudu tekoucího obvodem, proto stačí jen řešení pro absolutní hodnoty obvodových veličin a parametrů. Žárovku považujeme za ideální odpor, napětí na ní označíme $U_R = 120$ V. Napětí sítě $U = 220$ V.

Poněvadž je žárovka čistý odpor, její účinník je roven jedné. Proto pro výkon harmonického proudu na ní platí vztah

$$P = U_R I = \frac{U_R^2}{R} = R I^2$$

Z druhé části tohoto vztahu lze vypočítat odpor žárovky

$$R = \frac{U_R^2}{P} = \frac{14400}{15} \doteq 960 \Omega$$

Síťové napětí U , napětí na odporu U_R a napětí na kondenzátoru U_C nejsou ve fázi, proto se nesmí sčítat jejich absolutní hodnoty, ale musí se s nimi počítat jako s fázory. Odparem i kondenzátorem teče stejný proud, napětí na odporu U_R je ve fázi s ním, napětí na kondenzátoru je v kvadratuře vůči proudu a zpožďuje se za ním. Důležité je, že napětí na odporu U_R a na kondenzátoru U_C jsou navzájem kolmá. Síťové napětí U , jako jejich vektorový součet, pak tvoří přeponu pravoúhlého trojúhelníku, tj.

$$U^2 = U_C^2 + U_R^2$$

Na kondenzátoru je tedy napětí

$$U_C = \sqrt{U^2 - U_R^2} \quad (10.1)$$

Na druhé straně určíme napětí na kondenzátoru z proudu, který jím teče, pomocí Ohmova zákona pro střídavé proudy. V našem případě stačí jen efektivní hodnoty napětí a proudu

$$U_C = Z_C I = \frac{1}{\omega C} \frac{U_R}{R} \quad (10.2)$$

kde jsme použili Ohmův zákon pro odpor R

$$I = \frac{U_R}{R}$$

a dobře známý vztah

$$Z_C = |\hat{Z}_C| = \frac{1}{|j\omega C|} = \frac{1}{\omega C}$$

pro absolutní hodnotu impedance kondenzátoru.

Levé strany výrazů (10.1) a (10.2) se rovnají, musí se tedy rovnat i pravé strany

$$\frac{1}{\omega C} \frac{U_R}{R} = \sqrt{U^2 - U_R^2}$$

Po úpravě obdržíme výraz

$$\frac{\omega C R}{U_R} = \frac{1}{\sqrt{U^2 - U_R^2}}$$

Pro kapacitu srážecího kondenzátoru již snadno dostaneme konečný výraz a hodnotu

$$C = \frac{1}{\omega R} \frac{U_R}{\sqrt{U^2 - U_R^2}} = \dots = 2,16 \mu\text{F}$$

Kondenzátor musí být však testován na špičkovou hodnotu napětí na něm. Poněvadž vztah (10.1) udává efektivní hodnotu, špičková hodnota se vypočítá jednoduchou úpravou

$$U_{C0} = \sqrt{2} \sqrt{U^2 - U_R^2} = 260 \text{ V}$$

Do série se žárovkou je tedy nutno připojit kondenzátor o kapacitě $2,16 \mu\text{F}$, u kterého je zaručeno, že se neprorazí napětím 260 V .

Diskuse

Prakticky bychom volili hodnotu kondenzátoru z řady, např. 20 % řady 1 - 1,5 - 2,2 - 3,3 - 4,7 - 6,8 - 10. Přednost by měla mít hodnota nižší, pak je na žárovce poněkud menší napětí. Vyšší hodnota z řady však není úplně na závadu, poněvadž žárovka musí snést napětí o několik voltů vyšší. Podle normy totiž může síťové napětí kolísat v rozsahu -15% a +5%. Volili bychom hodnotu 2,2 μF . Kondenzátor však nesmí být elektrolytický, prochází jím střídavý proud. Použili bychom kondenzátor s metalizovaným papírem, který mívá dostatečnou kapacitu, ale je objemný. Pokud by byla požadovaná kapacita příliš velká, museli bychom spojit paralelně kondenzátory vhodných menších kapacit. Tím se však řešení prodraží.

Příklad 10.2:

Pro žárovku se srážecím kondenzátorem v příkladu 10.1 vypočítejte všechny výkony.

Řešení

Poněvadž jsme v příkladu 10.1 nepotřebovali impedanci, budeme počítat výkony z obvodových veličin. Obvod obsahuje kondenzátor a odpor, ale nikoliv cívku, z hlediska výkonů je jedná o kapacitní zátěž. Pro výkony použijeme definice

$$\begin{aligned} P &= UI \cos \varphi \\ Q &= UI \sin \varphi \\ S &= UI \end{aligned} \quad (10.3)$$

V těchto vztazích je φ fázový úhel mezi napětím a proudem, který se měří od proudu k napětí. V našem případě je to úhel záporný, poněvadž na kapacitní zátěži proud předbíhá napětí. Jalový výkon tedy bude záporný.

Síťové napětí U je dáno. Proud I tekoucí obvodem určíme z Ohmova zákona pro žárovku

$$I = \frac{U_R}{R} \quad (10.4)$$

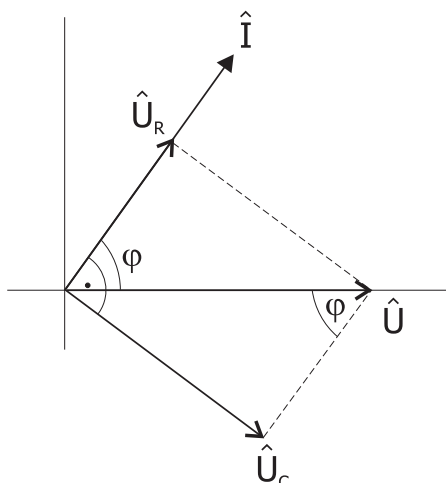
Zbývá určit fázový úhel φ , či jednodušeji jeho sinus a kosinus. Určí se z fázorů všech tří napětí. Musíme však dát pozor na znaménko, již jsme zdůraznili, že u výkonů se fázový úhel počítá od proudu k napětí. Proud je přitom ve fázi s napětím U_R . Napětí na kondenzátoru U_C je oproti tomuto napětí a proudu v kvadratuře, tj. svírá s ním pravý úhel.

Nakreslíme-li fázorový diagram, na obr. 10.1 snadno pro hledaný kosinus a sinus zjistíme

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{U_R}{U} \\ -\sin \varphi &= \frac{U_C}{U} \end{aligned} \quad (10.5)$$

Naposledy vysvětlíme, že znaménko minus je u druhého vztahu proto, že úhel φ má zápornou hodnotu, na pravé straně jsou přitom obě hodnoty kladné. Po dosazení z (10.5) a (10.4) do (10.3) dostaneme

$$\begin{aligned} P &= UI \cos \phi = U \frac{U_R}{R} \frac{U_R}{U} = \frac{U_R^2}{R} = 15 \text{ W} \\ Q &= UI \sin \phi = -U \frac{U_R}{R} \frac{U_C}{U} = -\frac{U_R U_C}{R} = -\frac{U_R \sqrt{U^2 - U_R^2}}{R} = \\ &= -23,05 \text{ VAr} = 23,05 \text{ VAr kap} \end{aligned}$$



Obrázek 10.1: Fázorový diagram pro žárovku v sérii se srážecím kondenzátorem

$$S = UI = U \frac{U_R}{R} = 27,5 \text{ VA}$$

Pro účinník dostáváme, např. ze vztahu (10.5), hodnotu

$$\cos\phi = \frac{U_R}{U} = 0,55 \text{ kap}$$

Fázový úhel mezi napětím a proudem, měřený od proudu k napětí, tj. i se znaménkem, určíme ze vztahů (10.5)

$$\varphi = -\arcsin\left(\frac{U_C}{U}\right) = -\arcsin\left(\frac{\sqrt{U^2 - U_R^2}}{U}\right) = -0,99 \text{ rad} = -57^\circ$$

Pro jednoduchou kontrolu výpočtu vypočítáme zdánlivý výkon z trojúhelníku výkonů

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 27,5 \text{ VA}$$

což v rámci zaokrouhlování souhlasí.

Diskuse

Činný výkon se zařazením (ideálního) kondenzátoru nezmění, což je velká výhoda tohoto řešení. Vytváří se ale jalový výkon, avšak se záporným znaménkem, poněvadž se jedná o kapacitní zátěž. Účinník je poměrně malý, z jeho hodnoty nepoznáme znaménko jalového výkonu, proto se numerická hodnota jalového výkonu doplňuje zkratkou *kap.*, abychom vyjádřili, že se jedná o obvod s kapacitní složkou, tedy záporným jalovým výkonem. Záporný jalový výkon je dokonce výhodný, poněvadž umožní částečně kompenzovat kladný jalový výkon od prvků s induktivní složkou, tj. od zátěží induktivního charakteru, které v síti výrazně převládají.

11 Lineární zdroj

Nejjednodušším náhradním obvodem reálného zdroje je lineární zdroj. V tomto cvičení se jednak určují jeho parametry z experimentálních dat, jednak se pro daný náhradní obvod zjišťují jeho charakteristiky. Důraz je kladen na odvození podmínky výkonového přizpůsobení a na zjištění výkonových charakteristik za různých podmínek – blízko chodu naprázdno a blízko zkratu.

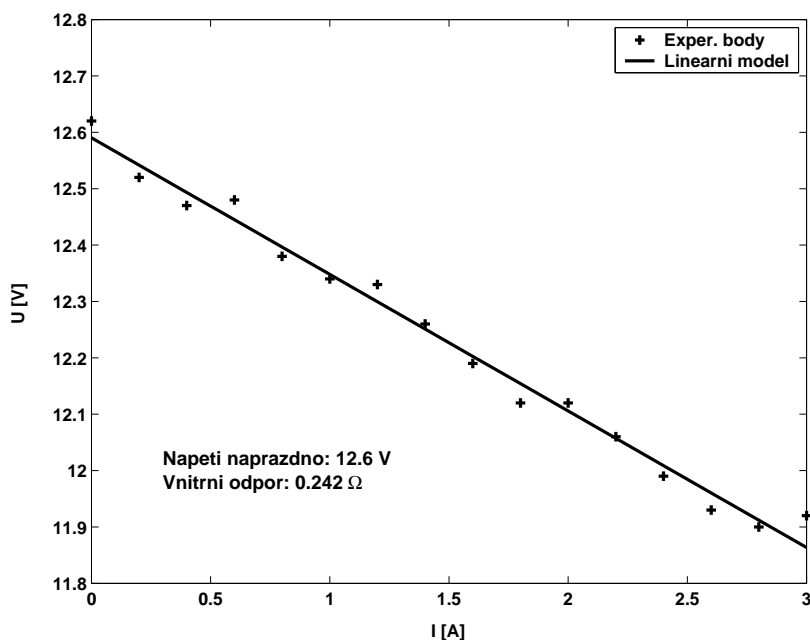
Je nutno předem předeslat, že lineární zdroj, tak jak jej řešíme v této části, existuje jen v teorii obvodů. Je však dobrou náhradou reálného zdroje napětí pro malé odebírané proudy. Odlišnost je při velkých odebíraných proudech, např. v blízkosti zkratu a při něm. Většina reálných zdrojů se zkratem zničí. Pokud zkrat snesou, jejich zatěžovací charakteristika při větších proudech není lineární.

Příklad 11.1:

Zatěžovací charakteristika lineárního zdroje napětí je dána tabulkou 11.1. Určete parametry lineárního modelu zdroje s nejvyšší možnou přesností. Dále zjistěte zkratový proud, výkon dodávaný zdrojem v závislosti na proudu tekoucím zátěží, účinnost (obecně), podmínku výkonového přizpůsobení, ztrátový výkon. Diskutujte případ výkonového přizpůsobení.

Řešení

Již z prvního pohledu do tabulky je zřejmé, že data jsou dosti značně rozptýlena. Nelze tedy zvolit dva body, i když třeba vzdálené, a z nich nakreslit zatěžovací přímkou. Je nutno vykreslit všechny body. Přitom je nutno vzít v úvahu, že napětí se mění v rozsahu asi 2 V, nemá tedy smysl volit svislou stupnici tak, aby začínala nulou. Stupnice proudů ovšem nulou začíná. Experimentálními body se pak proloží přímkou tak, aby zhruba polovina bodů byla nad ní a polovina pod ní. Příklad možné přímky je na obr. 11.1.



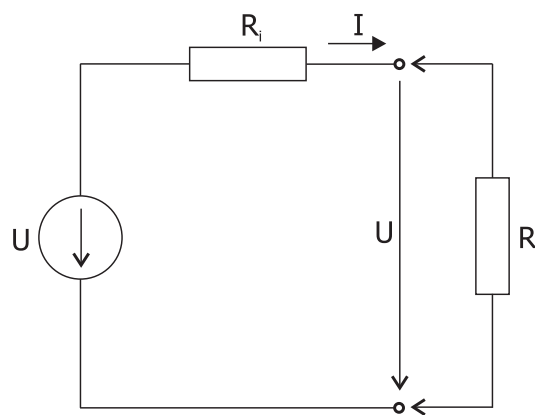
Obrázek 11.1: Zatěžovací charakteristika lineárního zdroje

Zatěžovací charakteristika lineárního zdroje na obr. 11.2 je popsána vztahem

$$U = U_0 - R_i I \quad (11.1)$$

kde U je svorkové napětí (napětí na zátěži), I je proud tekoucí zátěží, U_0 je napětí na svorkách naprázdno, R_i je vnitřní odpor zdroje. Zatěžovací charakteristiku zpracujeme takto:

- Z průsečíku přímky se svislou osou určíme napětí naprázdno U_0 .
- Směrnici R_i určíme graficky takto:



Obrázek 11.2: Náhradní obvod reálného zdroje

Tabulka 11.1: Body změřené zatěžovací charakteristiky lineárního zdroje

| | | | | | | | | |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| I [A] | 0.00 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 | 1.2 | 1.4 |
| U [V] | 12.62 | 12.52 | 12.47 | 12.48 | 12.38 | 12.34 | 12.33 | 12.26 |
| I [A] | 1.6 | 1.8 | 2.0 | 2.2 | 2.4 | 2.6 | 2.8 | 3.0 |
| U [V] | 12.19 | 12.12 | 12.12 | 12.06 | 11.99 | 11.93 | 11.90 | 11.92 |

- Nakreslíme pravouhlý trojúhelník, jehož přeponou je zatěžovací charakteristika a odvěsny jsou rovnoběžné se souřadnými osami. Trojúhelník by měl být co největší.
- Na odvěsnách odečteme změnu proudu ΔI a změnu napětí ΔU . Pozor! Neodečítají se mm, ale volty a ampéry. Odečtené mm je nutno pomocí modulů nebo úvahou převést správně na volty a ampéry.
- Vnitřní odpor se pak určí ze vztahu

$$R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I} \quad (11.2)$$

Při správném postupu by měly vyjít hodnoty jen málo odlišné¹⁰ od $U_0 = 12,6$ V a $R_i = 0,25$ Ω .

Z parametrů zdroje lze určit zkratový proud. Ve zkratu je $U = 0$ a ze zatěžovací charakteristiky (11.1) plyne

$$I_{zkr} = \frac{U_0}{R_i} = 50 \text{ A} \quad (11.3)$$

Je zřejmé, že názornější praktické parametry lineárního zdroje jsou napětí naprázdno $U_0 = 12,6$ V a zkratový proud $I_{zkr} = 50$ A. Pokud použijeme zkratový proud, podle vztahu (11.3) platí

$$R_i = \frac{U_0}{I_{zkr}} \quad (11.4)$$

Vztah (11.1) lze psát i v názornějším tvaru

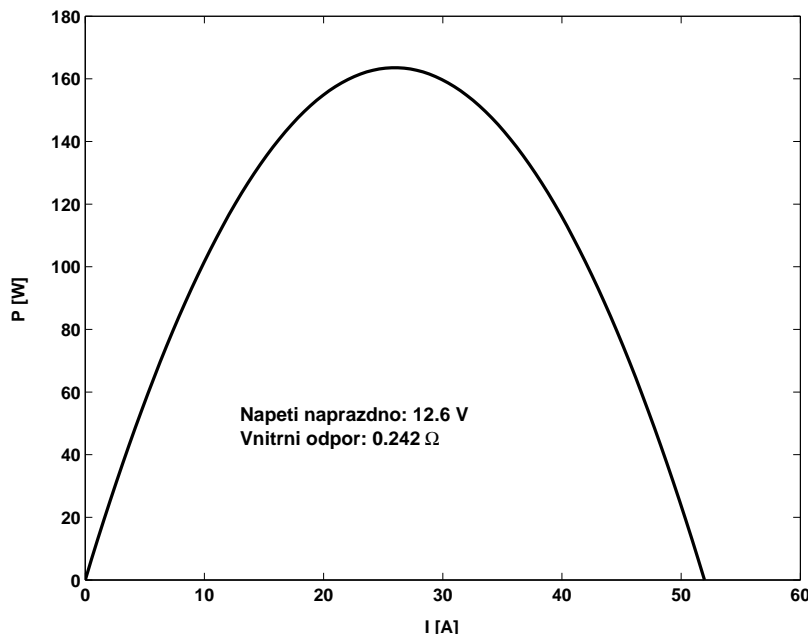
$$U = U_0 - R_i I = U_0 - I \frac{U_0}{I_{zkr}} = U_0 \left(1 - \frac{I}{I_{zkr}} \right) \quad (11.5)$$

¹⁰Důvodem mírné odlišnosti výsledků je to, že přímka se prokládá naměřenými body ručně. Působí zde subjektivní faktor. Při použití polynommické regrese je výsledek jednoznačný, viz obr. 11.1

Pokud chceme získat výkonovou charakteristiku v závislosti na proudu tekoucím zátěží, vyjdeme ze zatěžovací charakteristiky (11.1). Platí

$$P = UI = (U_0 - R_i I)I = U_0 I - R_i I^2 \quad (11.6)$$

Průběh výkonu je na obr. 11.3.



Obrázek 11.3: Výkonová charakteristika lineárního zdroje

Účinnost můžeme jednoduše získat z výkonu uvolněného na zátěži $P = RI^2$ a z celkového výkonu dodávaného ideálním zdrojem $P_0 = (R + R_i)I^2$

$$\eta = 100 \frac{P}{P_0} = 100 \frac{RI^2}{(R + R_i)I^2} = 100 \frac{R}{(R + R_i)} \quad (11.7)$$

V zapojení naprázdno, $R \rightarrow \infty$, je účinnost v limitě jednotková, v zapojení nakrátko, $R \rightarrow 0$, je nulová. Přehlednější je však vyjádřit účinnost v závislosti na odebíraném proudu. V tom případě získáme užitečný výkon ze vztahu (11.5)

$$P = UI = U_0 I \left(1 - \frac{I}{I_{zkr}}\right) \quad (11.8)$$

Výkon dodávaný ideálním zdrojem je $P_0 = U_0 I$, tedy pro účinnost dostaneme za pomoci (11.8) vztah

$$\eta = 100 \frac{P}{P_0} = 100 \frac{U_0 I \left(1 - \frac{I}{I_{zkr}}\right)}{U_0 I} = 100 \left(1 - \frac{I}{I_{zkr}}\right) \quad (11.9)$$

Účinnost je v tomto případě lineární klesající funkcí odebíraného proudu. V zapojení naprázdno, $I = 0$, je účinnost jednotková, v zapojení nakrátko, $I = I_{zkr}$, je nulová.

Při výpočtu výkonu pro zadanou zátěž R můžeme postupovat několika způsoby. V každém případě však musíme znát napětí na svorkách zátěže, nebo proud, který jí protéká, případně obojí. Poněvadž jsou vnitřní a zatěžovací odpor zapojeny do série, zátěží teče proud

$$I = \frac{U_0}{R + R_i} \quad (11.10)$$

Pro napětí na zátěži pak již snadno s pomocí (11.10) odvodíme

$$U = RI = \frac{U_0 R}{R + R_i} \quad (11.11)$$

Výkon na zátěži tedy činí

$$P = UI = \frac{RU_0^2}{(R + R_i)^2} \quad (11.12)$$

Tento výkon jsme stejně dobře a rychleji mohli odvodit pomocí vztahů

$$P = RI^2 = R \left(\frac{U_0}{R + R_i} \right)^2 = \frac{RU_0^2}{(R + R_i)^2} \quad (11.13)$$

nebo

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{\left(\frac{U_0 R}{R + R_i} \right)^2}{R} = \frac{RU_0^2}{(R + R_i)^2} \quad (11.14)$$

Podmínka maxima výkonu má tvar

$$\frac{dP}{dR} = 0 \quad (11.15)$$

Po zderivování dostaneme podmínku přizpůsobení zátěže

$$R = R_i \quad (11.16)$$

Ve stavu výkonového přizpůsobení (11.16) platí toto:

1. Proud je roven polovině zkratového proudu, vztahy (11.10) a (11.3).
2. Napětí na zátěži je poloviční v porovnání s napětím zdroje, vztah (11.11).
3. Účinnost je 50 procent, vztah (11.7).
4. Na zátěži se uvolní stejný výkon jako na vnitřním odporu.

Ztrátový výkon

$$P_{ztr} = R_i I^2 \quad (11.17)$$

se mění v teplo uvnitř zdroje. Je nulový při nepřipojené zátěži a maximální ve zkratu. Ve zkratu také udává výkon, který musí ideální náhradní zdroj dodat. Ve zkratu se tedy ve zdroji mění na teplo tento výkon

$$P_{ztr-zk} = R_i I_{zkr}^2 = \frac{U_0}{R_i} = 159 \text{ W} \quad (11.18)$$

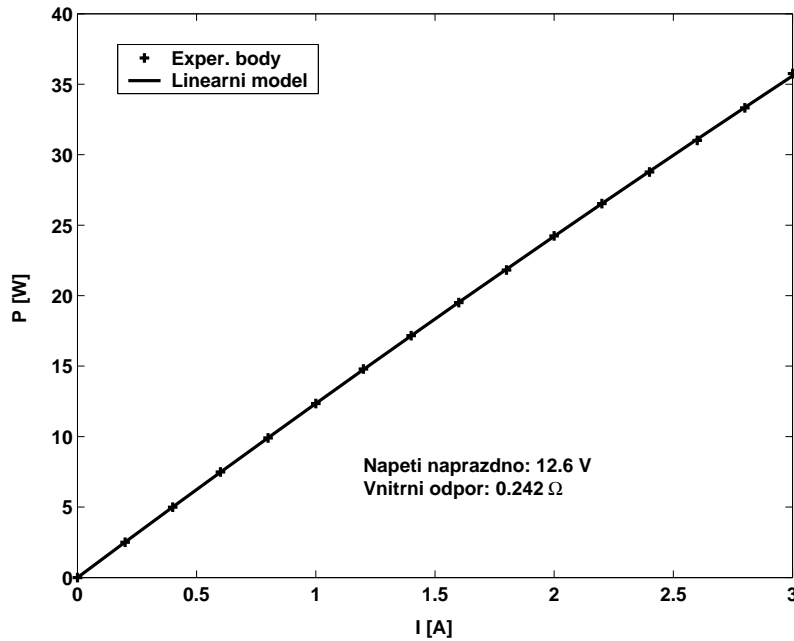
Příklad 11.2:

Aproximujte výkon dodávaný lineárním zdrojem napětí pro malé a velké odebírané proudy. Velkým proudem se myslí proud blízko zkratového.

Řešení

Pro výkon na zátěži jsme odvodili vztah (11.8)

$$P = UI = U_0 I \left(1 - \frac{I}{I_{zkr}} \right) \quad (11.19)$$



Obrázek 11.4: Výkonová charakteristika lineárního zdroje, malé proudy

kde I_{zkr} je zkratový proud.

V případě malých odebíraných proudů je $I \ll I_{zkr}$, proto lze výraz (11.19) zjednodušit. Poněvadž také $\frac{I}{I_{zkr}} \ll 1$, platí

$$P = U_0 I \left(1 - \frac{I}{I_{zkr}} \right) \doteq U_0 I \quad (11.20)$$

Pro malé proudy narůstá výkon lineárně s proudem. To potvrzují experimentální hodnoty z předchozího příkladu, které jsou v grafické podobě na obrázku 11.4.

V případě velkých odebíraných proudů je $I \doteq I_{zkr}$. Ve vztahu (11.19) můžeme položit $U_0 I \doteq U_0 I_{zkr}$. Nemůžeme však psát

$$\frac{I}{I_{zkr}} \doteq 1$$

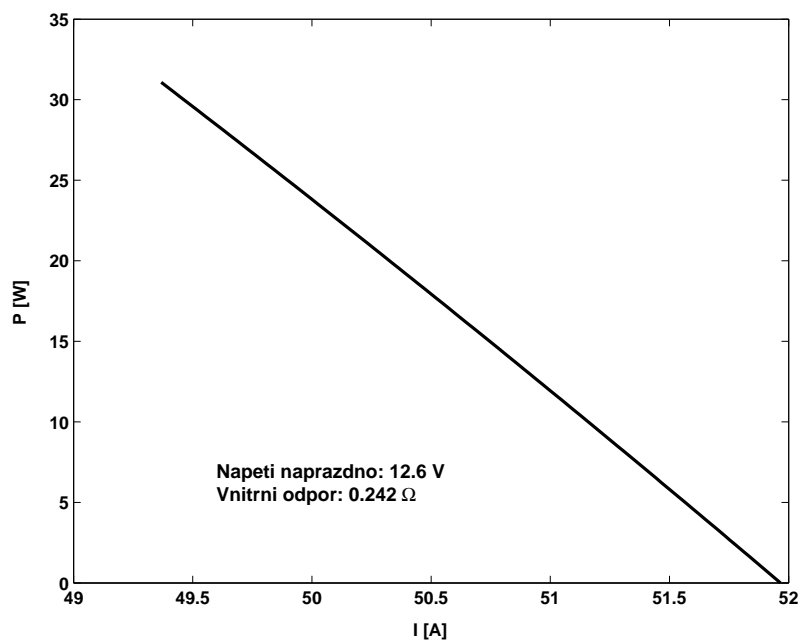
poněvadž zde se porovnávají dvě blízké hodnoty. Navíc bychom vyloučili proud v zátěži úplně. Z tohoto zdůvodnění plyne aproximace

$$P = U_0 I \left(1 - \frac{I}{I_{zkr}} \right) \doteq U_0 I_{zkr} \left(1 - \frac{I}{I_{zkr}} \right) \quad (11.21)$$

V blízkosti zkratového proudu výkon klesá lineárně s odebíraným proudem, což potvrzuje obrázek 11.5, tentokrát bez experimentálních bodů.

12 Trojfázové obvody

Nejprve se ověřují, s využitím složkového tvaru fázorů, základní vztahy pro budící napětí: nulový součet, vztah mezi fázovým a sdruženým napětím. Aplikací příklady se omezují na čistě odporovou nesouměrnou zátěž, ale na druhé straně počítají všechny obvodové parametry a též činné výkony pro všechna základní zapojení: čtyřvodičová hvězda, třívodičová hvězda a trojúhelník. Výpočty jsou doplněny fázorovými diagramy.



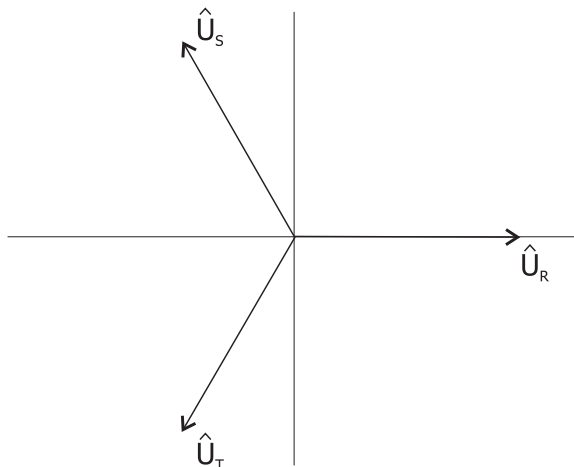
Obrázek 11.5: Výkonová charakteristika lineárního zdroje, velké proudy, blízko zkratu

Příklad 12.1:

Ukažte, že součet fázových napětí u symetrické soustavy je roven nule.

Řešení:

Pro fázory napětí symetrické soustavy, viz obr. 12.1 platí vztahy



Obrázek 12.1: Fázová napětí trojfázové souměrné soustavy

$$\hat{U}_R = U \quad \hat{U}_S = \hat{a}U \quad \hat{U}_T = \hat{a}^2U \quad (12.1)$$

kde

$$\hat{a} = e^{j\frac{2}{3}\pi} \quad \hat{a}^2 = e^{j\frac{4}{3}\pi} = e^{-j\frac{2}{3}\pi} \quad (12.2)$$

Z (12.1) plyne, že dokázat vztah

$$\hat{U}_R + \hat{U}_S + \hat{U}_T = 0 \quad (12.3)$$

je totéž, jako dokázat platnost vztahu

$$1 + \hat{a} + \hat{a}^2 = 0 \quad (12.4)$$

Při důkazu platnosti vztahu (12.4) rozepíšeme exponenciální tvary (12.2) na složkové. K tomu musíme nejdříve odvodit hodnoty $\cos(30^\circ)$ a $\sin(30^\circ)$.

$$\begin{aligned}\cos(120^\circ) &= \cos(90^\circ + 30^\circ) = \cos(90^\circ)\cos(30^\circ) - \sin(90^\circ)\sin(30^\circ) = \\ &= -\sin(30^\circ) = -\frac{1}{2}\end{aligned}\quad (12.5)$$

$$\begin{aligned}\sin(120^\circ) &= \sin(90^\circ + 30^\circ) = \sin(90^\circ)\cos(30^\circ) + \cos(90^\circ)\sin(30^\circ) = \\ &= \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\quad (12.6)$$

K určení hodnot $\cos(30^\circ)$ a $\sin(30^\circ)$ si musíme vzpomenout, že v pravoúhlém trojúhelníku o úhlech 30° a 60° má přepona délku 2, delší odvěsna délku $\sqrt{3}$ a kratší odvěsna délku 1, viz obr. 3.1b.

Pomocí vztahů (12.5) a (12.6) zjistíme složkové hodnoty konstant \hat{a} a \hat{a}^2 v (12.2).

$$\hat{a} = e^{j\frac{2}{3}\pi} = \cos(120^\circ) + j\sin(120^\circ) = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\quad (12.7)$$

$$\hat{a}^2 = e^{-j\frac{2}{3}\pi} = \cos(-120^\circ) + j\sin(-120^\circ) = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\quad (12.8)$$

Z posledních dvou vztahů, (12.7) a (12.8), již snadno dosazením dokážeme platnost vztahu (12.4).

Příklad 12.2:

Odvoďte vztah mezi fázovými a sdruženými napětími pro zapojení trojfázového spotřebiče do hvězdy.

Řešení:

Pro fázová napětí $\hat{U}_R, \hat{U}_S, \hat{U}_T$ platí vztah (12.1). Sdružená napětí $\hat{U}_{RS}, \hat{U}_{ST}, \hat{U}_{TS}$ definujeme jako rozdíl fázových napětí, viz obr. 12.2a

$$\begin{aligned}\hat{U}_{RS} &= \hat{U}_R - \hat{U}_S \\ \hat{U}_{ST} &= \hat{U}_S - \hat{U}_T \\ \hat{U}_{TS} &= \hat{U}_T - \hat{U}_R\end{aligned}\quad (12.9)$$

Směr sdruženého napětí je tedy od druhého indexu k prvnímu, např. sdružené napětí \hat{U}_{ST} směřuje od "konce" fázoru fázového napětí \hat{U}_T ke "konci" fázoru \hat{U}_S , viz též obr. ea.

V dalším budeme používat pro efektivní hodnotu libovolného fázového napětí symbol U_f . Tedy $U_f = U = U_R = U_S = U_T$.

Po dosazení z (12.1) do prvního vztahu v (12.9) dostaneme

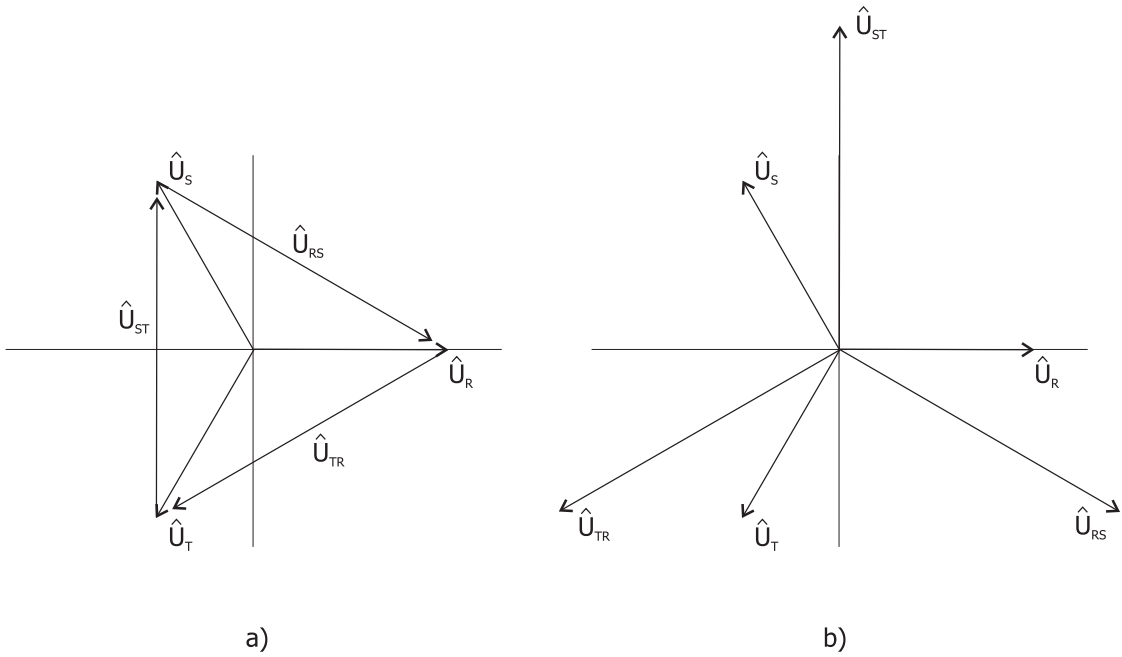
$$\hat{U}_{RS} = \hat{U}_R - \hat{U}_S = U - \hat{a}U = (1 - \hat{a})U\quad (12.10)$$

Do koncového výrazu v (12.10) dosadíme ze složkového tvaru (12.7) pro koeficient \hat{a}

$$\hat{U}_{RS} = (1 - \hat{a})U = U \left(1 - \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = U \left(\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)\quad (12.11)$$

Tento vztah převedeme na exponenciální. Po jednoduchých početních úpravách dostaneme

$$\hat{U}_{RS} = \sqrt{3}U e^{-j\frac{1}{6}\pi}\quad (12.12)$$



Obrázek 12.2: Sdružená a fázová napětí. a) Definice sdružených napětí, b) vztah mezi fázovými a sdruženými napětími

Pokud jde o efektivní hodnotu, sdružené napětí U_{RS} je $\sqrt{3}$ krát větší než fázové U_f a s fázovým napětím \hat{U}_R v základní poloze svírá úhel -30° . Z fázorového diagramu zjistíme, že sdružené napětí \hat{U}_{RS} je kolmé k fázovému napětí \hat{U}_T , viz obr. 12.2b.

Podobně po dosazení z (12.1) do druhého vztahu v (12.9) dostaneme

$$\hat{U}_{ST} = \hat{U}_S - \hat{U}_T = \hat{a}U - \hat{a}^2U = (\hat{a} - \hat{a}^2)U \quad (12.13)$$

Do koncového výrazu v (12.13) dosadíme ze složkového tvaru (12.7) a (12.8) pro koeficienty \hat{a} a \hat{a}^2 . Dostaneme

$$\hat{U}_{ST} = (\hat{a} - \hat{a}^2)U = j\sqrt{3}U \quad (12.14)$$

Tento vztah převedeme na exponenciální. Po jednoduchých početních úpravách dostaneme

$$\hat{U}_{ST} = \sqrt{3}U e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (12.15)$$

Pokud jde o efektivní hodnotu, sdružené napětí U_{ST} je $\sqrt{3}$ krát větší než fázové U_f a s fázovým napětím \hat{U}_R v základní poloze svírá úhel 90° . Z fázorového diagramu zjistíme, že sdružené napětí \hat{U}_{ST} je kolmé k fázovému napětí \hat{U}_R , viz obr. 12.2b.

Konečně po dosazení z (12.1) do posledního vztahu v (12.9) dostaneme

$$\hat{U}_{TR} = \hat{U}_T - \hat{U}_R = \hat{a}^2U - U = (\hat{a}^2 - 1)U \quad (12.16)$$

Do koncového výrazu v (12.16) dosadíme ze složkového tvaru (12.8) pro koeficient \hat{a}^2 .

$$\hat{U}_{TR} = (\hat{a}^2 - 1)U = U \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) = U \left(-\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (12.17)$$

Tento vztah převedeme na exponenciální. Po jednoduchých početních úpravách dostaneme

$$\hat{U}_{TR} = \sqrt{3}U e^{-j\frac{5}{6}\pi} \quad (12.18)$$

Pokud jde o efektivní hodnotu, sdružené napětí U_{TR} je $\sqrt{3}$ krát větší než fázové U_f a s fázovým napětím \hat{U}_R v základní poloze svírá úhel -150° . Z fázorového diagramu zjistíme, že sdružené napětí \hat{U}_{TR} je kolmé k fázovému napětí \hat{U}_S , viz obr. 12.2b.

Poněvadž efektivní hodnoty sdružených napětí jsou stejné, označme je jednotným symbolem U_s . Pak $U_s = U_{RS} = U_{ST} = U_{TR}$. Mezi efektivní hodnotou sdruženého a fázového napětí u symetrické trojfázové soustavy tedy platí obecný vztah

$$U_s = \sqrt{3}U_f \quad (12.19)$$

Dále je sdružené napětí kolmé k tomu fázovému napětí, jehož index chybí v indexech sdruženého napětí, viz obr. 12.2b. Toho se využívá pro měření jalového výkonu trojfázového proudu wattmetry pro činný výkon. Při měření jalového výkonu ve fázi R přivedeme na napěťové svorky wattmetru měřicího proud ve fázi R ve správné polaritě sdružené napětí mezi fázemi S a T. Podobně na napěťové svorky wattmetru měřicího proud ve fázi S přivedeme ve správné polaritě sdružené napětí mezi fázemi R a T. Konečně na napěťové svorky wattmetru měřicího proud ve fázi T přivedeme ve správné polaritě sdružené napětí mezi fázemi R a S. Termín správná polarita znamená, že se musí zachovat systematické pořadí fází na napěťových svorkách. Pokud se ručička některého z wattmetrů výchýlí do záporných hodnot, je nutno přehodit vodiče na napěťových svorkách a údaj wattmetru brát se záporným znaménkem. Poněvadž je sdružené napětí $\sqrt{3}$ krát vyšší než fázové, je nutno konečný součet jalových výkonů dělit $\sqrt{3}$.

Příklad 12.3:

Trojfázová zátěž v soustavě 230/400 V, 50 Hz zapojená do hvězdy obsahuje odpory $R_R = 150 \Omega$, $R_S = 220 \Omega$ a $R_T = 330 \Omega$. Uvažujte čtyřvodičové i třívodičové spojení zdroje a zátěže a podejte úplnou informaci o tomto obvodu a ověřte jejich vypočtené hodnoty.

Řešení:

Čtyřvodičová soustava

V případě čtyřvodičové soustavy, viz. obr. 12.3 je napětí uzlu zátěže vůči zemi nulové, $\hat{U}_N = 0$. Na zátěži jsou tedy fázová napětí

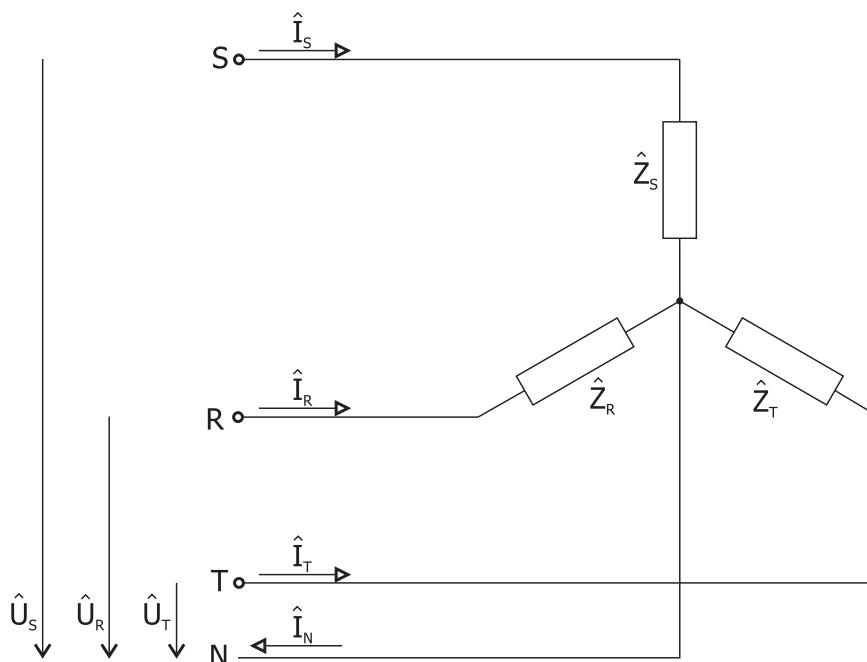
$$\begin{aligned} \hat{U}_R &= U_0 \\ \hat{U}_S &= U_0 e^{j\frac{2}{3}\pi} \\ \hat{U}_T &= U_0 e^{-j\frac{2}{3}\pi} \end{aligned} \quad (12.20)$$

kde $U_0 = 230$ V je modul fázového napětí.

Fázemi tečou proudy¹¹

$$\begin{aligned} \hat{I}_R &= \frac{\hat{U}_R}{\hat{Z}_R} = \frac{U_0}{R_R} = 1,533 + j0,0 = 1,533 e^{j\psi_R} \text{ A} \quad \psi_R = 0^\circ \\ \hat{I}_S &= \frac{\hat{U}_S}{\hat{Z}_S} = \frac{\hat{U}_S}{R_S} = -0,523 + j0,905 = 1,045 e^{j\psi_S} \text{ A} \quad \psi_S = 120^\circ \\ \hat{I}_T &= \frac{\hat{U}_T}{\hat{Z}_T} = \frac{\hat{U}_T}{R_T} = -0,349 - j0,604 = 0,697 e^{j\psi_T} \text{ A} \quad \psi_T = -120^\circ \end{aligned} \quad (12.21)$$

¹¹Fázovou konstantu napětí označujeme symbolem φ , pro fázovou konstantu proudu používáme symbol ψ . Obě doplňujeme vhodným indexem.



Obrázek 12.3: Nesouměrná hvězda s nulovým vodičem, čtyřvodičová soustava

Nulovým vodičem teče proud

$$\hat{I}_N = \hat{I}_R + \hat{I}_S + \hat{I}_T = 0,662 + j0,302 = 0,728 e^{j\psi_N} \text{ A} \quad \psi_N = 24,5^\circ \quad (12.22)$$

Proud nulovým vodičem, 0,73 A, je srovnatelný s fázovými proudy. Fázorový diagram je na obrázku 12.4. Pro komplexní výkony v jednotlivých fázích platí vztahy

$$\begin{aligned} \hat{S}_R &= \hat{U}_R \hat{I}_R^* = \hat{I}_R R_R \hat{I}_R^* = R_R I_R^2 = 358 + j0,0 \text{ VA} \\ \hat{S}_S &= \hat{U}_S \hat{I}_S^* = \hat{I}_S R_S \hat{I}_S^* = R_S I_S^2 = 241 + j0,0 \text{ VA} \\ \hat{S}_T &= \hat{U}_T \hat{I}_T^* = \hat{I}_T R_T \hat{I}_T^* = R_T I_T^2 = 160 + j0,0 \text{ VA} \end{aligned} \quad (12.23)$$

Komplexní výkony mají jen reálnou složku, jak se dalo očekávat pro čistě odporovou zátěž. Činné výkony jsou tedy

$$\begin{aligned} P_R &= \text{Re}(\hat{S}_R) = 358 \text{ W} \\ P_S &= \text{Re}(\hat{S}_S) = 241 \text{ W} \\ P_T &= \text{Re}(\hat{S}_T) = 160 \text{ W} \end{aligned} \quad (12.24)$$

Jalové výkony jsou nulové.

Celkový činný výkon je roven součtu výkonů v jednotlivých fázích

$$P = P_R + P_S + P_T = 759 \text{ W} \quad (12.25)$$

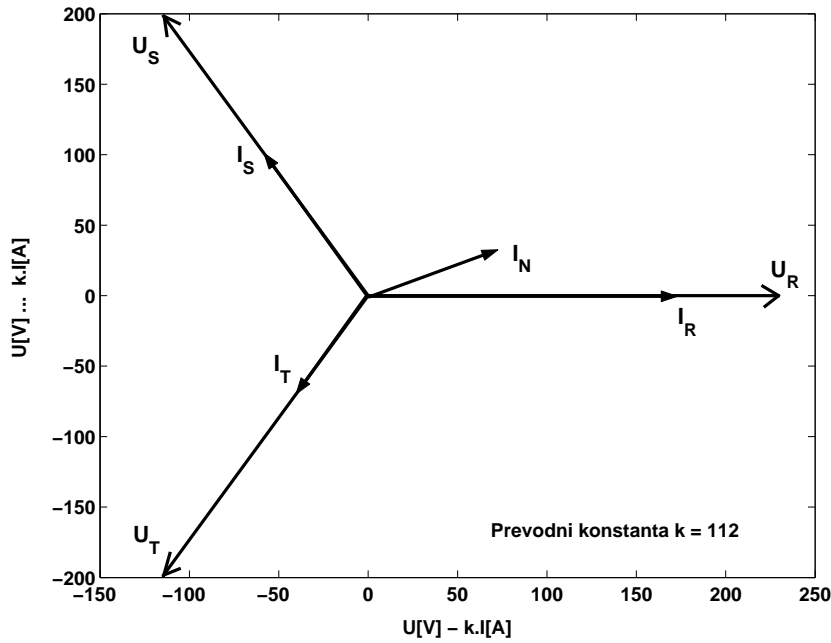
Celkový jalový výkon je nulový, $Q = 0$.

Použitý způsob výpočtu výkonů vychází z dohody pro definici celkového zdánlivého výkonu podle vztahu

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Třívodičová soustava

V případě třívodičové soustavy je uzel zátěže odpojen, viz obr. 12.5, nemůže z něho vytékat žádný proud, tj. $\hat{I}_N = 0$. Uzel bude mít vůči zemi napětí \hat{U}_N , které musíme



Obrázek 12.4: Fázorový diagram nesouměrné hvězdy s nulovým vodičem, čtyřvodičová soustava

vypočítat nejdříve.

Z podmínky, že společný uzel hvězdy není připojen k nulovému vodiči, plyne pro fázové proudy rovnice

$$\hat{I}_R + \hat{I}_S + \hat{I}_T = 0 \quad (12.26)$$

Poněvadž je na nulovém vodiči napětí \hat{U}_N , budou na zátěžích jiná napětí než fázová. Označme je $\hat{U}_1, \hat{U}_2, \hat{U}_3$. Z použité orientace napětí podle obr. 12.5 plynou pro napětí na spotřebičích tyto vztahy

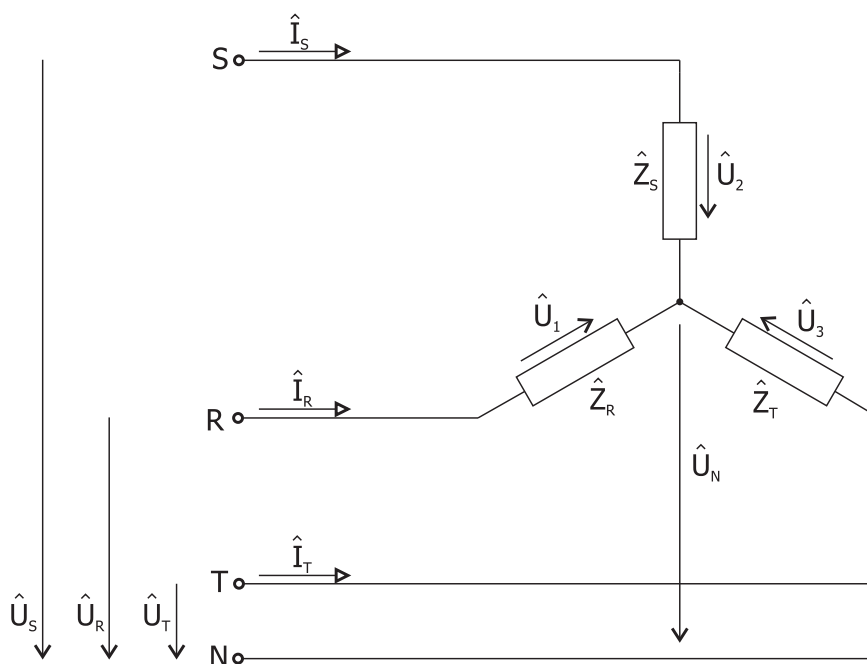
$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \hat{U}_R - \hat{U}_N \\ \hat{U}_2 &= \hat{U}_S - \hat{U}_N \\ \hat{U}_3 &= \hat{U}_T - \hat{U}_N \end{aligned} \quad (12.27)$$

Při výpočtu napětí na spotřebičích se vychází z druhého Kirchhoffova zákona. Nejjednodušším způsobem se tato napětí počítají tak, že se vytvoří uzavřená smyčka obsahující zjišťované napětí. Toto napětí je na levé straně rovnice. Proto se na smyčce postupuje proti směru tohoto napětí. Všechna ostatní napětí smyčky se píšou na pravou stranu rovnice, kladné znaménko je pro smysl souhlasící se směrem oběhu, záporné pro opačnou orientaci napětí. Např. pro napětí \hat{U}_2 vytvoříme "uzavřenou" smyčku tvořenou zátěží \hat{Z}_2 , vodičem ve fázi S, uzlem S, fází zdroje o napětí \hat{U}_S , uzlem N, nulovým vodičem a nezapojenou částí obvodu mezi nulovým vodičem a uzlem hvězdy, kde je napětí \hat{U}_N . Postupujeme proti směru napětí \hat{U}_2 a nalezneme napětí \hat{U}_S shodně orientované se směrem oběhu a napětí \hat{U}_N opačně orientované. Na pravou stranu proto napíšeme napětí \hat{U}_S se znaménkem plus a napětí \hat{U}_N se znaménkem minus, viz druhou rovnici ve vztahu (12.27). Proud v (12.26) vyjádříme pomocí napětí na spotřebičích

$$\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_R} + \frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_S} + \frac{\hat{U}_3}{\hat{Z}_T} = 0 \quad (12.28)$$

Po dosazení z (12.27) do (12.28) dostaneme

$$\frac{\hat{U}_R - \hat{U}_N}{\hat{Z}_R} + \frac{\hat{U}_S - \hat{U}_N}{\hat{Z}_S} + \frac{\hat{U}_T - \hat{U}_N}{\hat{Z}_T} = 0 \quad (12.29)$$



Obrázek 12.5: Nesouměrná hvězda s nulovým vodičem, třívodičová soustava

Z této rovnice již snadno vypočteme napětí nulového uzlu

$$\hat{U}_N = \frac{\frac{\hat{U}_R}{\hat{Z}_R} + \frac{\hat{U}_S}{\hat{Z}_S} + \frac{\hat{U}_T}{\hat{Z}_T}}{\frac{1}{\hat{Z}_R} + \frac{1}{\hat{Z}_S} + \frac{1}{\hat{Z}_T}} \quad (12.30)$$

Po dosazení hodnot impedancí (odporů) dostaneme výsledek

$$\hat{U}_N = 46,5 + j21,2 = 51,1 e^{j\varphi_N} \text{ V} \quad \varphi_N = 24,5^\circ \quad (12.31)$$

Nyní již můžeme po dosazení z (12.20) a (12.31) do (12.27) vypočítat napětí na zátěžích

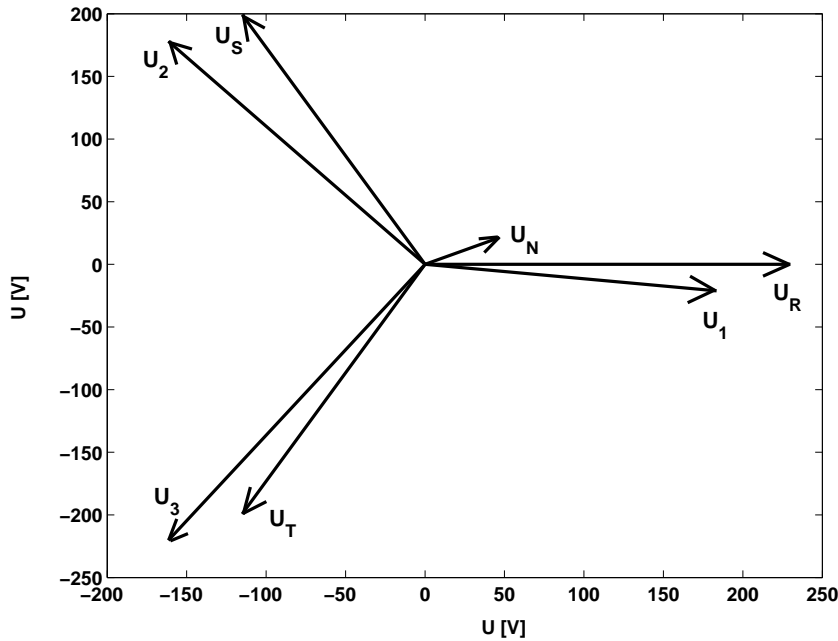
$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \hat{U}_R - \hat{U}_N = 184 - j21,2 = 185 e^{j\varphi_R} \text{ V} & \varphi_R &= -6,59^\circ \\ \hat{U}_2 &= \hat{U}_S - \hat{U}_N = -162 + j178 = 240 e^{j\varphi_S} \text{ V} & \varphi_S &= 132,2^\circ \\ \hat{U}_3 &= \hat{U}_T - \hat{U}_N = -162 - j220 = 273 e^{j\varphi_T} \text{ V} & \varphi_T &= -126,2^\circ \end{aligned} \quad (12.32)$$

Je daleko složitější než fázorový diagram pro hvězdu s uzemněným uzlem, obr. 12.4. A to obsahuje pouze napětí! Fázorový diagram pro všechny tři typy napětí je znázorněn na obrázku 12.6.

Fázové proudy nyní již určíme snadno pomocí Ohmova zákona pro střídavé proudy

$$\begin{aligned} \hat{I}_R &= \frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_R} = \frac{\hat{U}_1}{R_R} = 1,22 - j0,141 = 1,23 e^{j\psi_R} \text{ A} & \psi_R &= -6,59^\circ \\ \hat{I}_S &= \frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_S} = \frac{\hat{U}_2}{R_S} = -0,734 + j0,809 = 1,09 e^{j\psi_S} \text{ A} & \psi_S &= 132,2^\circ \\ \hat{I}_T &= \frac{\hat{U}_3}{\hat{Z}_T} = \frac{\hat{U}_3}{R_T} = -0,489 - j0,668 = 0,828 e^{j\psi_T} \text{ A} & \psi_T &= -126,2^\circ \end{aligned} \quad (12.33)$$

Fázové konstanty fázových proudů a napětí na spotřebičích souhlasí. Součtem hodnot ve složkovém tvaru ve vztazích (12.33) se přesvědčíme, že v rámci zaokrouhlovacích chyb platí podmínka (12.26). Fázorový diagram pro fázové proudy je uvedena na obrázku 12.7.



Obrázek 12.6: Fázorový diagram napětí nesouměrné hvězdy bez nulového vodiče, třívodičová soustava

Při výpočtu výkonů postupujeme formálně stejně jako pro zapojení do hvězdy, uzemněné. Pro komplexní výkony v jednotlivých fázích platí nyní vztahy

$$\begin{aligned}\hat{S}_R &= \hat{U}_1 \hat{I}_R^* = \hat{I}_R R_R \hat{I}_R^* = R_R I_R^2 = 228 + j0,0 \text{ VA} \\ \hat{S}_S &= \hat{U}_2 \hat{I}_S^* = \hat{I}_S R_S \hat{I}_S^* = R_S I_S^2 = 263 + j0,0 \text{ VA} \\ \hat{S}_T &= \hat{U}_3 \hat{I}_T^* = \hat{I}_T R_T \hat{I}_T^* = R_T I_T^2 = 226 + j0,0 \text{ VA}\end{aligned}\quad (12.34)$$

Komplexní výkony mají jen reálnou složku, jak se dalo očekávat pro čistě odporovou zátěž. Činné výkony jsou tedy

$$\begin{aligned}P_R &= \text{Re}(\hat{S}_R) = 228 \text{ W} \\ P_S &= \text{Re}(\hat{S}_S) = 263 \text{ W} \\ P_T &= \text{Re}(\hat{S}_T) = 226 \text{ W}\end{aligned}\quad (12.35)$$

Jalové výkony jsou nulové.

V porovnání výsledků (12.35) s výsledky (12.24) pro zapojení do hvězdy s uzemněným uzlem je vidět podstatný rozdíl. Některé výkony se zvýší, např. P_T , jiné sníží, v našem případě P_R . To má praktický důsledek. Při odpojení nulového vodiče může být na některém spotřebiči takový výkon, že se může poškodit.

Celkový činný výkon je pak součtem výkonů v jednotlivých fázích

$$P = P_R + P_S + P_T = 717 \text{ W} \quad (12.36)$$

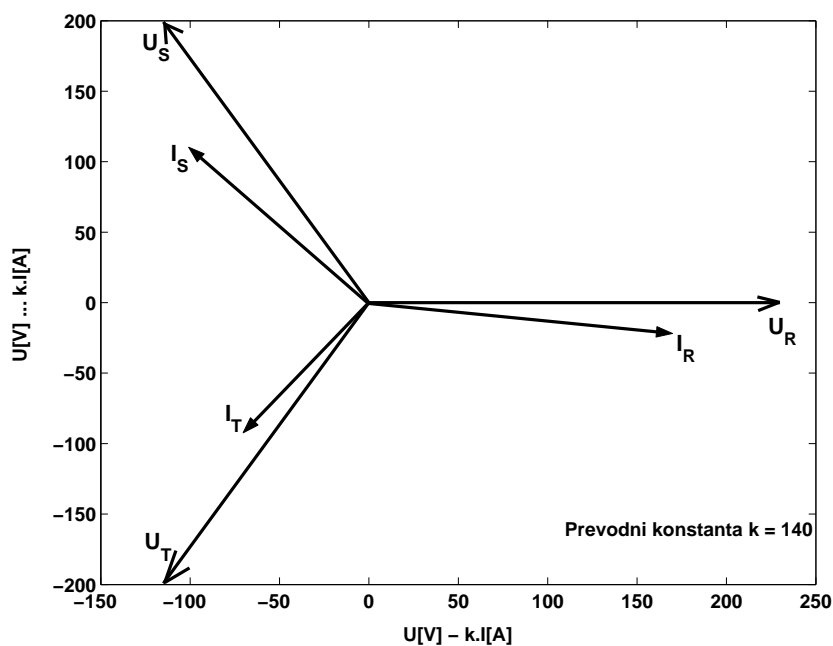
Celkový činný výkon v našem případě poněkud poklesl.

Obdobně jako u třívodičové soustavy použitý způsob výpočtu výkonů vychází z dohody pro definici celkového zdánlivého výkonu podle vztahu

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Příklad 12.4:

Trojfázová zátěž v soustavě 230/400 V 50 Hz zapojená do trojúhelníku obsahuje odpory



Obrázek 12.7: Fázorový diagram proudů nesouměrné hvězdy bez nulového vodiče, třívdíčová soustava

$R_{RS} = 150 \Omega$, $R_{ST} = 220 \Omega$ a $R_{TR} = 330 \Omega$. Podejte úplnou informaci o tomto obvodu a ověřte vypočítané hodnoty.

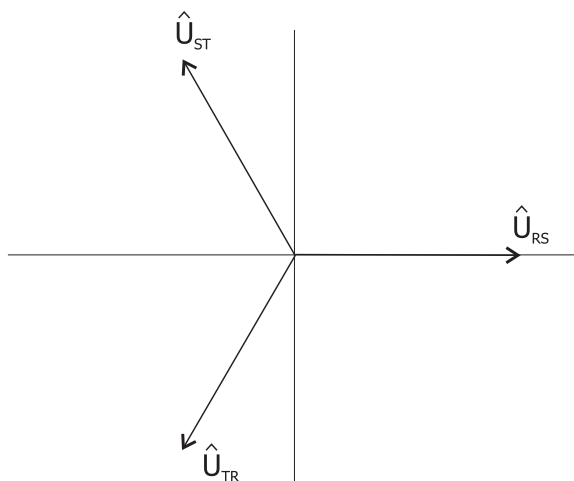
Řešení:

Při zapojení do trojúhelníku, viz obr. 12.9, jsou v soustavě pouze síťová sdružená napětí, která orientujeme takto, viz obr. 12.8

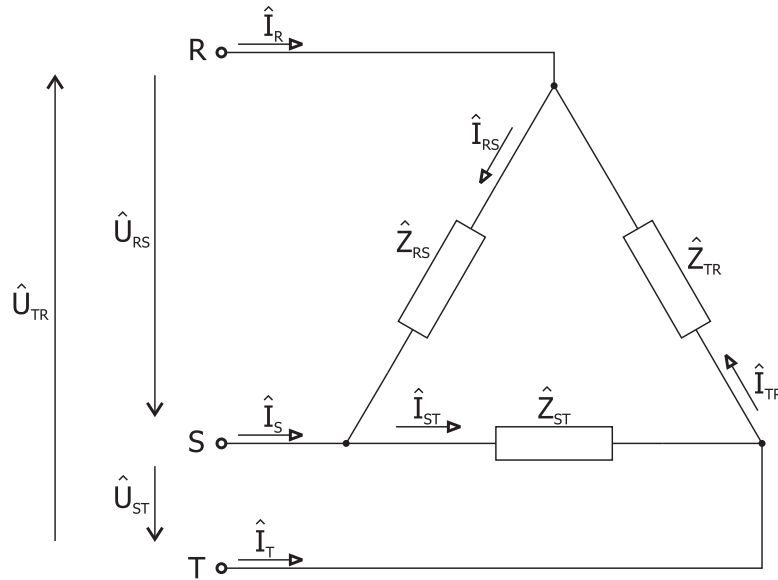
$$\begin{aligned}\hat{U}_{RS} &= U_s \\ \hat{U}_{ST} &= U_s e^{j\frac{2}{3}\pi} \\ \hat{U}_{TR} &= U_s e^{-j\frac{2}{3}\pi}\end{aligned}\quad (12.37)$$

kde $U_s = 400 \text{ V}$ je modul síťového napětí.

Fázemi tečou proudy:¹²



Obrázek 12.8: Napětí v zapojení do trojúhelníku



Obrázek 12.9: Nesouměrný trojúhelník

$$\begin{aligned}\hat{I}_{RS} &= \frac{\hat{U}_{RS}}{\hat{Z}_{RS}} = \frac{U_s}{R_{RS}} = 2,66 + j0,0 = 2,66 e^{j\psi_{RS}} \text{ A} \quad \psi_{RS} = 0^\circ \\ \hat{I}_{ST} &= \frac{\hat{U}_{ST}}{\hat{Z}_{ST}} = \frac{\hat{U}_{ST}}{R_{ST}} = -0,905 + j1,57 = 1,81 e^{j\psi_{ST}} \text{ A} \quad \psi_{ST} = 120^\circ \\ \hat{I}_{TR} &= \frac{\hat{U}_{TR}}{\hat{Z}_{TR}} = \frac{\hat{U}_{TR}}{R_{TR}} = -0,604 - j1,05 = 1,21 e^{j\psi_{TR}} \text{ A} \quad \psi_{TR} = -120^\circ\end{aligned}\quad (12.38)$$

Síťové proudy určíme z definic, viz též obr. 12.9:

$$\begin{aligned}\hat{I}_R &= \hat{I}_{RS} - \hat{I}_{TR} = 3,26 + j1,05 = 3,42 e^{j\psi_R} \text{ A} \quad \psi_R = 17,8^\circ \\ \hat{I}_S &= \hat{I}_{ST} - \hat{I}_{RS} = -3,56 + j1,57 = 3,89 e^{j\psi_S} \text{ A} \quad \psi_S = 156,2^\circ \\ \hat{I}_T &= \hat{I}_{TR} - \hat{I}_{ST} = 0,302 - j2,61 = 2,63 e^{j\psi_T} \text{ A} \quad \psi_T = -83,4^\circ\end{aligned}\quad (12.39)$$

Součtem hodnot ve složkovém tvaru ve vztazích (12.39) se přesvědčíme, že v rámci zaokrouhlovacích chyb je součet síťových proudů nulový. Fázorový diagram je uveden na obrázku 12.10.

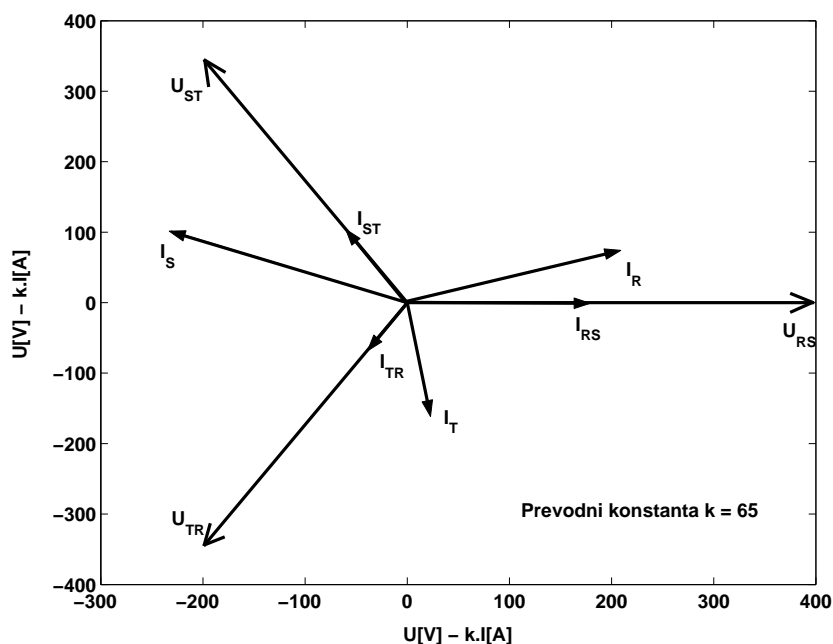
Pro komplexní výkony v jednotlivých fázích platí vztahy

$$\begin{aligned}\hat{S}_{RS} &= \hat{U}_{RS} \hat{I}_{RS}^* = \hat{I}_{RS} R_{RS} \hat{I}_{RS}^* = R_{RS} I_{RS}^2 = 1058 + j0,0 \text{ VA} \\ \hat{S}_{ST} &= \hat{U}_{ST} \hat{I}_{ST}^* = \hat{I}_{ST} R_{ST} \hat{I}_{ST}^* = R_{ST} I_{ST}^2 = 721 + j0,0 \text{ VA} \\ \hat{S}_{TR} &= \hat{U}_{TR} \hat{I}_{TR}^* = \hat{I}_{TR} R_{TR} \hat{I}_{TR}^* = R_{TR} I_{TR}^2 = 481 + j0,0 \text{ VA}\end{aligned}\quad (12.40)$$

Komplexní výkony mají jen reálnou složku, jak se dalo očekávat pro čistě odporovou zátěž. Činné výkony jsou tedy

$$\begin{aligned}P_{RS} &= \text{Re}(\hat{S}_{RS}) = 1058 \text{ W} \\ P_{ST} &= \text{Re}(\hat{S}_{ST}) = 721 \text{ W} \\ P_{TR} &= \text{Re}(\hat{S}_{TR}) = 481 \text{ W}\end{aligned}\quad (12.41)$$

¹²Fázovou konstantu napětí označujeme symbolem φ , pro fázovou konstantu proudu používáme symbol ψ . Obě doplňujeme vhodným indexem.



Obrázek 12.10: Fázorový diagram nesouměrného trojúhelníku

Jalové výkony jsou nulové.

Celkový činný výkon je pak roven součtu výkonů v jednotlivých fázích

$$P = P_{RS} + P_{ST} + P_{TR} = 2260 \text{ W} \quad (12.42)$$

Celkový jalový výkon je nulový, $Q = 0$. Poněvadž v zapojeních do hvězdy i trojúhelníku jsou stejné zátěže, můžeme porovnat vypočítané celkové činné výkony. Ukazuje se, že výkon vzapojení do trojúhelníku (12.42) je přibližně třikrát vyšší než výkon v zapojení do hvězdy s nulovým vodičem (12.25), jak lze dokázat z obecných vztahů.

Tento způsob výpočtu výkonu předpokládá znalost impedancí v trojúhelníku. Z něho se určují fázové proudy. Praktický způsob výpočtu celkového výkonu používá síťových proudů a vychází ze vztahu

$$\hat{S} = \hat{U}_{RS} \hat{I}_R^* - \hat{U}_{ST} \hat{I}_T^* = 2260 + j0,0 \text{ VA} \quad (12.43)$$

Dostáváme stejný výsledek. Obdobně jako u zapojení do hvězdy použitý způsob výpočtu výkonů vychází z dohody pro definici celkového zdánlivého výkonu podle vztahu

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

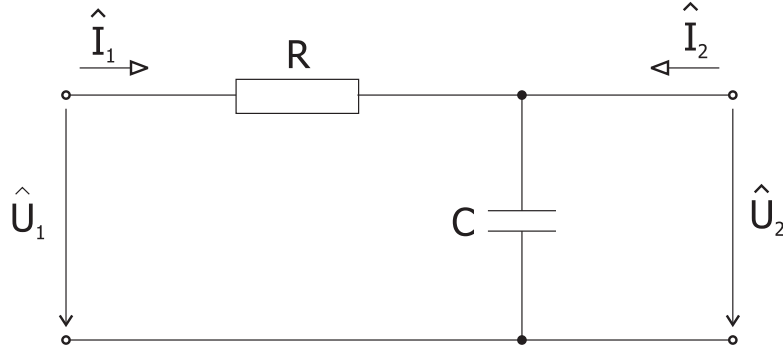
13 Dvoubrany

Cvičení má za cíl seznámit studenty se základními výpočty v oblasti analýzy dvoubranů. Pro nejjednodušší přenosový článek typu L se počítá impedanční matice a pak kaskádní matice. Ta se jednak odvozuje přímo ze struktury dvoubranu, jednak se počítá z impedanční matice jako ověření správnosti odvození. Preferována je spíše aplikační část, odvození přenosu tohoto dvoubranu a jeho grafické znázornění. Je vysvětlen význam a způsoby vytváření logaritmické stupnice na ose frekvencí. Graficky jsou znázorněny jak amplitudová, tak fázová charakteristika, amplitudová charakteristika je pro lineární

i logaritmickou stupnicí (dB). Charakteristiky jsou aproximovány pro nízké a vysoké frekvence a je z nich odvozena 3 dB šířka pásma.

Příklad 13.1:

Článek typu L, viz obr. 13.1, obsahuje odpor R v podélné větvi a kondenzátor C v příčné větvi. Určete jeho impedanční matici.



Obrázek 13.1: Článek typu L, běžná (zdrojová) orientace proudů

Řešení:

Pro impedanční matici platí obecné vztahy

$$\begin{aligned}\hat{U}_1 &= \hat{Z}_{11}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{12}\hat{I}_2 \\ \hat{U}_2 &= \hat{Z}_{21}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{22}\hat{I}_2\end{aligned}\quad (13.1)$$

Příčnou větví zadaného dvoubranu, tj. kondenzátorem C , teče proud $\hat{I}_1 + \hat{I}_2$. Podle druhého Kirchhoffova zákona můžeme pro zadaný dvoubran napsat rovnice

$$\begin{aligned}\hat{U}_1 &= R\hat{I}_1 + \frac{1}{j\omega C}(\hat{I}_1 + \hat{I}_2) \\ \hat{U}_2 &= \frac{1}{j\omega C}(\hat{I}_1 + \hat{I}_2)\end{aligned}\quad (13.2)$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme výsledek

$$\begin{aligned}\hat{U}_1 &= \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\hat{I}_1 + \frac{1}{j\omega C}\hat{I}_2 \\ \hat{U}_2 &= \frac{1}{j\omega C}\hat{I}_1 + \frac{1}{j\omega C}\hat{I}_2\end{aligned}\quad (13.3)$$

Pro prvky impedanční matice tedy platí

$$\begin{aligned}\hat{Z}_{11} &= R + \frac{1}{j\omega C} & \hat{Z}_{12} &= \frac{1}{j\omega C} \\ \hat{Z}_{21} &= \frac{1}{j\omega C} & \hat{Z}_{22} &= \frac{1}{j\omega C}\end{aligned}\quad (13.4)$$

Dvoubran je neautonomní, reciprokový, musí tedy být $\hat{Z}_{21} = \hat{Z}_{12}$. Rovnice (13.4) to potvrzují.

Podle fyzikálního významu je prvek \hat{Z}_{11} impedanční matice vstupní impedancí při výstupu naprázdno. Pokud výstupem neprotéká proud, chová se dvoubran z hlediska vstupu jako sériová kombinace odporu a kondenzátoru, vstupní impedance je tedy

$$\hat{Z}_{vst} = R + \frac{1}{j\omega C}\quad (13.5)$$

Z porovnání rovnic (13.4) a (13.5) plyne $\hat{Z}_{vst} = \hat{Z}_{11}$. To potvrzuje správnost výpočtu impedanční matice. Prvek \hat{Z}_{22} impedanční matice je výstupní impedancí při vstupu naprázdno. Pokud vstupem neprotéká proud, chová se dvoubran z hlediska výstupu jako kapacita v příčné větvi, výstupní impedance je tedy

$$\hat{Z}_{vys} = \frac{1}{j\omega C} \quad (13.6)$$

Z porovnání rovnic (13.4) a (13.6) plyne $\hat{Z}_{vys} = \hat{Z}_{22}$. To opět potvrzuje správnost výpočtu impedanční matice.

Příklad 13.2:

Z impedanční matice odvodte přímou kaskádní matici.

Řešení:

Impedanční matice je dána vztahy (13.1), které zde zopakujeme.

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \hat{Z}_{11}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{12}\hat{I}_2 \\ \hat{U}_2 &= \hat{Z}_{21}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{22}\hat{I}_2 \end{aligned} \quad (13.7)$$

Pro přímou kaskádní matici¹³ se používají rovnice

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \hat{A}_{11}\hat{U}_2 - \hat{A}_{12}\hat{I}_2 \\ \hat{I}_1 &= \hat{A}_{21}\hat{U}_2 - \hat{A}_{22}\hat{I}_2 \end{aligned} \quad (13.8)$$

Znaménko mínus v kaskádních rovnicích (13.8) plyne z obráceného směru proudu na výstupu pro tento popis, viz obr. 13.2.

Máme-li odvodit kaskádní matici z impedanční matice, musíme v impedančních rovnicích (13.1) vyjádřit vstupní parametry \hat{U}_1, \hat{I}_1 pomocí výstupních \hat{U}_2, \hat{I}_2 . Z druhé rovnice v (13.7) vypočteme proud \hat{I}_1

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{\hat{Z}_{21}}\hat{U}_2 - \frac{\hat{Z}_{22}}{\hat{Z}_{21}}\hat{I}_2 \quad (13.9)$$

Tím jsme získali druhou z přímých kaskádních rovnic (13.8). Z rovnice (13.9) dosadíme do první z impedančních rovnic (13.7)

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \hat{Z}_{11} \left(\frac{1}{\hat{Z}_{21}}\hat{U}_2 - \frac{\hat{Z}_{22}}{\hat{Z}_{21}}\hat{I}_2 \right) + \hat{Z}_{12}\hat{I}_2 = \\ &= \frac{\hat{Z}_{11}}{\hat{Z}_{21}}\hat{U}_2 - \frac{\hat{Z}_{11}\hat{Z}_{22}}{\hat{Z}_{21}}\hat{I}_2 + \hat{Z}_{12}\hat{I}_2 = \frac{\hat{Z}_{11}}{\hat{Z}_{21}}\hat{U}_2 - \frac{|\hat{Z}|}{\hat{Z}_{21}}\hat{I}_2 \end{aligned} \quad (13.10)$$

Tím získáme první z přímých kaskádních rovnic (13.8). Symbolem $|\hat{Z}|$ je označen determinant impedanční matice

$$|\hat{Z}| = \hat{Z}_{11}\hat{Z}_{22} - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21} \quad (13.11)$$

Obě rovnice (13.9) a (13.10) můžeme spojit

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \frac{\hat{Z}_{11}}{\hat{Z}_{21}}\hat{U}_2 - \frac{|\hat{Z}|}{\hat{Z}_{21}}\hat{I}_2 \\ \hat{I}_1 &= \frac{1}{\hat{Z}_{21}}\hat{U}_2 - \frac{\hat{Z}_{22}}{\hat{Z}_{21}}\hat{I}_2 \end{aligned} \quad (13.12)$$

¹³Přímá kaskádní matice počítá vstupní veličiny dvoubranu pomocí výstupních. Je vhodná pro energetiku, kde bývá zadán výstupní výkon. Zpětná kaskádní matice zjišťuje výstupní odezvu na vstupní podnět, tedy určuje výstupní veličiny na základě znalostí veličin vstupních. Používá se např. pro přenos signálu.

Porovnáním (13.8) a (13.12) dostaneme převodní vztahy

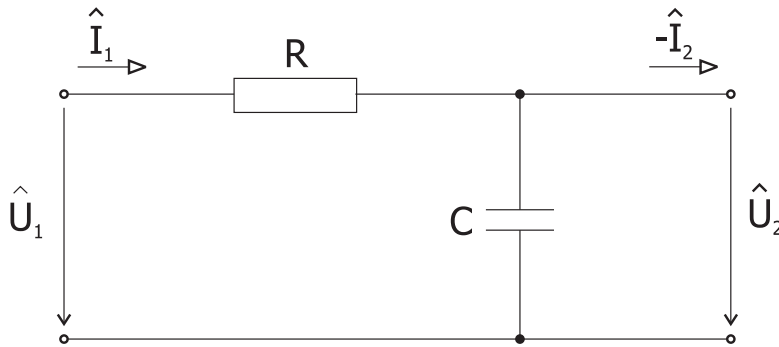
$$\begin{aligned} \hat{A}_{11} &= \frac{\hat{Z}_{11}}{\hat{Z}_{21}} & \hat{A}_{12} &= \frac{|\hat{Z}|}{\hat{Z}_{21}} \\ \hat{A}_{21} &= \frac{1}{\hat{Z}_{21}} & \hat{A}_{22} &= \frac{\hat{Z}_{22}}{\hat{Z}_{21}} \end{aligned} \quad (13.13)$$

Příklad 13.3:

Článek typu L obsahuje odpor R v podélné větvi a kondenzátor C v příčné větvi, viz obr. 13.2. Určete jeho přímou kaskádní matici.

Řešení:

Pro práci s kaskádní maticí se obvykle používá zdrojově spotřebičové orientace proudů podle obr. 13.2. Důvod je ten, že pomocí kaskádní matice se obvykle počítá přenos výkonu.



Obrázek 13.2: Článek typu L, spotřebičová orientace proudů

Při řešení můžeme postupovat dvěma způsoby:

1. Prvky kaskádní matice určit ze schématu.
2. Využít výsledků obou předchozích příkladů.

Ze schématu určíme prvky přímé kaskádní matice na základě definice. Přitom vycházíme z přímých kaskádních rovnic (13.8)

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \hat{A}_{11}\hat{U}_2 - \hat{A}_{12}\hat{I}_2 \\ \hat{I}_1 &= \hat{A}_{21}\hat{U}_2 - \hat{A}_{22}\hat{I}_2 \end{aligned} \quad (13.14)$$

Znaménko mínus souvisí se zvoleným směrem výstupního proudu, proud $-\hat{I}_2$ teče z dvoubřanu do zátěže, viz. obr. 13.2.

Prvek \hat{A}_{11} je poměr vstupního a výstupního napětí při výstupu naprázdno, tj. $\hat{I}_2 = 0$. Oběma prvky, kondenzátorem i odporem, tedy teče tentýž proud \hat{I}_1 . Vstupní a výstupní napětí jsou pak po řadě

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) \hat{I}_1 \\ \hat{U}_2 &= \frac{1}{j\omega C} \hat{I}_1 \end{aligned} \quad (13.15)$$

Pro jejich poměr pak platí

$$\hat{A}_{11} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} = \frac{R + \frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}} = 1 + j\omega RC \quad (13.16)$$

Jednodušší postup je možná tento. Neteče-li na výstupu obvodu proud, jedná se o nezatížený dělič, pro poměr výstupního a vstupního napětí platí

$$\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (13.17)$$

$\hat{Z}_1 = R$ a $\hat{Z}_2 = 1/j\omega C$ v předchozím vztahu jsou impedance prvků děliče napětí. Prvek \hat{A}_{11} přímé kaskádní matice je převrácenou hodnotou přenosu napětí naprázdno, tj.

$$\hat{A}_{11} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} = \frac{1}{\frac{1}{1+j\omega RC}} = 1 + j\omega RC \quad (13.18)$$

Podle (13.14) je prvek \hat{A}_{12} poměr vstupního napětí a výstupního proudu při výstupu nakrátko, tj. $\hat{U}_2 = 0$. Zkratujeme-li výstup, vyřadíme kondenzátor a obvod se redukuje na odpor R napájený napětím \hat{U}_1 . Obvodem teče proud $\hat{I}_1 = -\hat{I}_2$, poněvadž $-\hat{I}_2$ je výstupní proud tekoucí ven z dvoubranu. Podle Ohmova zákona

$$\hat{U}_1 = -R\hat{I}_2 \quad (13.19)$$

Pro \hat{A}_{12} plyne z (13.8) pro $\hat{U}_2 = 0$ a (13.19)

$$\hat{A}_{12} = -\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_2} = R \quad (13.20)$$

Podle (13.14) je prvek \hat{A}_{21} definován jako poměr vstupního proudu a výstupního napětí při výstupu naprázdno, tj. $\hat{I}_2 = 0$. Není-li nic připojeno na výstup, prochází vstupní proud \hat{I}_1 oběma prvky, tj. odporem R a kondenzátorem C . Na kondenzátoru přitom vytváří výstupní napětí \hat{U}_2 . Platí tedy

$$\hat{U}_2 = \frac{1}{j\omega C}\hat{I}_1 \quad (13.21)$$

Pro \hat{A}_{21} plyne z (13.8) pro $\hat{I}_2 = 0$ a (13.21)

$$\hat{A}_{21} = \frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_2} = j\omega C \quad (13.22)$$

Podle (13.14) je prvek \hat{A}_{22} poměr vstupního a výstupního proudu při výstupu nakrátko, tj. $\hat{U}_2 = 0$. Při zkratovaném výstupu neteče kondenzátorem žádný proud, vstupní proud je až na znaménko roven výstupnímu, tj. $\hat{I}_1 = -\hat{I}_2$. Pak platí

$$\hat{A}_{22} = -\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2} = 1 \quad (13.23)$$

Pro prvky kaskádní matice jsme přímým odvozením získali vztahy

$$\begin{aligned} \hat{A}_{11} &= 1 + j\omega RC & \hat{A}_{12} &= R \\ \hat{A}_{21} &= j\omega C & \hat{A}_{22} &= 1 \end{aligned} \quad (13.24)$$

Poněvadž je obvod reciproký, musí být determinant kaskádní matice roven jedné. Z odvozených výrazů zjistíme, že tomu tak skutečně je.

$$|\hat{A}| = 1 + j\omega RC - Rj\omega C = 1 \quad (13.25)$$

Při druhém přístupu vyjdeme z impedanční matice (13.4), kterou zde zopakujeme

$$\begin{aligned}\hat{Z}_{11} &= R + \frac{1}{j\omega C} & \hat{Z}_{12} &= \frac{1}{j\omega C} \\ \hat{Z}_{21} &= \frac{1}{j\omega C} & \hat{Z}_{22} &= \frac{1}{j\omega C}\end{aligned}\quad (13.26)$$

Dále použijeme převodních vztahů (13.13), které umožní přejít od impedanční matice ke kaskádní

$$\begin{aligned}\hat{A}_{11} &= \frac{\hat{Z}_{11}}{\hat{Z}_{21}} & \hat{A}_{12} &= \frac{|\hat{Z}|}{\hat{Z}_{21}} \\ \hat{A}_{21} &= \frac{1}{\hat{Z}_{21}} & \hat{A}_{22} &= \frac{\hat{Z}_{22}}{\hat{Z}_{21}}\end{aligned}\quad (13.27)$$

Po dosazení z (13.26) do (13.27) postupně získáme

$$\begin{aligned}\hat{A}_{11} &= \frac{\hat{Z}_{11}}{\hat{Z}_{21}} = \frac{R + \frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}} = 1 + j\omega RC \\ \hat{A}_{12} &= \frac{|\hat{Z}|}{\hat{Z}_{21}} = \frac{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \frac{1}{j\omega C} - \frac{1}{j\omega C} \frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}} = R \\ \hat{A}_{21} &= \frac{1}{\hat{Z}_{21}} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}} = j\omega C \\ \hat{A}_{22} &= \frac{\hat{Z}_{22}}{\hat{Z}_{21}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}} = 1\end{aligned}\quad (13.28)$$

Porovnáním posledních výrazů v těchto vztazích se vztahy (13.24) vidíme, že se shodují. Rovnice (13.24) tedy byly obvodovými úvahami odvozeny správně.

Příklad 13.4:

Dvoubran typu L obsahuje odpor $R = 1,5 \text{ k}\Omega$ v podélné větvi a kondenzátor $C = 6,8 \text{ nF}$ v příčné větvi, viz. obr. 13.1. Určete jeho přenos při výstupu naprázdno, načrtněte jeho přenosovou charakteristiku, vhodně ji aproximujte a určete její významné parametry.

Řešení:

Řešení obsahuje tyto části: odvození vztahu pro přenosovou frekvenční charakteristiku, určení jejích složek, optimální grafické zobrazení, aproximace charakteristiky a zjištění typických parametrů.

Přenosová funkce

Přenos naprázdno můžeme určit buď přímým výpočtem, jak jsme to naznačili v předchozím příkladu, nebo s pomocí prvku \hat{A}_{11} přímé kaskádní matice (13.24). Při výpočtu podle druhého způsobu použijeme vztahu

$$\hat{H}(j\omega) = \frac{\hat{U}_2(j\omega)}{\hat{U}_1(j\omega)} = \frac{1}{\hat{A}_{11}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}\quad (13.29)$$

Argument $j\omega$ u symbolu přenosové a dalších funkcí se velmi často používá, aby se zdůraznilo, že přenos je funkcí tohoto argumentu. Pak je označení komplexní funkce pomocí stříšky nadbytečné.

Abychom získali lepší či přehlednější informace o přenosu, rozdělíme komplexní přenosovou funkci na amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku. Nejjednodušeji to uděláme tak, že převedeme jmenovatele přenosové funkce (13.29) do exponenciálního tvaru

$$1 + j\omega RC = \sqrt{1 + (\omega RC)^2} e^{j\varphi_1} \quad (13.30)$$

kde

$$\varphi_1 = \arctg(\omega RC) \quad (13.31)$$

je fáze jmenovatele. Pomocí posledních dvou vztahů dostaneme pro přenos v exponenciálním tvaru výraz

$$\hat{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{-j\varphi_1} = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (13.32)$$

kde

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad \varphi(\omega) = -\arctg(\omega RC) \quad (13.33)$$

jsou po řadě amplitudová a fázová frekvenční charakteristika.

Pokud se zajímáme jen o amplitudovou frekvenční charakteristiku, plyne z (13.29) přímo

$$H(\omega) = \frac{|\hat{U}_2|}{|\hat{U}_1|} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (13.34)$$

Toto je její tvar v lineární stupnici na svislé ose, tj. pro bezrozměrný přenos ve tvaru desetinného čísla. Pracovně jej nazveme lineární přenos. Obvykle se dává přednost logaritmické stupnici, která umožní lepší představu. Pak se přenos vyjadřuje v dB. Pracovní název budiž logaritmický přenos. Pro logaritmickou stupnici přenosu dostaneme

$$b = 20 \log_{10} \frac{U_2}{U_1} = -10 \log_{10}(1 + (\omega RC)^2) \quad (13.35)$$

Pro úplnost uvedeme ještě explicitně vztah pro fázovou frekvenční charakteristiku z rovnice (13.33)

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega RC) \quad (13.36)$$

Grafický průběh přenosové funkce

Na vodorovné frekvenční ose musíme použít logaritmické stupnice, poněvadž přenos je nutno sledovat v rozsahu několika řádů, abychom získali základní představu o charakteru obvodu. Lze použít tyto typy

1. Nejjednodušší frekvenční logaritmická stupnice

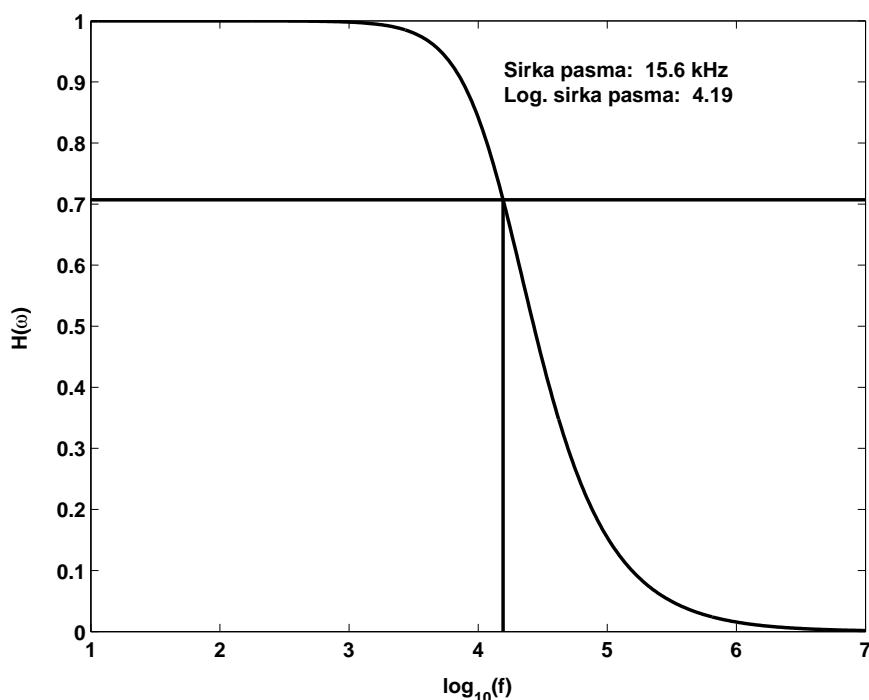
- (a) Používá pouze řádové frekvence, např. 1, 10, 100, Hz, 1, 10, ... kHz.
- (b) Na stupnici jsou rovnoměrně rozložené body 0, 1, 2, 3, 4, ...
- (c) K nim se připisují frekvence, např. 0,001 - 0,01 - 0,1 - 1 - 10 - ... kHz.

2. Jemnější a v praxi často postačující stupnice

- (a) Používá dvě frekvence na řád, např. frekvence 1, 3, 10, 30, 100, 300, ... Hz.
- (b) Logaritmická stupnice pak obsahuje prakticky rovnoměrně rozložené body 0 - 0,5 - 1 - 1,5 - 2 - 2,5 - ... Přesněji se jedná o polohy bodů 0 - 0,48 - 1 - 1,48 - 2 - 2,48 ... Nerovnoměrnost se však prakticky neprojeví.

- (c) K těmto bodům se připisují frekvence, např. 1 - 3 - 10 - 30 - 100 - 300 - ... Hz.
3. Další jemnější stupnicí může být stupnice se čtyřmi body na řád s těmito vlastnostmi
- Používá čtyři frekvence na řád, např. frekvence 1, 2, 3, 5, 10, 20, ... kHz
 - Logaritmické hodnoty přibližně 3 - 3,3 - 3,5 - 3,7 - 4 - 4,3 - ... však již nejsou rovnoměrně rozložené, nicméně v praxi zpravidla postačuje použít rovnoměrné stupnice.
4. Další jemnější stupnice je nutno připravit početně, podle postupu uvedeného výše.

Názorně lze průběhy amplitudy i fáze přenosu znázornit graficky. Je však nutno volit metodou pokusů a omylů optimální pásmo frekvencí. Průběh amplitudové frekvenční charakteristiky vypočtené pro zadané hodnoty prvků ze vztahu (13.34) je na obr. 13.3¹⁴. Je použito lineární stupnice pro přenos. Při nízkých frekvencích je přenos blízký jedné, téměř veškeré vstupní napětí je na výstupu. Při vysokých frekvencích se amplituda přenosu blíží nule, na výstup se nepřenáší téměř žádné napětí. Jedná se tedy o přibližnou realizaci filtru typu dolnofrekvenční propust, nebo vysokofrekvenční zadrž.

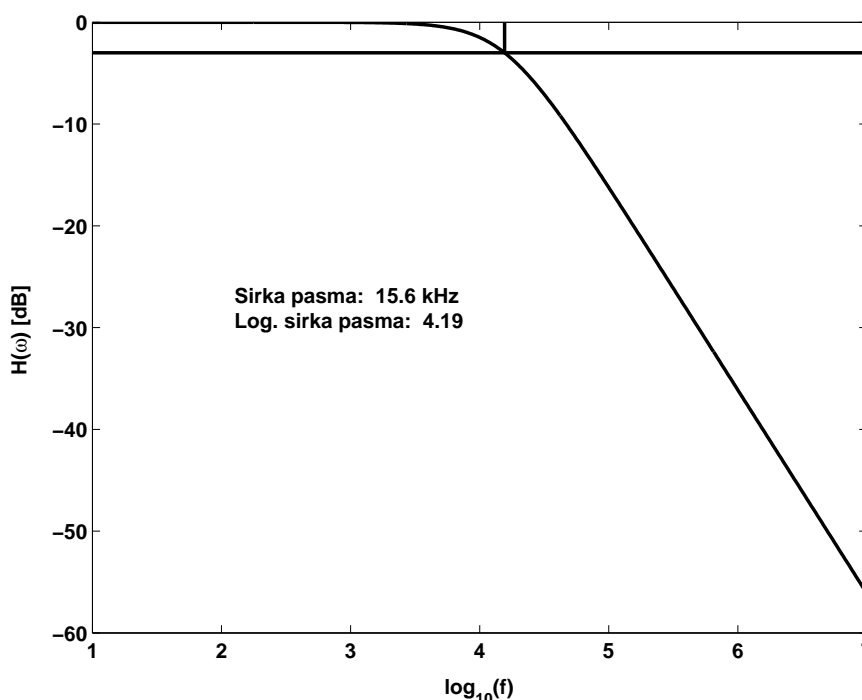


Obrázek 13.3: Amplitudová frekvenční charakteristika článku typu L, lineární stupnice pro přenos.

Více informací o průběhu amplitudy přenosu v oblasti vyšších frekvencí dává amplitudová frekvenční charakteristika s logaritmickým přenosem vypočítaná podle (13.35) pro zadané hodnoty prvků, která je na obr. 13.4. Jednotkou na ose pro přenos je dB. V oblasti vysokých frekvencí je pokles logaritmu přenosu lineární.

Fázová frekvenční charakteristika vypočtená pro zadané hodnoty prvků z (13.36) je na obr. 13.5. Záporné hodnoty fázového posuvu znamenají, že výstupní napětí se zpožďuje za vstupním. Z průběhu fázové charakteristiky je zřejmé, že pro nízké frekvence je fázový posuv blízký nule, výstupní napětí je téměř ve fázi se vstupním. Pro vysoké

¹⁴Grafické konstrukce si zatím na tomto a dalších obrázcích nebudeme všimnout.



Obrázek 13.4: Amplitudová frekvenční charakteristika článku typu L, logaritmická stupnice pro přenos.

frekvence se fázový posuv blíží 90° , výstupní napětí se zpožďuje téměř o 90° za vstupním, obě napětí jsou prakticky v kvadratuře.

Aproximace přenosové funkce

Přenosová funkce se obvykle v určitém rozsahu frekvencí aproximuje. Pro sledovaný obvod pro nízké frekvence platí

$$\omega RC \ll 1 \rightarrow \sqrt{1 + (\omega RC)^2} \doteq 1 \rightarrow A = 1 \rightarrow b = 0 \text{ dB} \quad (13.37)$$

Amplitudová charakteristika je přibližně konstantní a rovna 1 v lineární stupnici resp. 0 dB ve stupnici logaritmické. Na výstup se přenesou téměř celé vstupní napětí. To potvrzují oba průběhy amplitudové frekvenční charakteristiky na obr. 13.3 i obr. 13.4.

Pro vysoké frekvence platí pro přenos v lineární stupnici

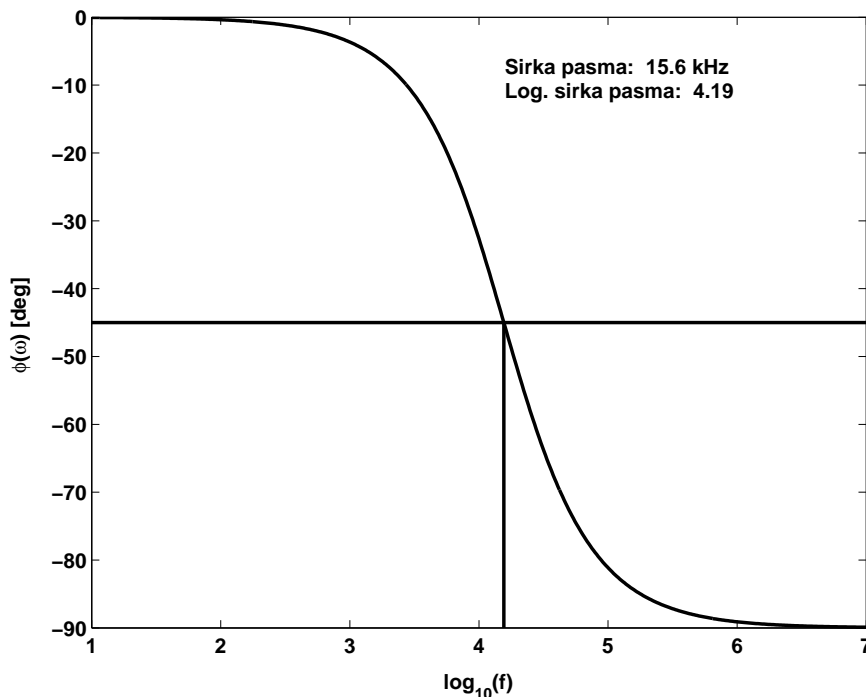
$$\omega RC \gg 1 \rightarrow \sqrt{1 + (\omega RC)^2} \doteq \omega RC \rightarrow A = \frac{1}{\omega RC} \quad (13.38)$$

Amplitudová charakteristika klesá. Na výstup se s rostoucí frekvencí přenáší stále nižší napětí. Na amplitudové frekvenční charakteristice na obr. 13.3 však nejsou vidět detaily průběhu přenosu v této frekvenční oblasti.

V logaritmické stupnici platí pro vysoké frekvence

$$\begin{aligned} \omega RC \gg 1 &\rightarrow 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \doteq \\ &\doteq 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2}} = -20 \log_{10}(\omega RC) = -20 \log_{10}(RC) - 20 \log_{10}(\omega) \end{aligned} \quad (13.39)$$

První člen výsledku je konstanta. Druhý člen říká, že pro vysoké frekvence amplitudová charakteristika klesá jako dvacetinásobek dekadického logaritmu frekvence. Poněvadž na frekvenční ose je rovněž logaritmická stupnice frekvence, je pokles v logaritmické



Obrázek 13.5: Fázová frekvenční charakteristika článku typu L

stupnici lineární a činí 20 dB na dekádu. Dekádou se rozumí jeden řád frekvence, např. od 50 do 500 Hz. Amplitudová frekvenční charakteristika s logaritmickým přenosem na obr. 13.4 obsahuje lineární pokles v oblasti vysokých frekvencí.

Někdy se mluví též o poklesu na oktávu. Oktávou se rozumí úsek od dané frekvence do jejího dvojnásobku, např. od 80 do 160 Hz. Na dekádu připadá n -oktáv podle vztahu

$$2^n = 10 \quad \rightarrow \quad n \log_{10}(2) = \log_{10}(10) = 1 \quad \rightarrow \quad n = \frac{1}{\log_{10}(2)} = 3,32 \quad (13.40)$$

Na oktávu tedy pro sledovaný obvod připadá pokles $20/3,32 = 6$ dB.

Pro úplnost je nutno též aproximovat fázovou charakteristiku. Pro nízké frekvence platí

$$\omega RC \ll 1 \quad \rightarrow \quad \varphi(\omega) = -\arctg(\omega RC) \doteq -\omega RC \quad (13.41)$$

Znaménko mínus znamená, že výstupní napětí se zpožďuje za vstupním. Pro nízké frekvence je tedy fázová charakteristika úměrná frekvenci, graficky ovšem dostaneme přímku jen pro lineární stupnici frekvencí, která se nepoužívá, nebo je nutno logaritmovat hodnoty fáze přenosu. Poněvadž jsou záporné, je nutno brát dekadický logaritmus absolutní hodnoty fáze, jak je tomu na obr. 13.6. Lineární závislost fázového posuvu na frekvenci zajišťuje nezkraslený přenos signálu, jak se dokazuje v teorii filtrů.

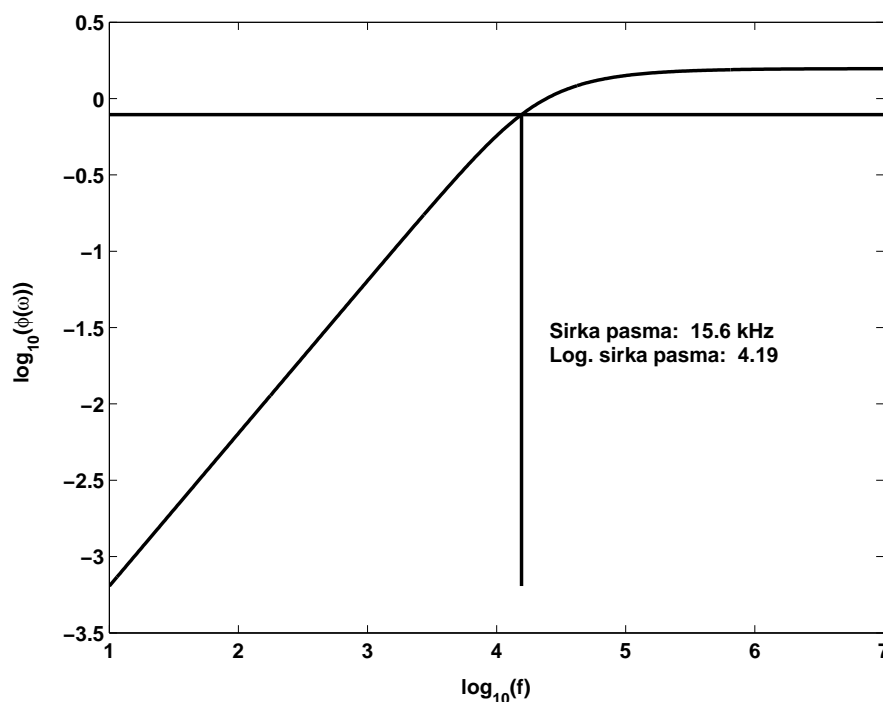
Pro vysoké frekvence platí

$$\omega RC \gg 1 \quad \rightarrow \quad \varphi(\omega) = -\arctg(\omega RC) \doteq -\frac{\pi}{2} \quad (13.42)$$

Výstupní napětí je v kvadratuře vzhledem ke vstupnímu. Na fázové frekvenční charakteristice na obr. 13.5 se to projeví konstantní hodnotou fázového posuvu při vysokých frekvencích.

Hlavní parametry přenosové funkce

Z obrázků 13.3 a 13.4 je zřejmé, že obvod dobře přenáší napětí o nízkých frekvencích,



Obrázek 13.6: Fázová frekvenční charakteristika článku typu L

špatně napětí o vysokých frekvencích. Jedná se o dolnofrekvenční propust. Přesně ji popíšeme přenosovou charakteristikou, tj. amplitudovou a fázovou charakteristikou, jak již bylo provedeno výše. Pro přehledný popis se používá šířka propustného pásma B , která je učena hraniční frekvencí ω_h , při níž přenos (amplitudová charakteristika) poklesne na 0,707 či o 3 dB. Poněvadž

$$H(\omega_h) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_h RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 \quad (13.43)$$

pro hraniční frekvenci musí platit

$$\omega_h RC = 1 \quad \rightarrow \quad \omega_h = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau} \quad (13.44)$$

kde $\tau = RC$ je časová konstanta. Po dosazení numerických hodnot a malé úpravě vztahu (13.44) vyjde, že hraniční frekvence propustného pásma je

$$f_h = \frac{1}{2\pi\tau} = 16 \text{ kHz} \quad (13.45)$$

Graficky je způsob určení hraniční frekvence propustného pásma znázorněn na obr. 13.3. Hledá se hodnota frekvence příslušející přenosu 0,707. Po přepočtení z dekadických logaritmů vyjde zhruba tatáž hodnota.

Položíme-li podmínku (13.44) do vztahu (13.35), dostaneme

$$b = -10 \log_{10}(1 + (\omega_h RC)^2) = -10 \log_{10}(1 + 1) \doteq -10 \cdot (0,3) = -3 \quad (13.46)$$

Na hraniční frekvenci propustného pásma poklesne amplituda přenosu o 3 dB. Toho se využívá pro praktické grafické určení propustného pásma, které je provedeno na obr. 13.4. Vyjde zhruba tatáž hodnota frekvence. Všeobecně je hodnota hraniční frekvence určena z grafu s nižší přesností, pro praktické využití to však stačí.

Ze vztahu (13.36) a z fázové charakteristiky na obr. 13.5 je zřejmé, že při hraniční frekvenci je fázový posuv obou napětí právě 45° .

Dále můžeme z obrázků 13.3 a 13.4 zjistit, že aproximace amplitudové charakteristiky konstantou platí dobře v pásmu $(0; 0, 1f_h)$ a pokles o 20 dB na dekádu je splněn v pásmu $(10f_h; \infty)$. Stejně tak z obrázku 13.5 plyne, že lineární aproximace fázové charakteristiky je splněna minimálně v pásmu $(0; 0, 1f_h)$ a napětí jsou v kvadratuře v pásmu $(10f_h; \infty)$.

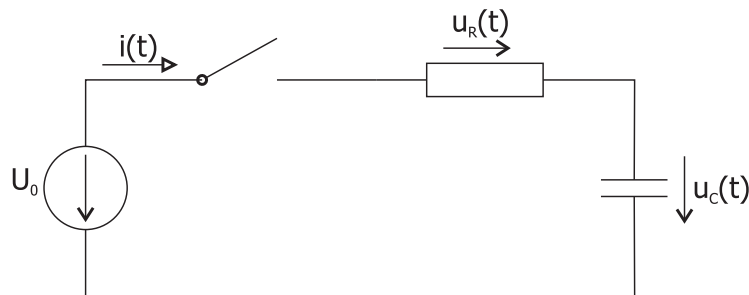
Na závěr ještě porovnáme idealizovanou a reálnou dolnofrekvenční propust. Idealizovaná dolnofrekvenční propust má plně přenášet napětí od nulové do hraniční frekvence, pro ostatní frekvence je vůbec přenášet nemá. Studovaný členek RC plní tuto funkci jen částečně.

14 Přechodový jev – analytické a grafické řešení

Přechodné jevy jsou řešeny jednak analyticky, jednak graficky. Při analytickém řešení se získávají časové průběhy. Grafické řešení vychází z experimentálního časového průběhu, z něho určuje relaxační dobu a dále parametry obvodu. Relaxační doba se zjišťuje třemi metodami: metodou tečny, metodou vycházející z definice relaxační doby a logaritmováním časového průběhu. Tyto metody se porovnávají z hlediska přesnosti. Metoda logaritmování časové funkce nepatří mezi standardně popisované metody.

Příklad 14.1:

Nenabitý kondenzátor o kapacitě C a odpor o velikosti R jsou spojeni do série a připojeni ke zdroji napětí U_0 v čase $t = 0$, viz. obr. 14.1 Určete průběh proudu tekoucího obvodem, napětí na odporu a kondenzátoru.



Obrázek 14.1: Přechodový jev v obvodu RC

Řešení

Okamžitou hodnotu proudu v čase t označme $i = i(t)$ a pro napětí použijme symbol $u = u(t)$. Pro okamžité napětí u_R na odporu R a u_C na kondenzátoru C platí vztahy

$$u_R = Ri \quad u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt + u_0 \quad (14.1)$$

Podle druhého Kirchhoffova zákona platí pro okamžitá napětí

$$U_0 = u_R + u_C = Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt + u_0 \quad (14.2)$$

Počáteční podmínku v čase $t = 0$ určíme touto úvahou. Dle zadání je v čase $t = 0$ kondenzátor nenabitý, v okamžiku připojení zdroje je tedy napětí na něm nulové, $u_C =$

$u_0 = 0$ pro $t = 0$. Na odporu R je tudíž podle (14.2) napětí rovné napětí zdroje $u_R = U_0$ pro $t = 0$ a teče jím počáteční proud

$$i(0) = i(0+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} i(t) = \frac{u_R}{R} = \frac{U_0}{R} \quad (14.3)$$

Toto není jediná možná počáteční podmínka. Jiná počáteční podmínka je již zmíněné nulové počáteční napětí na kondenzátoru, tj. $u_C = 0$ pro $t = 0$. Počáteční podmínka (14.3) však umožní nejsnadnější matematické řešení.

K určení proudu je nutno řešit diferenciální rovnici (14.2). Abychom z ní získali běžnou diferenciální rovnici, zderivujeme ji podle času:

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad (14.4)$$

Derivací jsme ztratili informaci o napětí zdroje U_0 . Tato informace se však uchová v počáteční podmínce (14.3), můžeme tedy pokračovat.

Diferenciální rovnici budeme řešit metodou separace proměnných. Nejprve celou rovnici (14.4) dělíme R . Dostaneme

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0 \quad (14.5)$$

kde

$$\tau = RC \quad (14.6)$$

je relaxační doba nebo též časová konstanta.

Nyní tuto rovnici vynásobíme dt a dělíme i . To vede k rovnici

$$\frac{di}{i} = -\frac{dt}{\tau} \quad (14.7)$$

Levá strana je pouze funkcí i , pravá pouze funkcí t . Můžeme tedy obě strany integrovat. Výsledkem je rovnice

$$\ln i = -\frac{t}{\tau} + \ln A \quad (14.8)$$

kde symbolem $\ln A$ jsme označili integrační konstantu. Nyní obě strany rovnice dosadíme do exponenciální funkce

$$i = e^{\ln i} = e^{(-\frac{t}{\tau} + \ln A)} = e^{-\frac{t}{\tau}} e^{\ln A} = A e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (14.9)$$

Neznámou konstantu A ve výsledném vztahu (14.9) získáme z počáteční podmínky (14.3). Po dosazení $t = 0$ do (14.9) dostaneme počáteční proud, který musí vyhovovat podmínce (14.3). Tedy

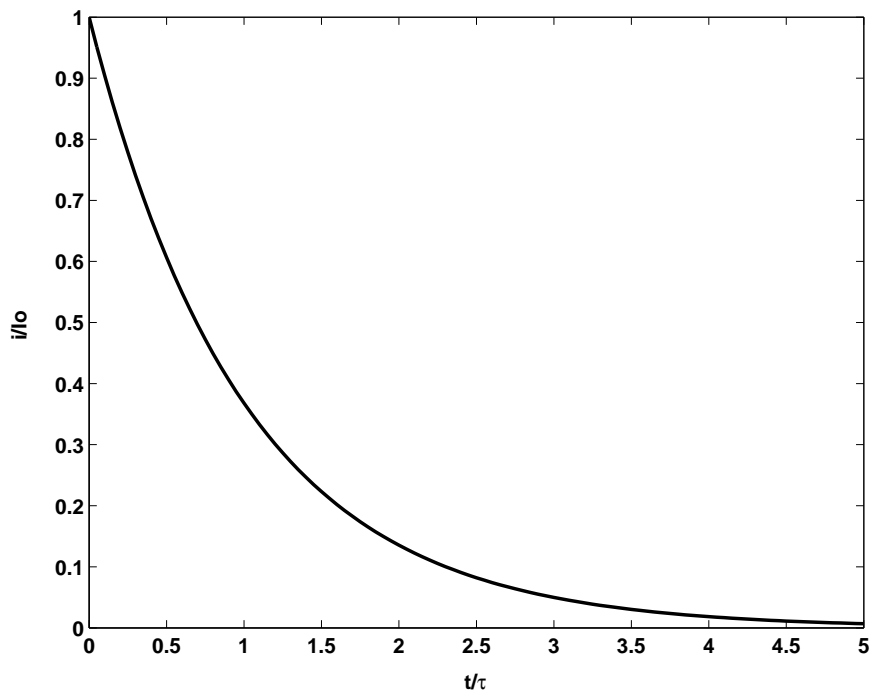
$$i(0) = \left[A e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_{t=0} = A = \frac{U_0}{R} \quad (14.10)$$

Úplné řešení dostaneme po dosazení z (14.10) do (14.9)

$$i = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (14.11)$$

Proud tedy postupně klesá od počáteční hodnoty $i(0) = \frac{U_0}{R}$ a blíží se nulové hodnotě po uplynutí dlouhé doby, prakticky alespoň pětinašobku relaxační doby, teoreticky $\lim_{t \rightarrow \infty} i = 0$. Graficky je průběh proudu pro obě normalizované osy¹⁵ znázorněn na obr. 14.2. Proud poměrně rychle klesá.

¹⁵Na svislé ose je poměr okamžitého a maximálního proudu, na vodorovné poměr času a časové konstanty či relaxační doby. Na dalších grafech je na ose souřadnic normalizováno napětí a výkon.



Obrázek 14.2: Průběh normalizovaného proudu při nabíjení kondenzátoru přes odpor - sériový RC obvod

Určili jsme proud. Napětí u_R na odporu R zjistíme z první rovnice v (14.1) po dosazení z (14.11)

$$u_R = Ri = R \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (14.12)$$

Napětí na odporu tedy postupně klesá od počáteční hodnoty $u_R(0) = U_0$ a blíží se nulové hodnotě po uplynutí dlouhé doby, teoreticky $\lim_{t \rightarrow \infty} u_R = 0$.

Napětí u_C na kondenzátoru C zjistíme z druhé rovnice v (14.1) po dosazení z (14.11)

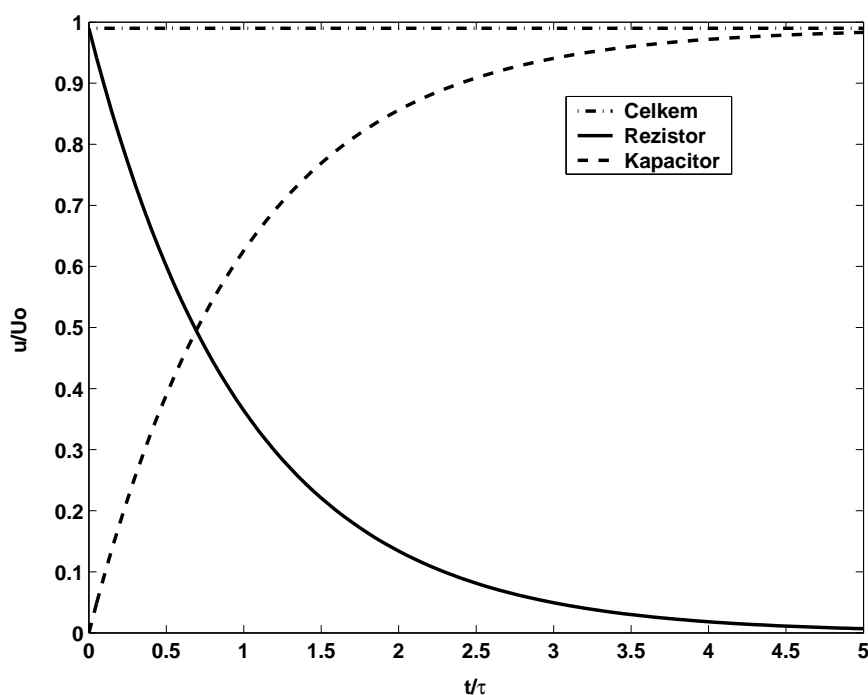
$$\begin{aligned} u_C &= \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt = \frac{U_0}{RC} \int_0^t e^{-\frac{t}{\tau}} \, dt = \frac{U_0}{\tau} \left[\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{-\frac{1}{\tau}} \right]_0^t = \\ &= -\frac{U_0}{\tau} \left[\tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^t = -U_0 \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \end{aligned} \quad (14.13)$$

Napětí na kondenzátoru tedy postupně narůstá od počáteční nulové hodnoty $u_C(0) = 0$ a blíží se ustálené hodnotě $u_C(\infty) = U_0$ rovné napětí zdroje po uplynutí dostatečně dlouhé doby, teoreticky $\lim_{t \rightarrow \infty} u_C = U_0$. Graficky je průběh všech napětí (na odporu, kondenzátoru a celkového) pro obě normalizované osy znázorněn na obr. 14.3. Napětí na odporu monotónně klesá k nule, na kondenzátoru monotónně narůstá k ustálené hodnotě rovné napětí zdroje. Na normalizované stupnici se toto napětí blíží jedné. Celkové napětí je konstantní, rovné napětí zdroje, což potvrzuje správnost výpočtu i grafů.

Pro úplnost je na obr. 14.4 uveden časový průběh okamžitých normalizovaných výkonů: na odporu, kondenzátoru a celkového. Vztahy pro ně lze snadno obvodit. Na odporu okamžitý výkon monotónně klesá, na kondenzátoru nabývá maxima v blízkosti relaxační doby. Celkový okamžitý výkon klesá rovněž monotónně, avšak pomaleji než na odporu.

Příklad 14.2:

Disipativní a akumulativní prvek jsou spojeny do série a připojeny v čase $t = 0$ ideálním spínačem k ideálnímu zdroji napětí. Časový průběh proudu obvodem a napětí na akumulativním prvku jsou uvedeny v tabulce. Kombinací grafické a početní metody podejte



Obrázek 14.3: Průběh normalizovaných napětí při nabíjení kondenzátoru přes odpor - sériový RC obvod.

úplnou informaci o tomto obvodu. Posuďte přesnost získaných informací. **Řešení**

Tabulka 14.1: Přechodový jev, naměřené hodnoty

| | | | | | | | | | |
|----------|------|-----|-----|------|------|------|------|------|------|
| t [ms] | 0 | 2.1 | 4.1 | 6.2 | 8.3 | 10.3 | 12.4 | 20.7 | 31 |
| I [mA] | 10.9 | 8.9 | 7.3 | 6 | 4.9 | 4 | 3.3 | 1.5 | 0.5 |
| U [V] | 0 | 4.4 | 7.9 | 10.8 | 13.2 | 15.2 | 16.8 | 20.8 | 22.8 |

| | | | |
|----------|------|------|------|
| t [ms] | 41.4 | 51.7 | 72.4 |
| I [mA] | 0.2 | 0.1 | 0 |
| U [V] | 23.6 | 23.8 | 24 |

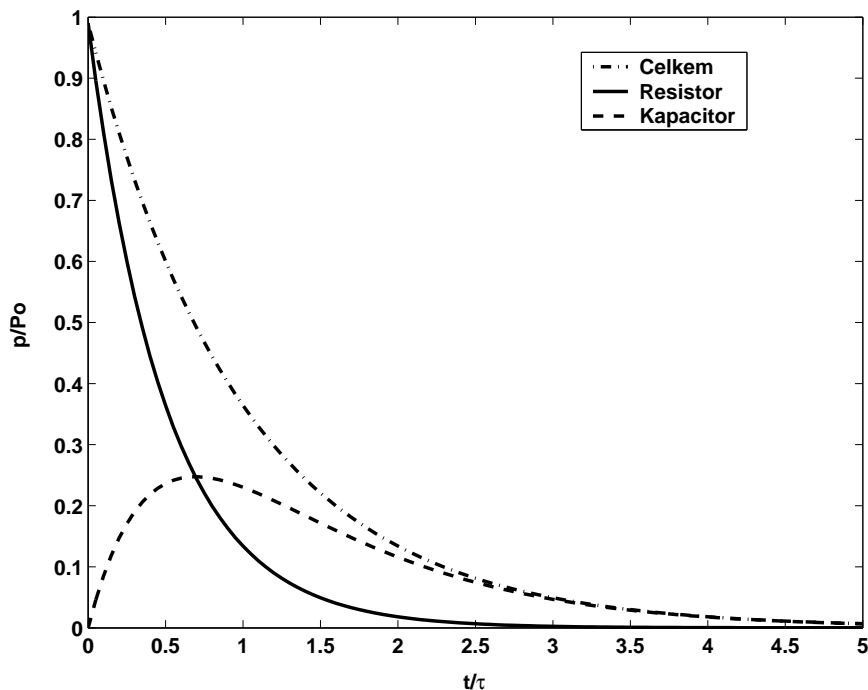
V zadání je uveden disipativní prvek a akumulativní prvek. Poněvadž nejsou dále specifikovány, budeme předpokládat, že se jedná o ideální prvky. Disipativním prvkem je podle definice pouze odpor, akumulativním kondenzátor nebo cívka. Jsou tedy dvě možnosti, sériové zapojení odporu a kondenzátoru, nebo odporu a cívky. Z obvodových rovnic nebo fyzikálních úvah plyne toto:

1. Odpor a kondenzátor

V okamžiku sepnutí spínače není na kondenzátoru napětí, chová se jako zkrat. Na odporu je maximální napětí a obvodem teče maximální proud. Postupně se kondenzátor nabíjí, napětí na něm roste, napětí na odporu klesá, proud se zmenšuje až zanikne. Proud tedy klesá, napětí na kondenzátoru roste.

2. Odpor a cívka

V okamžiku sepnutí spínače neteče žádný proud, na odporu není žádné napětí, veškeré napětí musí být na cívce. Proud postupně narůstá, napětí na cívce klesá.



Obrázek 14.4: Průběh normalizovaných výkonů při nabíjení kondenzátoru přes odpor - sériový RC obvod

O který akumulativní prvek se jedná, lze zjistit pouze z grafického průběhu.

Před kreslením grafu je nutno určit měřítka na osách podle hodnot v tabulce. Následující údaje jsou pouze doporučením.

1. Na časové ose může 1 mm odpovídat 1 ms. Tato osa bude dosti krátká. Lepší řešení jsou 2 mm na 1 ms, body se však vynášejí obtížněji.
2. Na ose proudu lze proudu 1 mA přiřadit 1 cm.
3. Na ose napětí je vhodné na 5 mm přiřadit napětí 5 V.

Z nakreslených grafů, které jsou též na obr. 14.5 a 14.6¹⁶, po řadě pro proud a napětí, zjistíme, že proud obvodem klesá a napětí na akumulativním prvku roste, jedná se tedy o kondenzátor.

Hodnoty obvodových prvků je nutno určit z grafů. Z limity napětí na obr. 14.6 zjistíme, že napětí zdroje je $U_0 = 24\text{V}$. Odpor R určíme z podmínky, že v okamžiku sepnutí je napětí U_0 pouze na odporu. Teče jím počáteční proud $I_0 = 10,9\text{mA}$, takže odpor je

$$R = \frac{U_0}{I_0} = \frac{24}{10,9 \cdot 10^{-3}} = 2,2\text{k}\Omega \quad (14.14)$$

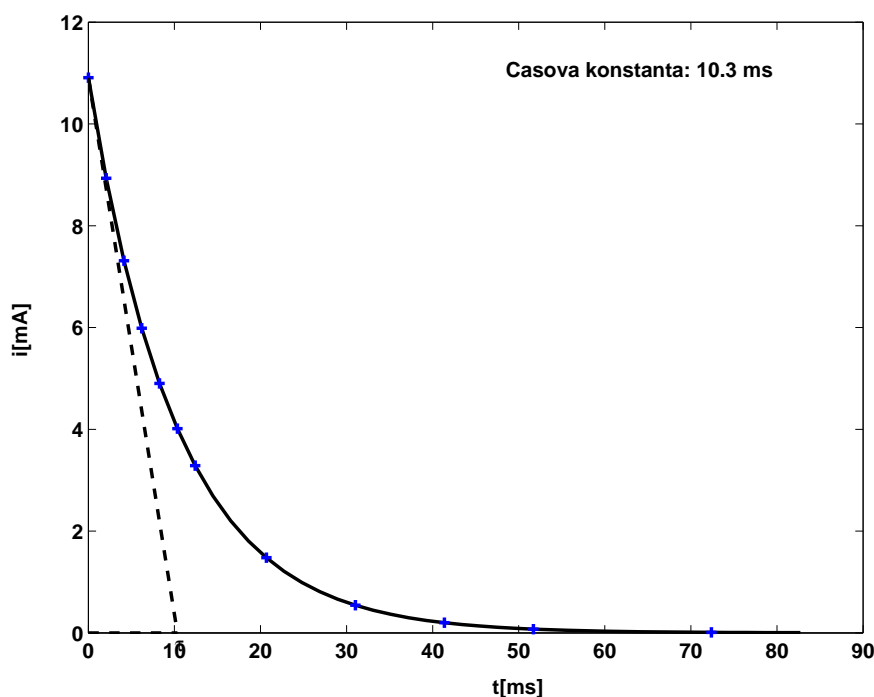
K určení kapacity kondenzátoru potřebujeme znát časovou konstantu či relaxační dobu, definovanou vztahem

$$\tau = RC \quad (14.15)$$

Tu lze určit celkem třemi způsoby.

1. Metodou tečny v počátku.
2. Z definice časové konstanty.

¹⁶V této fázi si budeme všimnout jen křivek, nikoliv konstrukce.



Obrázek 14.5: Průběh proudu při přechodovém ději, určení časové konstanty tečnou

3. Logaritmováním vztahu pro proud a napětí.

V každém případě potřebujeme časovou závislost proudu a napětí, které jsou popsány vztahy (14.11) a (14.13), tj.

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (14.16)$$

$$u(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (14.17)$$

Derivací rovnice (14.16) a dosazením nuly pro čas získáme tečnu k průběhu proudu v počátku

$$k_t = -\frac{I_0}{\tau} \quad (14.18)$$

Poněvadž tečna prochází bodem I_0 , je její rovnice po dosazení ze vztahu (14.18)

$$y(t) = I_0 + k_t \cdot t = I_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \quad (14.19)$$

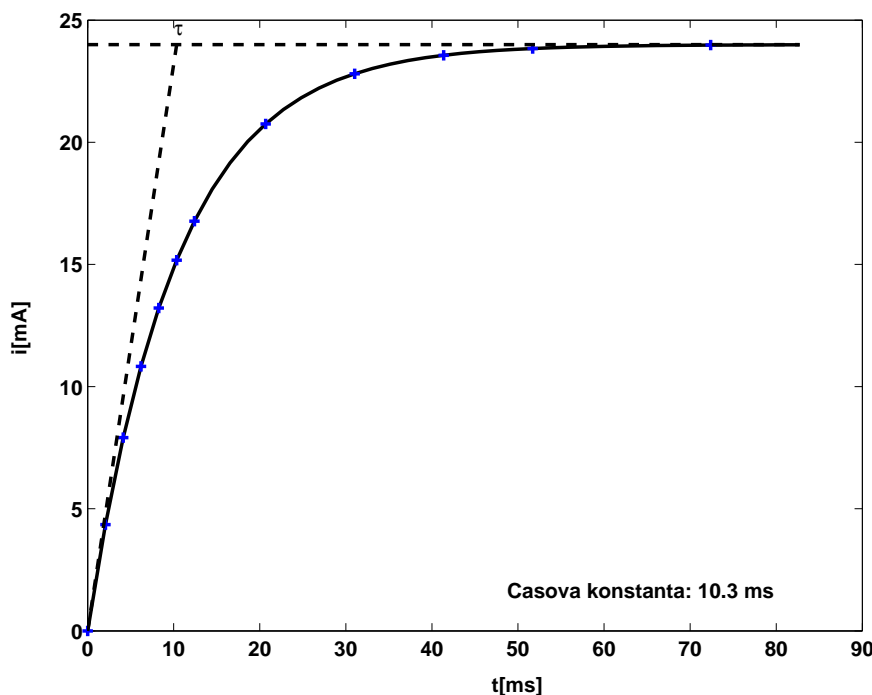
Z poslední rovnice vyplývá, že $y(t) = 0$ pro $t = \tau$. Jinými slovy, tečna k počáteční hodnotě proudu vytíná na časové ose právě úsek rovný časové konstantě. Postup při určení časové konstanty tímto způsobem je na obr. 14.5.

Pro průběh napětí je postup při odvození obdobný. Postup při grafickém určení časové konstanty tímto způsobem je na obr. 14.6.

Druhý postup vyplývá z definice časové konstanty. Dosadíme-li do rovnice (14.16) za čas hodnotu časové konstanty $t = \tau$, obdržíme výraz

$$i(\tau) = I_0 \left(e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = I_0 e^{-1} = 0,368I_0 \quad (14.20)$$

Po uplynutí doby rovné časové konstantě klesne proud na 36,8 % počáteční hodnoty. Grafické určení časové konstanty je pak na obr. 14.7. Zjistí se doba, která odpovídá okamžité hodnotě proudu $0,368I_0$



Obrázek 14.6: Průběh napětí při přechodovém ději, určení časové konstanty tečnou

Podobně se postupuje pro průběh napětí. Dosadíme-li do rovnice (14.17) za čas hodnotu časové konstanty $t = \tau$, obdržíme výraz

$$u(\tau) = U_0 (1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}) = U_0(1 - e^{-1}) = 0,632U_0 \quad (14.21)$$

Po uplynutí doby rovné časové konstantě stoupne napětí na 63,2 % konečné hodnoty. Grafické určení časové konstanty je pak na obr. 14.8. Zjistí se doba, která odpovídá okamžité hodnotě napětí $0,632U_0$.

Třetí přístup spočívá v logaritmování rovnice (14.16). Rovnici (14.16) vydělíme počátečním proudem I_0 a pak ji logaritmujeme přirozeným logaritmem. Dostaneme

$$\ln \left(\frac{i(t)}{I_0} \right) = -\frac{t}{\tau} \quad (14.22)$$

Porovnejme tuto rovnici s obecnou rovnicí přímky

$$y = kx + q \quad (14.23)$$

kde k je směrnice a q úsek vytknutý na ose y . Položíme-li

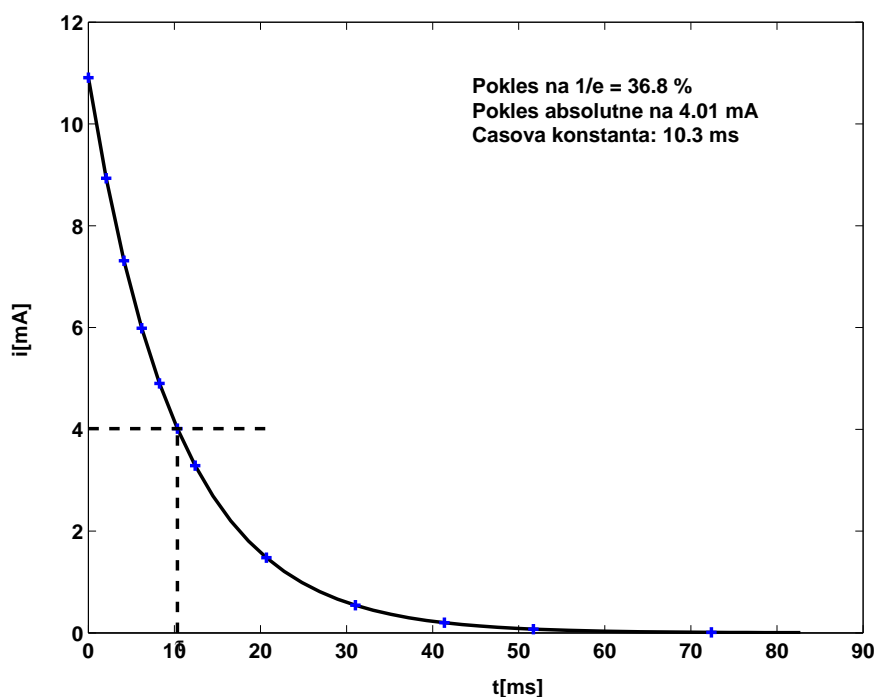
$$y = \ln \left(\frac{i(t)}{I_0} \right) \quad x = t \quad (14.24)$$

zjistíme z porovnání rovnic (14.22) a (14.23), že rovnice (14.22) je rovnicí přímky se směrnici a průsečíkem

$$k = -\frac{1}{\tau} \quad q = 0 \quad (14.25)$$

Přímka (14.22) tedy prochází počátkem.

Graficky postupujeme tak, že na svislou osu vynášíme hodnoty $\ln(i(t)/I_0)$, na vodorovnou osu odpovídající čas t . Body leží přibližně na přímce, což znázorňuje obr. 14.9. Proložíme jimi přímku a zjistíme její směrnici. Obecně nejsnadněji směrnici určíme z pravoúhlého trojúhelníku, jehož přeponu tvoří část nakreslené přímky a odvěsny



Obrázek 14.7: Určení časové konstanty podle definice

jsou rovnoběžné se souřadnými osami. Trojúhelník volíme dosti velký a velikost odvěsen musíme vyjádřit pomocí fyzikálních jednotek příslušných té či oné ose, nikoliv v mm, cm, apod.! Označíme-li hodnotu odvěsny ve směru vodorovné osy jako Δt (a to v sekundách) a hodnotu odvěsny na svislé ose jako ΔI_{log} (uvádíme ji v přirozených logaritmech), vypočteme směrnici podle vztahu

$$k = \frac{\Delta I_{log}}{\Delta t} \quad (14.26)$$

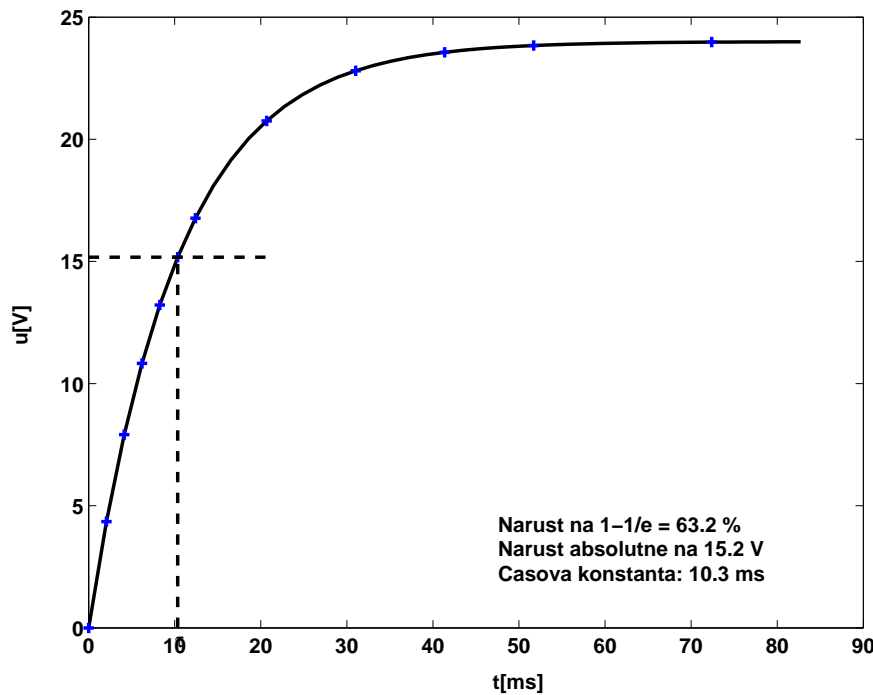
Její hodnota má být správně záporná, poněvadž přímka (14.22) klesá. To se zajistí zápornou hodnotou odvěsny ΔI_{log} , která se uvažuje jako rozdíl hodnoty koncového a počátečního bodu. Podle vztahu (14.25) je převrácená hodnota směrnice (se správným znaménkem) rovna hledané relaxační době,

$$\tau = -\frac{1}{k} = -\frac{\Delta t}{\Delta I_{log}} \quad (14.27)$$

Lze tedy určit relaxační dobu přímo z odvěsen. Jen je třeba je dosadit ve správném pořadí.

Poněvadž však přímka prochází počátkem a na svislé ose jsou logaritmy, lze časovou konstantu určit též jednodušším způsobem. Ze vztahu (14.22) plyne pro násobky relaxační doby:

$$\begin{aligned} t = \tau & \quad \dots \quad \ln\left(\frac{i(t)}{I_0}\right) = -1 \\ t = 2\tau & \quad \dots \quad \ln\left(\frac{i(t)}{I_0}\right) = -2 \\ t = 3\tau & \quad \dots \quad \ln\left(\frac{i(t)}{I_0}\right) = -3 \\ t = n\tau & \quad \dots \quad \ln\left(\frac{i(t)}{I_0}\right) = -n \end{aligned} \quad (14.28)$$



Obrázek 14.8: Určení časové konstanty podle definice

kde n je přirozené číslo. Stačí tedy určit např. dobu Δt , která odpovídá hodnotě -5 na svislé ose. Časová konstanta je pak $\tau = \frac{\Delta t}{n}$. Obecně platí

$$\ln\left(\frac{i(t)}{I_0}\right) = -n \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\Delta t}{n} \quad (14.29)$$

Postup z vyjádření číselné konstanty průběhu napětí je obdobný. V tomto případě vycházíme z rovnice (14.17). Tu upravíme na tvar

$$U_0 - u(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (14.30)$$

Rovnici (14.30) vydělíme konečným napětím U_0 a pak ji logaritmuje přirozeným logaritmem. Dostaneme

$$\ln\left(\frac{U_0 - u(t)}{U_0}\right) = -\frac{t}{\tau} \quad (14.31)$$

Stejnými úvahami, jaké jsme aplikovali na rovnici (14.22), zjistíme, že se opět jedná o rovnici přímky v proměnných

$$y = \ln\left(\frac{U_0 - u(t)}{U_0}\right) \quad x = t \quad (14.32)$$

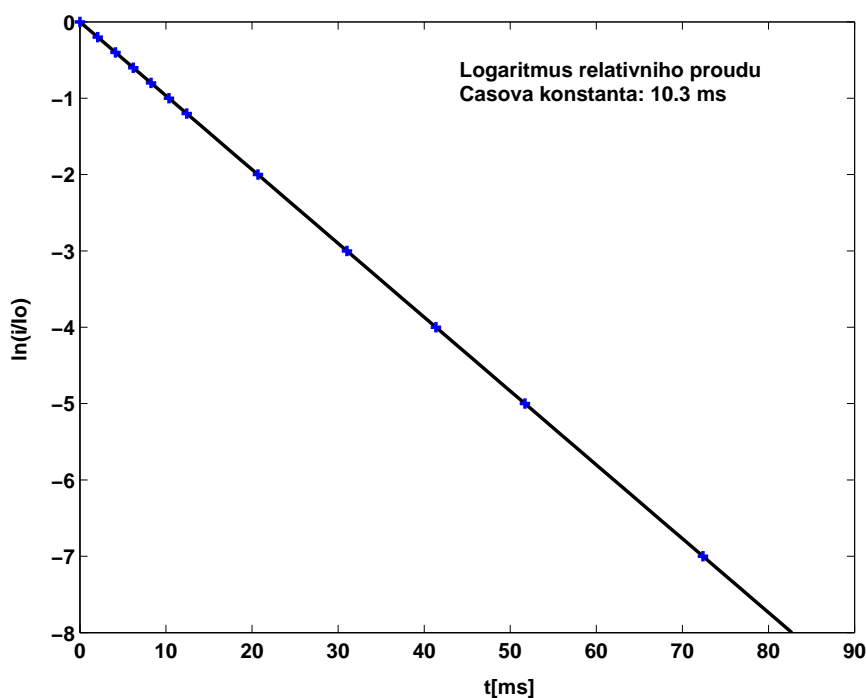
a relaxační dobu určíme naprosto stejným způsobem jako výše, viz. obr. 14.10 a text za vztahem (14.25).

Pro relaxační dobu zjistíme v obou posledních případech hodnotu 10,3 ms. Ze vztahu (14.15) pak lze určit kapacitu kondenzátoru

$$C = \frac{\tau}{R} = \frac{10,3 \cdot 10^{-3}}{2,2 \cdot 10^3} = 4,7 \mu\text{F}. \quad (14.33)$$

Poznámka 14.1:

V tomto příkladu jsme časovou konstantu určovali třemi způsoby. Porovnejme jejich výhody a nevýhody.



Obrázek 14.9: Určení časové konstanty logaritmováním

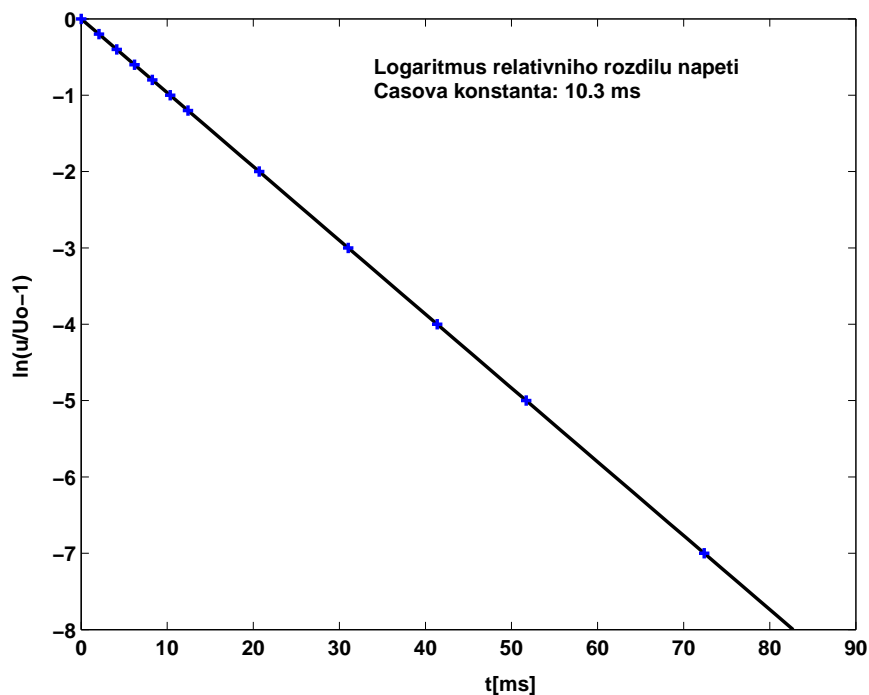
1. Metoda tečny v počátku je nejjednodušší, poněvadž nevyžaduje žádné znalosti. Proto se nejčastěji používá. Je však nejméně přesná, používá grafickou derivaci, která se uvádí jako příklad nevhodné metody. Tečna ke křivce je graficky určena s malou přesností. Navíc ji sestavujeme v oblasti, kde se průběh proudu či napětí nejrychleji mění, tedy i naměřené hodnoty jsou zatíženy vyšší chybou. Třetí nevýhodou je, že se využívá jen části informace obsažené v datech.
2. Metoda vycházející z definice časové konstanty je poněkud složitější, poněvadž předpokládá znalost této definice. Proto se používá méně. V porovnání s předchozí metodou je však přesnější, poněvadž používá více funkčních hodnot, a to navíc v úseku vzdáleném od počátku, kde se průběh mění pomaleji. Lze očekávat, že výsledky budou přesnější. Stejně jako předchozí metoda však nevyužívá úplně informace obsažené v datech.
3. Metoda logaritmování vztahu pro proud nebo napětí je nejnáročnější na znalosti, proto se téměř nepoužívá. Zdánlivě je i náročná na výpočet. To však platí jen pro ruční výpočet. Numerický výpočet lze plně automatizovat jednoduchým algoritmem. V MATLABu jsou zapotřebí čtyři krátké řádky. Je také nejpřesnější, poněvadž umožní redukovat i experimentální chyby v datech a navíc rovnoměrně využívá všech experimentálních hodnot.

Poznámka 14.2:

V matematice i fyzice se často uvádí tento vztah pro směrnici přímky

$$k = \operatorname{tg} \alpha \quad (14.34)$$

kde α je úhel, který přímka svírá s osou x . Je hrubou chybou změřit tento úhel a z něho vypočítat směrnici. Vztah (14.34) platí jen v tom případě, že na obou osách jsou stejné jednotky, což je prakticky splněno jen vyjíměčně. Pokud tomu tak není, je nutno použít modulů, což může zavléci další chyby.



Obrázek 14.10: Určení časové konstanty logaritmováním

Příklad 14.3:

Ukažte, že rozměr časové konstanty $\tau = RC$ je skutečně čas, a tedy její jednotkou je sekunda.

Řešení

Použijeme fyzikální přístup: veličina uzavřená v hranatých závorkách udává její jednotku. Vydeme z těchto definic či zákonů:

$$\begin{aligned}
 \tau &= RC \\
 R &= \frac{U}{I} \\
 Q &= CU \quad \rightarrow \quad C = \frac{Q}{U} \\
 Q &= It
 \end{aligned}
 \tag{14.35}$$

Význam vztahů je tento:

1. V prvním vztahu je definice časové konstanty.
2. Druhý vztah představuje Ohmův zákon pro stejnosměrný proud.
3. Třetí vztah je statická definice kapacity, Q je náboj na kondenzátoru, C jeho kapacita a U napětí mezi jeho elektrodami.
4. Poslední vztah počítá náboj, který stejnosměrný proud I přenesl za dobu t .

Postupným dosazováním ze vztahů v (14.35) směrem hora dolů dostaneme

$$\tau = RC = \frac{U}{I} \frac{Q}{U} = \frac{Q}{I} = \frac{It}{I} = t
 \tag{14.36}$$

Základní jednotkou časové konstanty, $[RC] = [t] = \text{s}$, je tedy [s].

15 Nelineární prvky

Cvičení se soustřeďuje pouze na základní příklady obvodů s nelineárními odpory: grafické určení celkového a diferenciálního odporu, grafické nalezení pracovního bodu pro sériové zapojení nelineárního a lineárního odporu, buzení vyšších harmonických. Poslední úloha se řeší analyticky, předpokládá se analytický tvar voltampérové charakteristiky a harmonické buzení. Aplikuje se rozklad součinů goniometrických funkcí na funkce se součtem či rozdílem argumentů. To umožní získat analytické vztahy pro amplitudy jednotlivých harmonických.

Příklad 15.1:

K žárovce, jejíž VA charakteristiku jste měřili na laboratorním cvičení, připojíme do série odpor $R = 240 \Omega$. Tuto kombinaci napájíme ze zdroje napětí $U_0 = 18 \text{ V}$. Jaké je napětí na žárovce a jaké na odporu? Data pro žárovku jsou v tabulce 15.1.

Tabulka 15.1: VA charakteristika žárovky

| | | | | | | | | | | |
|--------|------|-------|------|-------|-------|------|-------|------|------|-------|
| U [V] | 0,0 | 0,5 | 0,74 | 0,98 | 2,1 | 3,1 | 3,95 | 4,85 | 5,98 | 7,04 |
| I [mA] | 0,0 | 7,9 | 9,6 | 10,8 | 17,1 | 22,4 | 25,0 | 28,3 | 32,0 | 35,2 |
| U [V] | 8,04 | 9,01 | 9,75 | 11 | 9,75 | 11 | 12,08 | 13,0 | 13,9 | 14,64 |
| I [mA] | 38,1 | 40,8 | 42,3 | 45,6 | 42,3 | 45,6 | 48,5 | 50,6 | 52,6 | 54,2 |
| U [V] | 16,0 | 14,64 | 16,0 | 16,95 | 18,02 | 18,9 | 19,56 | | | |
| I [mA] | 57,0 | 54,2 | 57,0 | 58,9 | 61,1 | 62,8 | 64 | | | |

Řešení:

Žárovka jako nelineární prvek je popsána VA-charakteristikou, tedy graficky. Lineární odpor je popsán Ohmovým zákonem. Řešení tedy musí být grafické, či graficko-početní. Proud tekoucí obvodem označme I , napětí na žárovce označme U_z , na odporu je napětí $U_r = RI$. Součet obou napětí je roven napětí zdroje U_0 , tedy

$$U_0 = RI + U_z \quad (15.1)$$

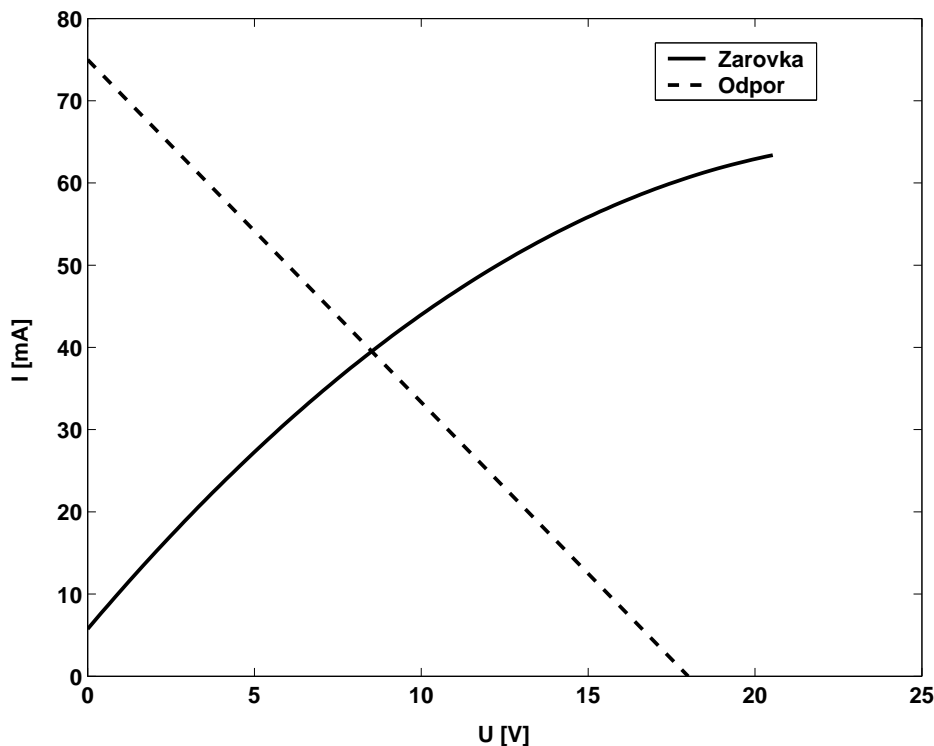
Početně můžeme ze vztahu (15.1) zjistit tyto dva krajní stavy:

1. Obvodem neteče žádný proud. Pak je podle vztahu (15.1) napětí na odporu nulové a veškeré napětí je na žárovce, tedy pro $I = 0$ je $U_z = U_0$.
2. Napětí na žárovce je nulové $U_z = 0$, pak podle (15.1) teče obvodem proud

$$I_m = \frac{U_0}{R} \quad (15.2)$$

Získali jsme dva body zatěžovací charakteristiky lineárního odporu. Všechny ostatní musí ležet na přímce spojující tyto dva body. Na grafu tedy vyznačíme body $[U_z, 0] = [U_0, 0]$ a $[0, I_m] = [0, U_0/R]$ a spojíme je přímkou. Ta představuje zatěžovací charakteristiku. Její průsečík s VA-charakteristikou dává pracovní bod.

Graficky postupujeme tak, že na vodorovné ose vybereme bod o napětí $U_0 = 18 \text{ V}$, na svislé ose bod s proudem $I_m = U_0/R = 75 \text{ mA}$. Z průsečíku s charakteristikou zjistíme napětí na žárovce a proud tekoucí obvodem. Napětí na odporu získáme odečtením napětí žárovky od napětí zdroje.



Obrázek 15.1: Grafické určení pracovního bodu

Příklad grafické konstrukce je na obr. 15.1. Obvodem teče proud asi 40 mA, na žárovce je napětí kolem 8 V a na odporu kolem 10 V.

Příklad 15.2:

Na VA-charakteristice žárovky ve zvoleném pracovním bodě určete celkový a diferenciální odpor.

Řešení

Napětí a proud v pracovním bodě označme po řadě U a I . Celkový odpor je dán pomocí Ohmova zákona

$$R_c = \frac{U}{I} \quad (15.3)$$

Diferenciální odpor je dán tečnou k VA-charakteristice v pracovním bodě

$$R_d = \frac{dU}{dI} \doteq \frac{\Delta U}{\Delta I} \quad (15.4)$$

Prakticky postupujeme tak, že graficky sestavíme tečnu a k ní sestavíme dosti velký pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami rovnoběžnými se souřadnými osami. Na odvěsnách odečteme změny napětí a proudu, převedeme je do základních jednotek, tj. na volty a ampéry, dosadíme do vztahu (15.4) a vypočteme diferenciální odpor.

U hodnot obou odporů je nutno uvést, pro který pracovní bod platí.

Příklad 15.3:

Voltampérová charakteristika prvku je aproximována funkcí

$$i = 0,06 + 0,05u + 0,03u^2 \quad (15.5)$$

Na prvek připojíme harmonické napětí o frekvenci 400 Hz a efektivní hodnotě 0,8 V. Stejnsměrná složka napětí je 0,2 V.

1. Jaký proud poteče prvkem? Uvedte v přehledném, názorném a úplném tvaru a vysvětlete význam jednotlivých složek.

2. Jaké je zkršení proudu?

Řešení

Napětí na prvku předpokládáme ve tvaru

$$u(t) = U_s + U_0 \cos(\omega t) \quad (15.6)$$

Ve VA-charakteristice je uveden též jeho čtverec, v něm bude vystupovat druhá mocnina funkce kosinus, pro níž použijeme vztahu

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad (15.7)$$

Pro čtverec napětí daného vztahem (15.6) dostaneme

$$u(t)^2 = (U_s + U_0 \cos(\omega t))^2 = U_s^2 + 2U_s U_0 \cos(\omega t) + U_0^2 \cos^2(\omega t) \quad (15.8)$$

Čtverec funkce kosinus, poslední člen v (15.8), upravíme pomocí (15.7)

$$\begin{aligned} u(t)^2 &= U_s^2 + 2U_s U_0 \cos(\omega t) + U_0^2 \cos^2(\omega t) = \\ &= U_s^2 + 2U_s U_0 \cos(\omega t) + U_0^2 \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} = \\ &= U_s^2 + \frac{U_0^2}{2} + 2U_s U_0 \cos(\omega t) + U_0^2 \frac{\cos(2\omega t)}{2} \end{aligned} \quad (15.9)$$

Označíme-li koeficienty ve VA-charakteristice jako a , b , c , tj.

$$i = a + bu + cu^2 \quad (15.10)$$

pak po dosazení z (15.6) a (15.9) dostaneme

$$\begin{aligned} i &= a + b(U_s + U_0 \cos(\omega t)) + c \left(U_s^2 + \frac{U_0^2}{2} + 2U_s U_0 \cos(\omega t) + U_0^2 \frac{\cos(2\omega t)}{2} \right) = \\ &= a + bU_s + c \left(U_s^2 + \frac{U_0^2}{2} \right) + U_0(b + 2cU_s) \cos(\omega t) + \frac{cU_0^2}{2} \cos(2\omega t) = \\ &= I_0 + I_1 \cos(\omega t) + I_2 \cos(2\omega t) \end{aligned} \quad (15.11)$$

Proud tedy sestává ze tří složek, stejnosměrná I_0 , první harmonická I_1 a druhá harmonická I_2 , jejichž hodnoty jsou obecně

$$\begin{aligned} I_0 &= a + bU_s + c \left(U_s^2 + \frac{U_0^2}{2} \right) = 80,8 \text{ mA} \\ I_1 &= U_0(b + 2cU_s) = 49,6 \text{ mA} \\ I_2 &= c \frac{U_0^2}{2} = 9,6 \text{ mA} \end{aligned} \quad (15.12)$$

Jediná vyšší harmonická je druhá. Nejjednodušším způsobem se zkršení druhou harmonickou vyjádří poměrem druhé ku první harmonické

$$k = \frac{I_2}{I_1} \quad (15.13)$$

Pro celkové zkršení se používá buď tento vztah

$$k_0 = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \dots}}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}} = \frac{I_2}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2}} = 0,19 \quad (15.14)$$

nebo jednodušší vztah

$$k_0 = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \dots}}{I_1} = \frac{I_2}{I_1} = 0,194 \quad (15.15)$$

který v našem velmi jednoduchém případě udává zkršení druhou harmonickou. Rozdíl mezi oběma definicemi zkršení je v našem případě zanedbatelný.

16 Základy elektrických měření

Toto úvodní cvičení vychází z nestejných praktických zkušeností studentů. Zatímco pro dobré absolventy elektrotechnických průmyslovek neznamena toto cvičení žádné zásadně nové informace či pracovní návyky, pro absolventy jiných škol může být jeho absolvování dosti obtížné. Jeho hlavním cílem je to, aby se všichni studenti dostali na přibližně stejnou praktickou úroveň, i když je jasné, že tento jeden blok praktického cvičení nenahradí rok dobře organizované školní praxe. Na druhé straně je snaha upravit cvičení tak, aby i absolventi elektrotechnických průmyslovek našli v tomto cvičení lecos zajímavého.

16.1 Cíl cvičení a jeho zabezpečení

Studenti by se měli prakticky naučit

- využívat zabudovaných zařízení laboratoře, zejména zdroj stejnosměrného napětí,
- měřit stejnosměrné napětí a proud při respektování polarit,
- ověřit nejdůležitější vlastnosti základních zapojení spotřebičů (odporů),
- naučit se používat nejjednodušší regulaci proudu,
- zvládnout regulaci napětí.

K dispozici mají tyto měřicí přístroje a přípravky:

- Pevné - laboratorní stůl s regulovatelným zdrojem stejnosměrného napětí.
- Přenosné:
 - Univerzální multimetry (3 kusy).
 - Spotřebiče - žárovka 6 V a 12 V.
 - Posuvný odpor - vhodný kus zvolí později podle zadání.
 - Spojovací vodiče - asi 12 kusů.

16.2 Popis přístrojů a zařízení, zásady pro jejich užívání

V této části popíšeme základní vlastnosti a způsoby správného používání těchto zařízení, s upozorněním na nejčastější chyby.

- Laboratorní stůl se zdrojem regulovatelného stejnosměrného napětí.
- Multimetr pro měření stejnosměrného napětí a proudu.
- Regulační prvky — posuvný odpor.
- Pomocné prvky.

16.2.1 Laboratorní stůl

U laboratorního stolu se využívá zabudovaného stejnosměrného zdroje napětí a čtyř uzlů. Stejnosměrný zdroj zabudovaný v levé části stolu umožňuje regulaci napětí po skocích, hrubě a jemně v rozsahu 0 až 25 V. Má nastavitelný proudový omezovač 10 mA, 100 mA, 200 mA, 1 A a 2 A. Proudový omezovač zajistí, že i při zkratu proud ze zdroje nepřekročí nastavenou hodnotu. Nastavené napětí se měří zabudovaným voltmetrem (vlevo), který má údaje přímo ve voltech, odebíraný proud udává vestavěný ampérmetr (vpravo). Zde je odečítání komplikovanější, závisí na nastaveném rozsahu omezovače proudu. Stupnice obsahuje číslice 20, 40, 60, 80 a 100, deset velkých dílků a 50 malých. Např. při rozsahu 10 mA nejnižší číslici stupnice, tj. 20, přísluší proud 2 mA, velkému dílku stupnice odpovídá 1 mA a malému 0,2 mA. Naproti tomu u rozsahu 200 mA např. číslici 60 na stupnici přísluší proud 120 mA, velkému dílku stupnice odpovídá 20 mA a malému 4 mA.

Zdroj se zapíná páčkovým vypínačem, zapnutí indikuje doutnavka. Napětí se odebírání ze svorek s označenou polaritou. Ke hrubé regulaci po skocích 5 V se používá páčkového přepínače v blízkosti voltmetru. V rámci 5 V se napětí nastaví hrubě a jemně pomocí potenciometrů umístěných nad přepínačem.

Před zapnutím zdroje by mělo být na něm nastaveno nulové napětí, tj. všechny ovládací prvky napětí vytočeny zcela doleva a na proudovém omezovači by mělo být nastaveno 10 mA. Po zapnutí se postupně zvyšuje napětí a sleduje se i odebíraný proud. Pokud se ručička panelového ampérmetru blíží pravému konci stupnice přepneme omezovač proudu na vyšší rozsah jen v tom případě, že jsme si jisti, že prvky nebudou tímto proudem poškozeny. Jinak hledáme chybu v zapojení, např. zkrat. Před změnami v zapojení však nejprve vypneme zdroj. Stejně tak, pokud neteče žádný nebo velmi malý proud, vypneme zdroj a překontrolujeme zapojení.

Součástky na zdroji napětí jsou již staré a proto při některých polohách potenciometrů hodnoty na přístrojích kolísají. Zde zpravidla pomůže nastavit poněkud jinou polohu na obou potenciometrech. Připomeňme ještě, že staří praktikové dodržovali zásadu, že ze svorek zdroje mohou jít jen dva dráty a to jen s banánky. V případě neočekávaného chování obvodu je lze rychle vytrhnout a tím přerušit proud.

Dále se na stole nacházejí čtyři symetricky umístěné uzly, každý z nich obsahuje 6 propojených svorek. Tyto propojené svorky nejsou k ničemu připojeny! Chceme-li mít např. společný záporný pól v levém uzlu, musíme spojit libovolnou ze svorek tohoto uzlu se zápornou (levou) svorkou zdroje. Pokud to zapomeneme, zapojení samozřejmě nefunguje, poněvadž na uzlu není napětí, či přesněji, není na něm definován potenciál. To je častá chyba studentů.

16.2.2 Multimetr

Multimetr obsahuje tři a půl místný displej, tlačítkový vypínač, otočný přepínač měřené veličiny a jejího rozsahu a zdířky pro připojení vodičů. Lze jím měřit stejnosměrné napětí při poloze otočného přepínače v oblasti DCV (Direct Current Volts), střídavé napětí pro přepínač v oblasti ACV (Alternating Current Volts), stejnosměrný proud při nastavení otočného přepínače na DCA (Direct Current Amperes), střídavý proud pro otočný přepínač na ACA (Alternating Current Amperes), odpor, když otočný přepínač je v oblasti Ω , a některé další veličiny. V krabici jsou též měřicí vodiče s hroty, ty však používáme jen vyjíměčně. Přístroj má čtyři zdířky označené zleva jako 20 A, A, COM (Common — společná) a V Ω . Vždy se používá zdířka COM, které se připojuje na záporný pól zdroje nebo co nejbližší k němu.

Přístrojem měříme buď napětí nebo proud, další použití nás zatím nezajímá. Pokud měříme stejnosměrné napětí, postupujeme takto:

- Otočný přepínač přepneme na DCV (měříme stejnosměrné napětí) a nastavíme nejvyšší rozsah 1000 V.
- Přístroj připojíme paralelně ke svorkám prvku, na němž napětí měříme. Používáme svorek COM a V Ω . Svorka COM je co nejbližší zápornému pólu zdroje, svorka V Ω co nejbližší kladnému pólu zdroje.
- Přístroj zapneme. Obsahuje-li údaj na začátku jednu nebo více nul, přepínáme na nižší rozsah. Pokud se však objeví zcela vlevo pouze číslice 1, kromě případné desetinné tečky, je rozsah příliš nízký (přístroj je přetížen) a musíme se vrátit zpět na vyšší rozsah. Optimální rozsah obsahuje čtyři číslice, pokud začíná jedničkou, a tři číslice pro ostatní počáteční číslice. Desetinná tečka či čárka není v tomto případě podstatná. Odtud je též označení přístroje či displeje jako 3 $\frac{1}{2}$ místný. Skutečnost však lépe vystihuje označení 3 $\frac{1}{4}$ místný.
- Pokud je údaj na displeji záporný, znamená to pravděpodobně, že jsme zaměnili polaritu svorek. Je nutno vypnout zdroj a překontrolovat zapojení.

Záporný údaj na displeji v tomto úvodním cvičení především svědčí o naší nepozornosti, u složitějších obvodů však může dojít i k chybě, napětí v některých případech může být záporné, např. u zdroje symetrického napětí s uzemněným středem. Další závažnou chybou může být to, že voltmetr je zapojen do série s měřeným prvkem. V tom případě neteče prakticky žádný proud a na voltmetru je v jednoduchých případech, jako jsou naše, napětí zdroje. Obvod samozřejmě nefunguje.

Při měření proudu multimetrem postupujeme takto:

- Otočný přepínač přepneme na DCA (měříme stejnosměrný proud) a nastavíme nejvyšší rozsah¹⁷ 2 A.
- Připojíme přístroj do série s prvkem, u něhož měříme tekoucí proud. Svorka COM je co nejbližší zápornému pólu zdroje, svorka V Ω co nejbližší kladnému pólu zdroje.
- Přístroj zapneme. Obsahuje-li údaj na začátku jednu nebo více nul, přepínáme na nižší rozsah. Pokud se však objeví zcela vlevo pouze číslice 1, kromě případné desetinné tečky, je rozsah příliš nízký a musíme se vrátit na vyšší rozsah. Optimální rozsah obsahuje čtyři číslice, pokud začíná jedničkou a tři číslice pro ostatní počáteční číslice. Desetinná tečka či čárka není v tomto případě podstatná.
- Pokud je údaj na displeji záporný, znamená to pravděpodobně, že jsme zaměnili polaritu svorek. Je nutno vypnout zdroj a překontrolovat zapojení.

V tomto cvičení záporný údaj na displeji upozorňuje na naši nepozornost. U složitějších obvodů však může při chybné polaritě dojít k závažné chybě měření, poněvadž proud může téci libovolným směrem, např. v obvodu se dvěma zdroji napětí. Závažnou chybou, na rozdíl od voltmetru, je zapojení ampérmetru paralelně ke zdroji. Ampérmetr má velmi malý odpor, takže představuje prakticky zkrat. Teče jím velký proud, který může poškodit či zničit ampérmetr, zdroj nebo další prvky.

¹⁷Rozsah 20 A je určen pro měření proudu mezi zdířkami 20 A a COM. Tak velké proudy měřit nebudeme.

Důležité upozornění. Zdířky u multimetru jsou vyrobeny pro přiložené hrotové vodiče, které se však používají zřídka pro orientační měření napětí. Pro laboratorní měření nejsou vhodné. Většinou byly proto hroty nahrazeny banánky, pak má vodič jeden banánek a na druhé straně speciální kontakt, vhodný pouze k zasunutí do zdířky multimetru. Tyto kombinace bychom měli přednostně používat. Pokud nejsou, používáme vodičů se dvěma banánky. Bohužel banánky mají poněkud větší průměr, takže většinou do zdířky nejdou plně zasunout. V žádném případě nepoužíváme hrubé síly, banánek zasouváme s velkým citem a malou silou. Obvykle je zasunut jen částečně, což postačuje. Pokud přece jen je kontakt špatný, tj. údaj na displeji silně kolísá nejen na poslední číslici, pokusíme se použít vhodnější spojovací vodič.

16.2.3 Regulační prvek

Posuvný odpor umožňuje plynulou změnu odporu. Obsahuje tři svorky, dvě neoznačené, černé, na opačných stranách, a třetí, která se liší barvou, je červená a umístěna u přilehlé černé svorky. Dříve se označovala symbolem J, jezdec. Tato svorka je spojena s pohyblivým kontaktem, jezdcem, na horní části prvku. Mezi neoznačenými (černými) svorkami je pevný odpor, jehož hodnota je na štítku. Mezi červenou a další svorkou je proměnný odpor nastavený polohou jezdece. Pokud je jezdec u červené svorky je mezi červenou a přilehlou černou svorkou nulový odpor, mezi červenou a protilehlou černou svorkou je odpor maximální, daný údajem na štítku. Pro opačnou polohu jezdece platí samozřejmě opačné tvrzení. Pohybem jezdece se odpor mezi popsányými dvojicemi svorek mění plynule.

16.2.4 Pomocné prvky, součástky

Spotřebičem jsou žárovky na 6 a 12 V. Jsou v patici na přípravku, z každé strany jsou dvě zdířky, což umožní kromě proudu měřit současně i napětí na ní. Je třeba dát pozor, abychom do série se zdrojem nezapojili obě levé nebo obě pravé zdířky, pak by to byl zkrat se stejnými důsledky jako paralelní ampérmetr. Žárovku můžeme v patici uvolnit, tím obvod rozpojíme. Pak je ji však nutno opět, a to s citem, zašroubovat, aby si studenti v dalším cvičení nemysleli, že je vadná.

Spojovací vodiče jsou obvykle se dvěma banánky. Zapojují se do zdířek a svorek. Méně často se používají kombinace banánek — očko, očko se zachytí do svorky šroubováním. Očka jsou nutná např. u posuvného odporu. Pokud údaj na měřicím přístroji kolísá, může jít i o špatný kontakt v banánku. Obvykle stačí banánek dotáhnout. Problém ovšem je najít v zapojení ten, který je skutečně vadný.

Na některých pracovištích se dodržuje zásada, že ke kladnému pólu, obecně k živému pólu zdroje se připojují vodiče či banánky teplé barvy, zejména červené, méně často žluté. K zápornému pólu, nebo obecně k uzemněnému pólu, zdroje pak vodiče či alespoň banánky barvy studené, přednostně modré, dále pak zelené. Je dobré tuto zásadu dodržovat i v laboratorním cvičení.

Upozorníme ještě na rozdíl mezi zdířkou a svorkou. Zdířky jsou u multimetru nebo přípravku se žárovkami. Umožňují zasunout jen banánek. Svorky jsou např. u uzlů na laboratorním stole. Svorka rovněž umožní připojení banánku, obsahuje však i šroubovací část, která dovolí přišroubovat vodič s kabelovým očkem (očko má tvar písmene U, na druhém konci vodiče je banánek). Teoreticky lze ke svorce přišroubovat více oček, prakticky je však bezpečně upevněno jen jedno. Pokud potřebujeme, aby se na svorce stýkaly tři nebo více vodičů, dáme přednost uzlu na laboratorním stole.

16.3 Měření

První dvě úlohy mají za cíl seznámit se s měřením proudu a napětí, další dvě měří základní obvodové veličiny v sériovém a paralelním zapojení a poslední dvě se zabývají regulací proudu a napětí. Úlohy ve dvojici jsou tedy navzájem duální. V popisu měření je naznačen postup, který autoři považují za bezpečnou cestu vedoucí k úplnému splnění zadání. Nicméně studenti mohou volit odlišný postup, který považují za optimální.

16.3.1 Měření napětí

Úkol

V této velmi jednoduché úloze porovnejte tři digitální voltmetry a jeden analogový na panelu.

Postup

Optimální je možná tento postup. Svorky zdroje připojíme ke dvěma blízkým uzlům. K těmto uzlům připojíme tři multimetry jako voltmetry podle postupu uvedeného výše. Zejména dbáme na správnou polaritu zdírek multimetru. Používáme zdírek COM a $V\Omega$. Po zapnutí zdroje a nastavení malého napětí, pod 1 V, ověříme správnou funkci obvodu — přístroje musí ukazovat nastavené napětí. Pokud je vše v pořádku, nastavujeme několik hodnot napětí, např. 2, 4, 6, 9, 12, 15, 20 a 25 V, odečteme údaje na všech přístrojích a zapisujeme je do tabulky. Teoreticky by všechny voltmetry měly ukazovat stejnou hodnotu, prakticky se mohou údaje poněkud lišit v důsledku chyb přístrojů.

S ohledem na pozdější využití těchto výsledků je dobré si k naměřenému údaji poznamenat výrobní číslo multimetru. To má však smysl jen tehdy, jestliže se údaje v důsledku výrobních nepřesností liší na posledním místě o více než jednotku.

16.3.2 Měření proudu

Úkol

V této velmi jednoduché úloze porovnejte tři digitální ampérmetry a jeden analogový ampérmetr na panelu. Změřte základní parametry žárovky, typ určí vedoucí cvičení.

Postup

Při měření autoři doporučují postupovat takto. Jako spotřebič použijeme určenou žárovku. K ní připojíme do série tři multimetry zapojené jako ampérmetry podle postupu uvedeného výše, zejména dbáme na správnou polaritu zdírek multimetru. Používáme zdírek COM a A. Tento obvod připojíme ke svorkám zdroje. Po zapnutí zdroje při nastaveném omezovači proudu na 10 mA nastavíme napětí asi 0,5 V a ověříme, zda všemi ampérmetry teče přibližně tentýž proud několik mA. Pokud je vše v pořádku, odečteme hodnoty všech proudů. Pak přepneme omezovač na 100 mA nebo 200 mA a změříme (na všech přístrojích) několik proudů, např. pro napětí 4, 8, 12, 14 a 18 V. Pro žárovku na 6 V jsou napětí poloviční. Při posledních dvou napětích měříme krátce, poněvadž žárovka je přetížena, a proto se rychle vrátíme na maximálně 12 V, případně 6 V. Údaje odečtené z přístrojů zapisujeme do tabulky. Teoreticky by všechny ampérmetry měly ukazovat stejnou hodnotu, prakticky se budou údaje poněkud lišit v důsledku chyb přístrojů. Při vyšším napětí můžeme přepnout omezovač zpět na 10 mA a přesvědčit se, zda funguje správně.

S ohledem na pozdější využití těchto výsledků, zejména posouzení přesnosti, je dobré si k naměřenému údaji poznamenat výrobní číslo multimetru.

Pro regulaci proudu je nutno zjistit napětí zdroje a proud, při kterém žárovka právě přestane svítit. Dále je nutno znát proud tekoucí žárovkou při jmenovitém napětí, tj. 6 nebo 12 V podle typu. Proto si tyto hodnoty zaznamenáme výrazně.

16.3.3 Sériové spojení spotřebičů

Úkol

Ověřte všechny kvalitativní a kvantitativní vlastnosti sériového zapojení spotřebičů. V sériovém zapojení použijte žárovky na 6 a 12 V.

Základní vlastnosti sériového zapojení

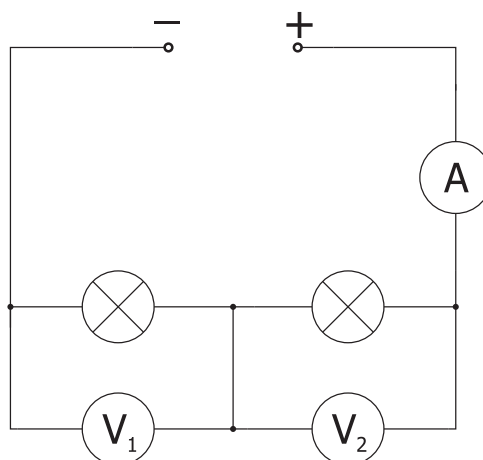
Základní vlastnosti sériového zapojení dvou spotřebičů vycházejí z Kirchhoffových zákonů a z praktického hlediska se dají shrnout např. takto.

- Kvalitativní praktické poučky:
 - Při povolení jedné žárovky přestane svítit i druhá.
 - Zkratujeme-li jednu žárovku, druhá svítí jasněji.
- Z kvantitativního (obvodového) hlediska můžeme v obvodu měřit tyto čtyři (závislé) obvodové veličiny:
 - Proud, který je společný všem prvkům.
 - Napětí zdroje a napětí na žárovkách, přičemž napětí zdroje je rovno součtu napětí na žárovkách.

Praktické poučky jsou samozřejmě důsledkem těchto kvantitativních vztahů.

Postup

Poněvadž máme jen tři přístroje pro čtyři obvodové veličiny, musíme úplné měření provést postupně, dvakrát. V prvním zapojení podle obr. 16.1 měříme napětí na žárovkách a proud v obvodu. Spotřebiče a měřicí přístroje zapojíme podle schématu a připojíme ke svorkám zdroje. Po zapnutí se při malém napětí, pod 1 V, přesvědčíme zda obvodem prochází proud několik mA a na voltmetrech jsou napětí nižší než napětí zdroje. Je-li vše v pořádku, provedeme tato měření:

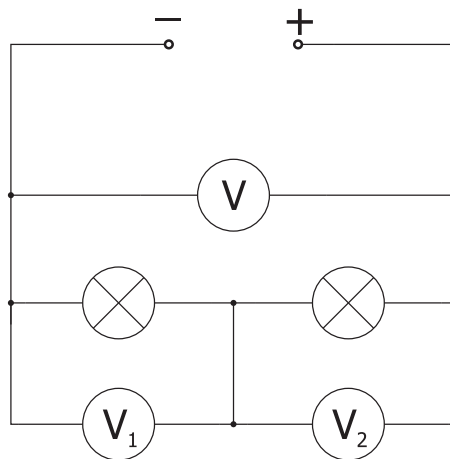


Obrázek 16.1: Sériové spojení spotřebičů – měření společného proudu a napětí na spotřebičích

- Na zdroji nastavíme napětí 18 V, přesvědčíme se, zda žárovky svítí normálně, a odečteme proudy a napětí.
- Postupně na každé ze žárovek podle typu nastavíme přesně buď 6 nebo 12 V, zjistíme proud v obvodu a napětí na druhé žárovce.
- Jednu žárovku povolíme. Zjistíme proud a napětí. Totéž uděláme pro druhou žárovku.
- Sledujeme vliv zkratování žárovky na 6 V. Na zdroji nastavíme 12 V, posoudíme jas žárovek, zjistíme proud obvodem a napětí na obou žárovkách. Nyní zkratujeme žárovku 6 V, posoudíme jas druhé žárovky, zjistíme proud v obvodu a napětí na druhé žárovce. Zkrat provedeme tak, že u žárovky na 6 V odpojíme voltmetr a jedním vodičem spojíme zdířky, na které byl voltmetr připojen.
- Nyní posoudíme vliv zkratu u žárovky na 12 V. Na zdroji nastavíme 6 V, posoudíme jas žárovek, zjistíme proud obvodem a napětí na obou žárovkách. Zkratujeme žárovku 12 V, posoudíme jas druhé žárovky, zjistíme proud v obvodu a napětí na druhé žárovce. Zkrat provedeme tak, že u žárovky 12 V odpojíme voltmetr a jedním vodičem spojíme zdířky, na které byl voltmetr připojen.

Všechny výsledky zapíšeme do přehledné tabulky, kterou jsme si připravili předem.

V dalším zapojení podle obr. 16.2 je vhodné připojit svorky zdroje na uzly laboratorního stolu. Nyní se měří všechna napětí. Postupujeme podobně jako v předchozím případě.



Obrázek 16.2: Sériové spojení spotřebičů – měření všech napětí

- Na zdroji nastavíme napětí 18 V, přesvědčíme se, zda žárovky svítí normálně, a odečteme všechna napětí.
- Jednu žárovku povolíme. Zjistíme všechna napětí. Totéž uděláme pro druhou žárovku.
- Sledujeme vliv zkratování žárovky na 6 V. Na zdroji nastavíme 12 V, posoudíme jas žárovek a zjistíme všechna napětí. Zkratujeme žárovku 6 V, posoudíme jas druhé žárovky a zjistíme všechna napětí. Zkrat provedeme tak, že u žárovky 6 V odpojíme voltmetr a jedním vodičem spojíme zdířky, na které byl voltmetr připojen.

- Nyní budeme sledovat vliv zkratu u žárovky na 12 V. Na zdroji nastavíme 6 V, posoudíme jas žárovek a zjistíme všechna napětí. Zkratujeme žárovku 12 V, posoudíme jas druhé žárovky a změříme všechna napětí. Zkrat provedeme tak, že u žárovky 12 V odpojíme voltmetr a jedním vodičem spojíme zdířky, na které byl voltmetr připojen.

Všechny výsledky zapíšeme do přehledné tabulky, kterou jsme si připravili předem. Dále je dobré poznamenat si do schématu výrobní čísla voltmetrů. Důvod uvidíme později.

16.3.4 Paralelní spojení spotřebičů

Úkol

Ověřte všechny kvalitativní a kvantitativní vlastnosti paralelního zapojení spotřebičů. V tomto zapojení použijte dvě stejné žárovky buď na 6 nebo 12 V. Typ určí vedoucí cvičení.

Základní vlastnosti paralelního zapojení

Základní vlastnosti paralelního zapojení z praktického i teoretického hlediska se dají shrnout např. do těchto bodů.

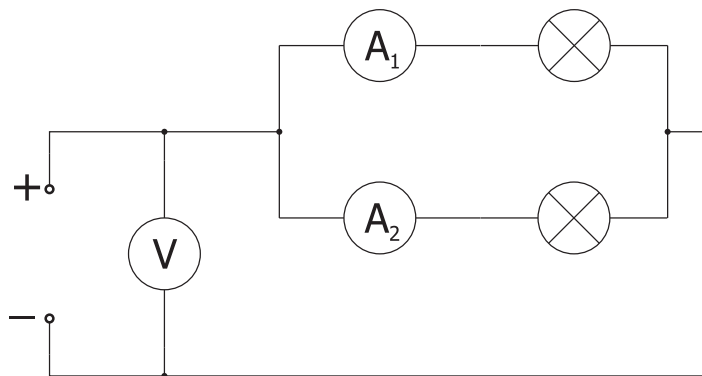
- Pro paralelní spojení platí tyto kvalitativní praktické poučky:
 - Při povolení jedné žárovky se jas druhé nezmění.
 - Žádnou ze žárovek nemůžeme zkratovat, zkratovali bychom zdroj napětí. Pokud bychom měli k dispozici zdroj proudu, zkratování jedné žárovky způsobí, že přestane svítit i druhá.
- Z kvantitativního (obvodového) hlediska můžeme v obvodu měřit tyto čtyři (nikoliv nezávislé) obvodové veličiny:
 - Napětí, které je společné všem prvkům.
 - Proud odebíraný ze zdroje a proud tekoucí žárovkami, přičemž proud odebíraný ze zdroje je roven součtu proudů tekoucích žárovkami (1. Kirchhoffův zákon).

Praktické poučky jsou samozřejmě důsledkem těchto kvantitativních obvodových vztahů. Navíc je zřejmé, že paralelní zapojení je duální k zapojení sériovému.

Postup

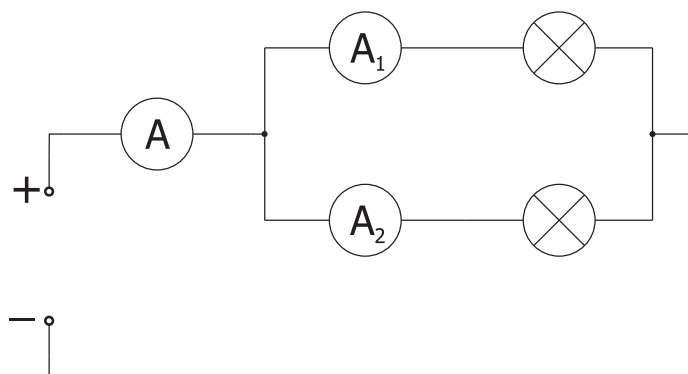
Paralelní zapojení je nutno provést pro žárovky na stejná napětí. Prakticky to znamená vyměnit jednu z původních u jiné skupiny. Poněvadž máme jen tři přístroje pro čtyři obvodové veličiny, musíme úplné měření v paralelním obvodu provést postupně, na dvakrát. V prvním zapojení podle obr. 16.3 měříme napětí zdroje a proudy v žárovkách. Je především nutné připojit svorky zdroje na uzly stolu. Voltmetr a žárovky s ampérmetry zapojíme podle schématu. Po zapnutí zdroje se při malém napětí, pod 1 V, a proudové ochraně 10 mA přesvědčíme, zda žárovkami prochází proud několik mA a na voltmetru je napětí zdroje. Je-li vše v pořádku, zvýšíme napětí na několik V a proudovou ochranu přepneme na 100 mA, případně 200 mA. Pak provedeme tato měření:

- Na zdroji nastavíme napětí 6 nebo 12 V, podle typu žárovek. Přesvědčíme se, zda žárovky svítí normálně, a odečteme proudy a napětí.



Obrázek 16.3: Paralelní spojení spotřebičů – měření napětí zdroje a proudů tekoucích spotřebiči

- Jednu žárovku povolíme. Posoudíme jas druhé, zjistíme proudy a napětí. Totéž uděláme pro druhou žárovku. Nevhodnější je odečíst proud svítící žárovky těsně před povolením druhé a vzápětí po jejím povolení.
- Poněvadž zdroj má proudovou ochranu, můžeme zkratovat jednu žárovku. Posoudíme jas žárovek, zjistíme napětí zdroje a proudy tekoucí žárovkami. **Pozor!** Před provedením zkratu musíme u ampérmetru ve větvi se zkratovanou žárovkou zvýšit rozsah, jinak jej můžeme poškodit. Totéž můžeme udělat pro druhou žárovku, případně pro obě.



Obrázek 16.4: Paralelní spojení spotřebičů – měření všech proudů

Ve druhém zapojení podle obr. 16.4 měříme všechny proudy. Opět vyvedeme svorky zdroje na uzly stolu, do jednoho z vodičů však vložíme ampérmetr měřící celkový proud. Žárovky s ampérmetry připojíme podle schématu. Po zapnutí zdroje se při malém napětí, pod 1 V, a proudové ochraně 10 mA přesvědčíme, zda žárovkami prochází proud několik mA. Je-li vše v pořádku, zvýšíme napětí na několik V a proudovou ochranu přepneme na 100 mA, případně 200 mA. Pak provedeme tato měření:

- Na zdroji nastavíme několik napětí až do 6 nebo 12 V, podle typu žárovek. Odečteme všechny proudy.
- Při napětí 6 nebo 12 V, podle typu žárovky, jednu žárovku povolíme. Posoudíme jas druhé a zjistíme všechny proudy. Totéž uděláme pro druhou žárovku.
- Poněvadž zdroj má proudovou ochranu, můžeme zkratovat jednu žárovku. Posoudíme jas žárovek a zjistíme všechny proudy. Totéž můžeme udělat pro druhou

žárovku, případně můžeme zkratovat obě. **Pozor!** Před provedením zkratu musíme zvýšit rozsah všech ampérmetrů, jinak je můžeme poškodit.

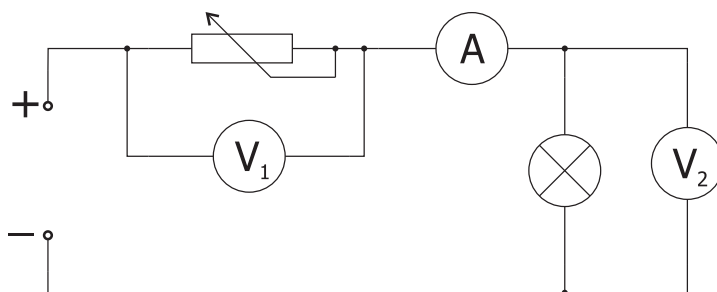
16.3.5 Regulace proudu

Úkol

Připravte obvod, který umožní měnit jas žárovky od plného svitu do zhasnutí. Zjistěte charakteristiku tohoto zapojení — souvislost mezi odporem na reostatu a proudem žárovkou. Typ žárovky určí vedoucí cvičení.

Princip regulace proudu, návrh obvodu

Regulaci proudu tekoucího žárovkou (jasu žárovky) lze provést posuvným odporem zapojeným jako reostat podle obr. 16.5. Odpor reostatu lze měnit od nuly do maximální (jmenovitě) hodnoty posuvem jezdce. Čím větší je odpor reostatu, tím větší je odpor v obvodu, tím menší proud teče obvodem a tedy i žárovkou, a tím slaběji žárovka svítí. Teoretickým úkolem je najít vhodný reostat. Žárovkou teče při jmenovitém napětí U_0



Obrázek 16.5: Regulace proudu – zapojení přístrojů

proud I_0 . Při napětí U_t žárovka nesvítí, teče jí však proud I_t . Přepokládáme, že žárovka je připojena ke zdroji napětí U_0 . Jaký celkový odpor R_0 má mít reostat?

Poněvadž žárovka je nelineární prvek, je řešení pouze přibližné. Maximální odpor R_0 musí zajistit úbytek napětí $U_0 - U_t$. Při maximálním odporu by žárovka neměla svítit, tj. měl by obvodem protékat proud I_t . Na odporu R_0 musí být při tomto proudu I_t úbytek napětí $U_0 - U_t$. Podle Ohmova zákona platí

$$U_0 - U_t = R_0 I_t \quad (16.1)$$

Pro srážecí odpor pak snadno vyjde vztah

$$R_0 = \frac{U_0 - U_t}{I_t} \quad (16.2)$$

Po dosažení hodnot naměřených v části *Měření proudu* zjistíme jmenovitou hodnotu posuvného odporu. Z nabídky 500Ω , 250Ω , 105Ω vezmeme přednostně posuvný odpor s nejbližší vyšší hodnotou, pokud takový není, tak s nejbližší nižší hodnotou.

Postup

Po výběru vhodného posuvného odporu realizujeme zapojení podle obr. 16.5. Poněvadž napětí zdroje je zhruba stálé, měříme voltmetrem V_1 napětí na reostatu a voltmetrem V_2 napětí na žárovce. K připojení voltmetru V_1 musíme použít vodičů s kabelovými očky, pokud se nerozhodneme pro použití uzlů na laboratorním stole. Jezdce nastavíme buď do prostřední polohy, což nevyžaduje přemýšlení, nebo do takové krajní polohy, aby na

reostatu byl největší odpor, tj. aby žárovka po připojení zdroje nesvítla. Zapneme zdroj, nastavíme na něm malé napětí a ověříme správnou funkci obvodu. Posouváním jezdce by se žárovka měla postupně rozsvěcet nebo zhasínat.

Z kvantitativního hlediska v tomto zapojení změříme souvislost mezi odporem na reostatu a proudem žárovkou. Pomocí jezdce nastavujeme na reostatu napětí 0, 1, 2, ... V. Měříme je voltmetrem V_1 . Odečítáme napětí a proud na žárovce. V důsledku velké citlivosti digitálních přístrojů se nedaří nastavit přesně vybrané hodnoty napětí na reostatu. Spokojíme se s tím, že je nastavíme přibližně, místo 2,00 V postačuje např. 2,04 V nebo 1,97 V.

16.3.6 Regulace napětí

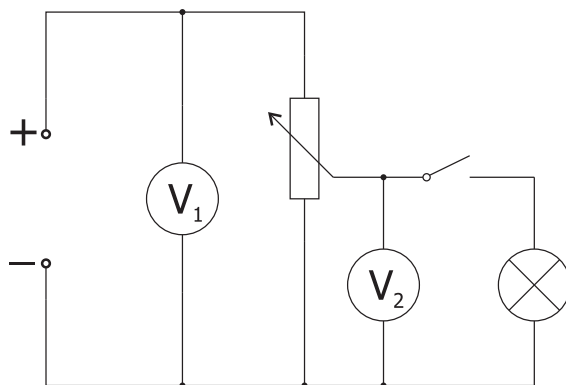
Úkol

Připravte obvod, který umožní regulovat napětí od nulové hodnoty až po napětí zdroje. Zjistěte vliv zátěže (žárovky) na výstupní napětí.

Princip regulace napětí

Regulaci napětí lze provést posuvným odporem zapojeným jako potenciometr podle obr. 16.6. Při vyvedení jezdce na výstup působí posuvný odpor jako dělič napětí, velikost odporů se však mění polohou jezdce. To umožní plynulou regulaci napětí od nulové hodnoty až po napětí zdroje.

Potenciometr je všeobecně považován za měkký zdroj napětí, odebíráme-li z výstupu vyšší proud, výstupní napětí klesá. Platí praktické pravidlo, že potenciometrem (mezi černými svorkami) by měl procházet desetkrát vyšší proud, než je maximální odebíraný proud. Pak lze výstupní napětí až do zvoleného odebíraného proudu považovat za konstantní.



Obrázek 16.6: Regulace napětí – zapojení přístrojů

Postup

Zapojení provedeme s tímtož posuvným odporem jako regulaci proudu. Černé svorky připojíme ke zdroji, červená svorka a jedna z černých pak představují výstup, na který připojíme voltmetr V_2 . Jedna z černých svorek je tedy společná pro vstup (zdroj) a výstup. Je-li jezdec u ní, je na výstupu nulové napětí, v opačné poloze je napětí na výstupu maximální. Před připojením zdroje nastavíme jezdec tak, aby výstupní napětí na potenciometru bylo nulové. Pak připojíme zdroj, nastavíme na něm malé napětí a ověříme, zda je voltmetr V_1 ukazuje. Pokud ano, je naděje, že zapojení je v pořádku. Nastavíme na zdroji napětí kolem 6 nebo 12 V podle typu žárovky, posouváme jezdce z výchozí polohy směrem k opačné a přesvědčíme se, že výstupní napětí na voltmetru V_2 stoupá.

Při sledování vlivu zátěže připojíme ke společnému uzlu, který by měl nyní již být jedním z uzlů stolu, jeden pól žárovky. Druhým pólem připojujeme žárovku k jezdcí přes vypínač. Vypínačem tedy volíme buď stav naprázdno nebo se zátěží. Na výstupu naprázdno nastavíme postupně napětí 0, 1, 2 až 12 V pro žárovku 12 V a poloviční hodnoty pro šestivoltovou žárovku. Pro každé napětí připojíme na výstup žárovku a zjistíme výstupní napětí se zátěží. Obě napětí zapíšeme do tabulky.

16.4 Zpracování výsledků měření

V této části jsou základní náměty na numerické a grafické zpracování naměřených hodnot. Pokyny jsou řazeny chronologicky podle provedených měření. Jsou jen rámcové, autoři se snaží ponechat prostor tvůrčí aktivitě studentů. Na druhé straně se řídí zásadou získat z naměřených dat maximum informací, které jsou v nich obsaženy.

16.4.1 Měření napětí

Z hodnot U_i naměřených třemi voltmetry pro totéž nastavené napětí určíme střední hodnotu \bar{U} , absolutní chybu (směrodatnou odchylku) ΔU a relativní chybu δU (variační koeficient) po řadě podle vztahů

$$\bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^N U_i}{N} \quad (16.3)$$

$$\Delta U = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (U_i - \bar{U})^2}{N - 1}} \quad (16.4)$$

$$\delta U = 100 \frac{\Delta U}{\bar{U}} \quad (16.5)$$

kde N je počet měření, v našem případě se jedná o malý počet $N = 3$.

Tyto hodnoty vypočteme pro každé napětí a graficky se pokusíme zjistit, zda směrodatná odchylka závisí na měřené hodnotě. Podobný graf připravíme i pro variační koeficient.

16.4.2 Měření proudu

Postupujeme stejně jako v předchozím případě. Z naměřených hodnot I_n , $n = 1, 2, 3$ určíme střední hodnotu \bar{I} , absolutní chybu (směrodatnou odchylku) ΔI a relativní chybu (variační koeficient) δI podle vztahů (16.3), (16.4) a (16.5). Napětí v nich nahradíme proudy. Obdobným způsobem připravíme i grafy.

16.4.3 Měření na sériovém zapojení

Především zjistíme odpory žárovek při nastavených napětích, zejména při jmenovitém napětí. Ověříme, zda součet napětí na žárovkách je roven napětí zdroje. Pokud je zde systematická, i když malá odchylka, porovnáme ji s chybou voltmetrů vypočtenou v předchozí části 16.4.1.

Zde překvapí, že při jedné zkratované žárovce je napětí zdroje trochu vyšší než napětí na druhé nezkratované žárovce, ačkoliv by tato napětí měla být stejná. To znamená, že někde v obvodu dochází k úbytku napětí.

V první řadě bychom se však měli přesvědčit, zda se nejedná o chybu přístrojů. Proto posoudíme odchylku napětí v tomto případě s chybami vypočtenými v části 16.4.1. Pokud

jsou srovnatelné, nebo je navíc korelace mezi oběma měřeními, jedná se o nepřesnost přístrojů. Korelací se rozumí to, že na těchže voltmetrech naměříme v obou případech přibližně stejnou odchylku stejného znaménka, např. jeden z nich má údaj stále o 0,03 V vyšší než druhý. Zjištění korelace však předpokládá velice pečlivé měření, kdy se zapisují i výrobní čísla voltmetrů.

Pokud lze nepřesnost přístrojů zanedbat, určíme dodatečný odpor v obvodu podle vztahu

$$R_k = \frac{\Delta U}{I} \quad (16.6)$$

kde ΔU je rozdíl napětí zdroje a napětí naměřeného na svítící žárovce a I je proud tekoucí obvodem. Zde vidíme výhodu dobře připravené přehledné tabulky.

16.4.4 Měření na paralelním zapojení

Především zjistíme odpory žárovek při nastavených napětích, zejména při jmenovitém napětí. Ověříme, zda součet proudů žárovkami je roven proudu odebíranému ze zdroje. Pokud je zde systematická, i když malá odchylka, porovnáme ji s chybou ampérmetrů vypočtenou v předchozí části 16.4.2.

Při měření ve zkratu v zapojení podle obrázku 16.4.2 možná překvapí, že na zdroji není nulové napětí. V obvodu tedy musí být určitý, i když malý, odpor. Jeho hodnotu odhadneme ze vztahu

$$R_A = \frac{U_k}{I_k} \quad (16.7)$$

kde U_k je napětí zdroje při zkratu a I_k je proud tekoucí ampérmetrem ve zkratované větvi. Při pečlivém měření získáme tři hodnoty R_A , pro jednu, druhou a obě zkratované žárovky.

16.4.5 Regulace proudu

Výsledky zpracujeme graficky. V prvním grafu volíme jako nezávisle proměnnou napětí na reostatu a jako závisle proměnnou použijeme jednak součet obou napětí, jednak napětí na žárovce. Ve druhém grafu vyneseme závislost proudu tekoucího žárovkou na napětí na ní.

16.4.6 Regulace napětí

Výsledky zpracujeme graficky. V grafu volíme jako nezávisle proměnnou napětí na výstupu potenciometru při nepřipojené žárovce a vynášíme toto napětí a napětí při připojené žárovce.

16.5 Diskuse

Poněvadž součástí diskuse je v mnoha případech i posouzení vlivu přesnosti měřících přístrojů, v tabulkové formě (Tabulka 16.1) uvádíme relativní chybu měření stejnosměrného napětí a proudu podle údajů výrobce.

Před čtením dalších řádek by se studenti měli pokusit odpovědět např. na tyto zdánlivě jednoduché otázky

1. Jsou měření těžé veličiny na třech přístrojích dostatečná ke spolehlivému určení jeho přesnosti?
2. Relativní chyba nezávisí na měřené hodnotě. Jak na ní závisí absolutní chyba? Jak je tomu v případě, že absolutní chyba se nemění?

Tabulka 16.1: Přesnost měření stejnosměrného napětí a proudu

| Měřená veličina | Rozsah | Chyba [%] |
|-----------------|---------------------------|-----------|
| Napětí | Všechna | 0,5 |
| Proud | 20 μA až 20 mA | 0,5 |
| | 200 mA a 2 A | 1,2 |
| | 20 A | 2 |

3. Výrobce udává relativní chybu měření stejnosměrného napětí 0,5 %. Experimentální relativní chyba vychází daleko nižší. Znamená to, že voltmetr je přesnější?
4. Relativní chyba měření proudu je vyšší. Je to náhoda nebo je k tomu nějaký důvod?
5. Jaká je příčina dodatečného odporu R_k při zkratování jedné žárovky v sériovém zapojení?
6. Jaká je věrohodnost naměřené hodnoty kontaktního odporu?
7. Jaký je význam odporu R_A při zkratu v paralelním zapojení?
8. Proč nelze dosáhnout nulového proudu pomocí reostatu?
9. Proč napětí na potenciometru při připojení žárovky poklesne?

Při měření téhož napětí třemi voltmetry je nutno si uvědomit, že počet přístrojů je malý pro spolehlivé určení chyby. Jedná se tedy o odhad chyby přístroje.

Nicméně je vhodné porovnat vypočtenou chybu s chybou udávanou výrobcem, který uvádí relativní chybu 0,5 %. Pokud zjištěná chyba vyjde daleko menší, neznamená to, že voltmetry měří přesněji. Znamená to pouze, že odchylka od správné hodnoty je u všech voltmetrů zhruba stejná. Ke spolehlivému posouzení přesnosti měření by se musel použít voltmetr s daleko vyšší přesností. Pokud jde o závislost chyby na měřené hodnotě, obvykle relativní chyba na ní téměř nezávisí, absolutní roste s růstem měřené hodnoty.

Pro přesnost měření proudu platí v podstatě totéž, relativní chyba je však v porovnání s přesností měření napětí vyšší. Proud se v digitálních přístrojích měří složitějším způsobem než napětí, převádí se na napětí průchodem malým odporem. Přesnost odporu má vliv na přesnost měření proudu.

Při zkratování jedné žárovky v sériovém zapojení nemá reálný zkrat nulový odpor. Při tom k nenulovému odporu málo přispívá vlastní odpor vodiče, jak by se na první pohled zdálo, ale téměř celý odpor představuje odpor kontaktů. Tento odpor má výraznou nahodilou (stochastickou) složku. Navíc se měří dosti nepřesně. Ve výrazu pro jeho výpočet totiž vystupuje rozdíl dvou blízkých hodnot napětí, který je zatížen velkou chybou. Proto se jedná spíše o odhad kontaktního odporu, měl by se uvádět jednou, vyjimečně dvěma platnými číslicemi. Pokud se jeho hodnota ve dvou referátech objeví stejná a se třemi či více platnými číslicemi, znamená to, že jedni autoři měření nerozumí a druzí od nich referát opsali. V obou případech se nebere v úvahu vliv nahodilé složky. Při opakování měření se nikdy nedostane tatáž hodnota.

Při zkratu žárovky v paralelním zapojení se kromě kontaktního odporu uplatní vnitřní odpor ampérmetru, který jej obvykle převyšuje. Jedná se opět spíše o odhad jeho hodnoty, poněvadž úbytek napětí na ampérmetru je malý. Navíc se uplatní další rušivé vlivy. Proto je vhodné změřit jej několika způsoby a zjistit střední hodnotu.

Při regulaci proudu reostatem je nutno si uvědomit, že nelze dosáhnout nulové hodnoty. Aby se jí dosáhlo, teoreticky by se odpor reostatu musel plynule měnit od nekonečné do nulové hodnoty. Přibližně to splňují logaritmické reostaty. Závislost pro napětí na žárovce je lineární, závislost pro proud žárovkou mírně nelineární, žárovka je nelineární prvek.

Potenciometr je měkký zdroj. Lze jej nahradit lineárním zdrojem, ideální zdroj má napětí na výstupu naprázdno a vnitřní odpor je tvořen paralelní kombinací dělicích odporů. Je tedy dosti velký, proto při připojení žárovky se na něm objeví úbytek napětí, o který se sníží výstupní svorkové napětí. Lze to též vysvětlit tak, že připojením žárovky se změní proudové poměry, takže již neplatí předpoklady pro výpočet výstupního napětí.

16.6 Závěr

V závěru uvedeme dosažené výsledky, např. potvrdíme, že přesnost přístrojů odpovídá údajům výrobce, odhadneme kontaktní odpor a vnitřní odpor ampérmetru. Posoudíme, s jakou přesností se podařilo ověřit platnost Kirchhoffových zákonů. Uvedeme, v jakých mezích se podařilo regulovat proud reostatem a jak se projeví připojení žárovky na výstupním napětí potenciometru. Posoudíme nelinearitu voltampérové charakteristiky žárovky. V případě, že nějaké měření nevyšlo dle předpokladu, pokusíme se to zdůvodnit. Též uvedeme příčiny, proč se případně některé měření nepodařilo realizovat.

17 Měření charakteristik

V teorii obvodů mluvíme zpravidla o těchto objektech:

- Obvodové veličiny, což je hlavně proud a napětí
- Obvodové parametry, což je např. odpor rezistoru, kapacita kondenzátoru, ale i impedance zvolené části obvodu při dané frekvenci, přenos pro zvolenou frekvenci, apod.

Jak obvodové veličiny, tak obvodové parametry, obvykle závisí na dalších veličinách, buď obvodových (napětí, proud, atd.) nebo jiných, takovou veličinou je velmi často frekvence. Závislost jedné veličiny na druhé nazýváme obecně charakteristikou, v některých případech mluvíme o obvodové funkci. Poněvadž nezávislých proměnných je velké množství, existuje i velmi mnoho charakteristik, některé jsou více, jiné méně důležité.

Mezi nejdůležitější počítáme následující charakteristiky:

- Voltampérové, což je závislost proudu tekoucího prvkem na napětí přiloženém k jeho svorkám. Jsou statickou definicí tohoto prvku a obvykle se o nich mluví u pasivních prvků.
- Zatěžovací, týkající se aktivních prvků, zdrojů. Zatěžovací charakteristika je závislost svorkového napětí zdroje napětí na odebíraném proudu. Pro málo užívaný zdroj proudu by to byla závislost odebíraného proudu na svorkovém napětí.

Teoreticky je jedno, kterou obvodovou veličinu, proud či napětí, volíme jako nezávisle proměnnou. Pak mezi voltampérovou a zatěžovací charakteristikou není rozdíl. Prakticky však používáme obvykle zdroje napětí, napětí je tedy budící veličinou a pak uvedené dělení má praktický význam. Volba nezávisle proměnné je také důležitá u speciálních nelineárních obvodů, těmi se však toto laboratorní cvičení nezabývá.

Charakteristika v zásadě podává úplnou, vyčerpávající informaci o prvku či obvodu. Odtud plyne důležitost jejího měření. Na druhé straně je práce s ní dosti komplikovaná, a proto v mnoha případech dáváme přednost jejímu úplnému či částečnému popisu jedním nebo několika údaji z ní odvozenými, tj. parametrům prvku.

Měření charakteristik je obvykle nutno specifikovat podrobněji. Charakteristiku lze měřit pro buzení (budící napětí)

- stejnosměrné – napětí na prvku se mění velmi pomalu,
- střídavé harmonické – na prvek se přivádí harmonické napětí se zvolenou frekvencí.

Rovněž tak charakteristiky mohou mít různé průběhy. Podle typu prvku mohou být charakteristiky

- lineární – v grafické formě je přímková,
- nelineární – křivka má obecný tvar.

Měření základních charakteristik pro oba typy prvků při obou způsobech buzení se budeme zabývat v tomto cvičení.

17.1 Cíl cvičení a jeho zabezpečení

V tomto laboratorním cvičení budou měřeny tyto dílčí úlohy:

- Nastavení předepsaného napětí na transformátoru s několika sekundárními vinutími.
- Voltampérová charakteristika nelineárního prvku (žárovky) buzeného ze zdroje střídavého napětí.
- Voltampérová charakteristika lineárního akumulárního prvku (kondenzátoru) buzeného ze zdroje střídavého napětí.
- Zatěžovací charakteristika zdroje střídavého harmonického napětí.
- Voltampérová charakteristika slabě nelineárního prvku (žárovky) buzeného ze zdroje stejnosměrného napětí.
- Voltampérová charakteristika silně nelineárního obvodu (protisměrně zapojených diod) buzeného ze zdroje stejnosměrného napětí.
- Voltampérová charakteristika nelineárního prvku s předřadným lineárním prvkem (např. protisměrně zapojené diody a rezistor) buzených ze zdroje stejnosměrného napětí.
- Voltampérová charakteristika lineárního prvku, který pracuje jako zdroj i spotřebič.
- Zatěžovací charakteristika zdroje stejnosměrného napětí.

K dispozici jsou tyto měřicí přístroje a přípravky:

- Pevné - laboratorní stůl s regulovatelným zdrojem stejnosměrného napětí.
- Přenosné
 - Univerzální multimetry

- Síťový transformátor se 4 sekundárními vinutími.
- Posuvný odpor – vhodný kus zvolí později podle zadání.
- Přípravky s měřenými prvky, samostatné a pomocné prvky:
 - Stejnoseměrný zdroj – baterie 9 V.
 - Spotřebiče – žárovka 6 V a 12 V.
 - Nelineární prvek – přípravek se dvěma protisměrně zapojenými LED (luminiscenční diody).
 - Srážecí odpor – hodnota 3 nebo 10 k Ω .
 - Svorčky k baterii.
 - Spojovací vodiče
 - Síťová šňůra.

17.2 Popis přístrojů a zařízení, zásady pro jejich užívání

Většina zařízení byla popsána v předchozím návodu, proto se omezíme jen na popis nových zařízení a prvků, kterými jsou

- Síťový transformátor se čtyřmi nezávislými sekundárními vinutími.
- Přípravek s měřenými prvky.
- Pomocné prvky.

17.2.1 Síťový transformátor se čtyřmi nezávislými sekundárními vinutími

Pro potřeby výuky byl vyroben síťový transformátorek s primárem 230 V a se sekundárem, který tvoří čtyři nezávislá vinutí 1 V, 3 V, 9 V a 27 V. Vhodnou kombinací sekundárních vinutí lze nastavovat na sekundáru napětí od 1 do 40 V s krokem 1 V. Z bezpečnostních důvodů je transformátor v průhledné krabici, takže ze štítku lze dále odečíst zdánlivý výkon 40 VA, což znamená 40 W na čistě odporové zátěži. Maximální proud každým sekundárním vinutím je 1 A. Primár je jištěn pojistkou¹⁸ T 200 mA. Není to uvedeno, ale transformátoru nevádí dlouhodobý zkrat sekundárního vinutí pro 1 a 3 V, zkrat dalších dvou sekundárních vinutí vede ke spálení pojistky, kterou je nutno vyměnit.

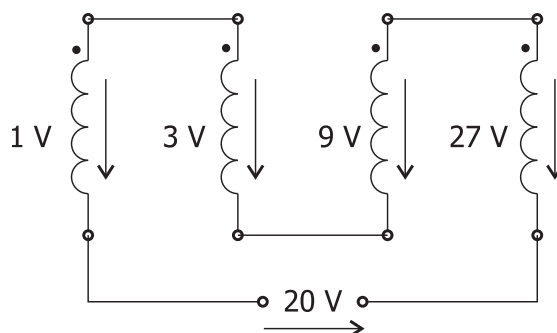
Do sítě se připojuje síťovou šňůrou ze zadní strany, kde je také vypínač a pojistkové pouzdro. Síť je připojena při zamáčknuté poloze 1. Na čelní straně jsou čtyři vývody sekundárních vinutí. Začátek vinutí je označen tečkou. Poněvadž jsou nestejná napětí, sekundární vinutí lze zapojovat jen do série.

Vinutí můžeme chápat jako čtyři nezávislé zdroje, a proto je můžeme zapojovat buď souhlasně nebo nesouhlasně. Souhlasné zapojení znamená, že připojíme konec jednoho vinutí na začátek druhého, nesouhlasné, že spojíme konce nebo počátky vinutí, viz obr. 17.1 a 17.2.

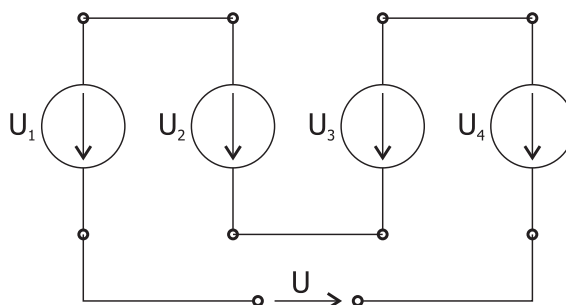
Na obr. 17.1 jsou spojeny počátky nebo konce sousedících vinutí. K vysvětlení slouží obr. 17.2, kde jsou vinutí obvodově nahrazena ideálními zdroji napětí, $U_1 = 1$ V, $U_2 = 3$ V, $U_3 = 9$ V a $U_4 = 27$ V. Nepoužíváme komplexní symboly, poněvadž lze

¹⁸Písmeno T znamená zpožděnou reakci, pojistku tedy nespálí případná proudová špička v okamžiku připojení k síti.

s vysokou přesností předpokládat, že všechna napětí mají stejnou fázi. Předpokládáme-li, že napětí směřuje od počátku vinutí k jeho konci, mají šipky pro zdroje na obr. 17.2 směr v souladu s touto dohodou. Podle druhého Kirchhoffova zákona, postupujeme-li



Obrázek 17.1: Příklad spojení sekundárních vinutí transformátorku – spojení konců nebo počátků sousedních vinutí



Obrázek 17.2: Spojení sekundárních vinutí transformátorku – náhrada pomocí zdrojů proti směru výstupního napětí U , platí

$$U = -U_1 + U_2 - U_3 + U_4 = 20 \text{ V} \quad (17.1)$$

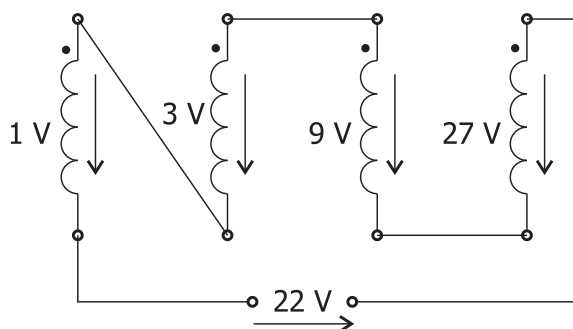
Pro tento případ zapojení lze ze sekundáru odebírat napětí 20 V. Poznamenejme ještě, že důležitá je jen absolutní hodnota výsledku. Záporná hodnota výsledku znamená opačnou fázi, tedy opačný směr šipky napětí vůči nakreslenému směru. Přístroje, které jsou k dispozici, se opačná fáze nedá zjistit.

Další možnosti zapojení vinutí jsou na obr. 17.3 a obr. 17.4. Na obr. 17.3 jsou vinutí 1, 2 a 4 zapojena souhlasně, vinutí 3 opačně, výsledné napětí je tedy 22 V. Na obr. 17.4 jsou vinutí 2, 3 a 4 zapojena souhlasně, vinutí 1 opačně, výsledné napětí je tedy 38 V.

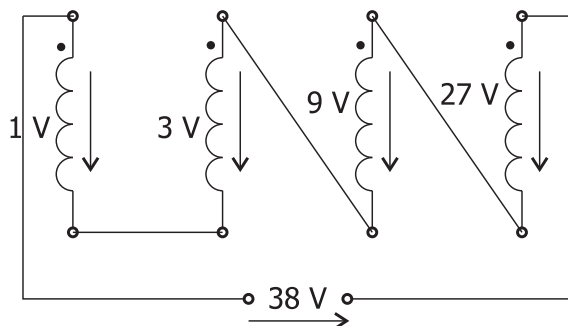
17.2.2 Pomocné prvky, součástky

V úloze jsou tyto nové aktivní, pasivní, nebo pomocné prvky:

- Novými aktivními prvky jsou chemické zdroje elektrické energie, baterie 9 V. Spolu s baterií jsou k dispozici speciální svorky zakončené banánky, které umožní její snadné připojení do obvodu.
- Novým nelineárním prvkem jsou dvě protisměrně zapojené LED diody se srážecím odporem, který umožní připojení ke zdroji o napětí až 20 V. Připojíme-li je ke stejnosměrnému zdroji, svítí jen jedna z nich podle polarity. Po připojení ke střídavému zdroji svítí obě. Ve skutečnosti blikají, ale to lidské oko nepostřehne. Chceme-li měřit jen charakteristiky diod, musíme předřadný odpor zkratovat. K tomu slouží kabel s banánkem a krokodýlem, v novější verzi přepínač na přípravku.



Obrázek 17.3: Spojení sekundárních vinutí transformátorku, případ spojení konců dvou sousedních vinutí, počátků dvou sousedních vinutí a spojení začátku a konce dvou sousedních vinutí



Obrázek 17.4: Spojení sekundárních vinutí transformátorku, případ několika spojení konce jednoho a začátku druhého vinutí, dále spojení počátků dvou sousedních vinutí

- Lineárním akumulacním prvkem je svitkový kondenzátor. V přípravku je buď jeden nebo dva kondenzátory zapojené paralelně.
- V obvodu se dvěma zdroji, z nichž každý pracuje buď jako zdroj nebo spotřebič, je nutný oddělovací odpor alespoň $3\text{ k}\Omega$. Oddělovací odpor je v různém provedení: sada odporů, potenciometr, dělič napětí.

17.3 Měření

Absolvováním první úlohy se studenti naučí nastavovat napětí na transformátorku. Těchto znalostí použijí k proměření tří typických charakteristik v oblasti harmonických střídavých proudů: měření voltampérové charakteristiky disipativního prvku (žárovky), voltampérové charakteristiky akumulativního prvku (kondenzátoru) a zatěžovací charakteristiky střídavého zdroje, transformátorku. Dále následuje obdobné měření v obvodu stejnosměrného proudu, měření voltampérové charakteristiky několika nelineárních prvků (žárovka, luminiscenční dioda), ukázka linearizace prvku sériovým lineárním odporem, voltampérová charakteristika aktivního prvku v obvodu s jiným aktivním prvkem a konečně zatěžovací charakteristika stabilizovaného stejnosměrného zdroje.

V popisu měření je naznačen postup, který autoři považují za bezpečnou cestu vedoucí k úplnému splnění zadání. Nicméně studenti mohou volit odlišný postup, který považují za optimální. S výjimkou první úlohy by studenti měli pracovat vlastním tempem, logické pořadí úloh určí vedoucí cvičení.

17.3.1 Nastavení a měření napětí na sekundáru transformátoru

Úkol:

Změřit skutečná napětí na jednotlivých sekundárních vinutích, nastavit a ověřit předepsané napětí, které určí vedoucí cvičení.

Doporučený postup:

Transformátor je prvek využívající induktivní vazby mezi dvěma vinutími. Z teorie je známo, že podle vzájemného zapojení vinutí při jejich současném buzení zdroji proudu se magnetické toky buď sčítají nebo odečítají. To lze demonstrovat velmi těžko. Avšak u transformátoru s nezávislými sekundárními vinutími lze vinutí zapojit souhlasně nebo opačně. Při souhlasném zapojení je magnetický tok vytvářený primárním vinutím v obou sekundárních vinutích souhlasný, cívkové toky se sčítají a indukované napětí je jejich součtem. Při nesouhlasném zapojení je magnetický tok v sekundárních vinutích opačný, cívkové toky se odečítají a indukované napětí je jejich rozdílem. V předchozí části jsme pro jednoduchost sekundárním vinutím přiřadili přímo zdroje napětí, fyzikální vysvětlení je však toto.

Transformátor připojíme do sítě síťovou šňůrou a zapneme vypínačem blízko síťové zásuvky. Multimetrem změříme skutečná napětí na všech dvojicích svorek. Multimetr musí být v režimu ACV a je nutno nastavit optimální rozsah. Měříme napětí naprázdno, která jsou trochu vyšší než napětí jmenovitá. Důvod zjistíme později.

Předepsané napětí na sekundáru vyjádříme jako kombinaci jmenovitých a ne skutečných napětí naprázdno. Některá napětí mohou mít znaménko minus a některá mohou chybět. Způsob spojení svorek lze provést několika způsoby:

- Metodou pokusů a omylů. Připojíme vinutí s nejvyšším napětím, na pořadí svorek nezáleží. Pak připojíme další vinutí s vhodným nižším napětím a změříme výsledné napětí. Svorky zaměníme a opět změříme napětí. Zvolíme to pořadí svorek, jehož celkové napětí je bližší předepsanému. Tentýž postup opakujeme pro další vinutí.
- Systematicky - obvodově. Nakreslíme jednotlivé zdroje a podle znamének napětí je propojíme, jak to je např. na obr. 17.2. Pak podle obrázku pospojujeme svorky vinutí, viz např. obr. 17.1.
- Algoritmicky. Ponecháváme na aktivitě studentů.

Změříme výsledné napětí a porovnáme s předepsanou hodnotou. Jedná se o napětí naprázdno a pro vysoké hodnoty by mohlo být až o tři volty vyšší než předepsané. Pro kontrolu zjistíme kombinaci skutečných napětí jednotlivých vinutí, tj. skutečná změřená napětí na použitých vinutích sečteme, případně odečteme, pokud je vinutí připojeno opačně. Pokud se tento výsledek liší od měřeného maximálně o 1 V, je zapojení vinutí v pořádku.

Upozornění: Při tomto, ale i dalších měřeních s transformátorkem, se může nepozorností studentů stát, že zkratují sekundární vinutí. Pokud se jedná o vinutí pro 9 či 27 V, dojde ke spálení pojistky. To se pozná tak, že na žádném sekundárním vinutí naprázdno není napětí. Pojistka je v pouzdru umístěném mezi síťovou zásuvkou a vypínačem na zadní straně přípravku. Při její výměně se postupuje takto:

1. Vytáhnout síťovou šňůru ze zdroje i přípravku.
2. Plochým šroubovákem podebrat a nadzvednout pojistkové pouzdro.
3. Pouzdro vytáhnout, vyjmout pojistku a multimetrem se přesvědčit, zda má skutečně nekonečný odpor.

4. Pokud je spálená, vložit novou pojistku, pouzdro zasunout a připojit síťovou šňůru.

Při průměrné zručnosti trvá výměna pojistky méně než minutu. Nicméně pojistka je poměrně drahá. Proto by studenti měli spálenou pojistku (pojistky) nahradit, případně si pro jistotu přinést vlastní pojistky T 200 mA.

17.3.2 Voltampérová charakteristika nelineárního prvku (žárovky) buzeného ze zdroje střídavého napětí

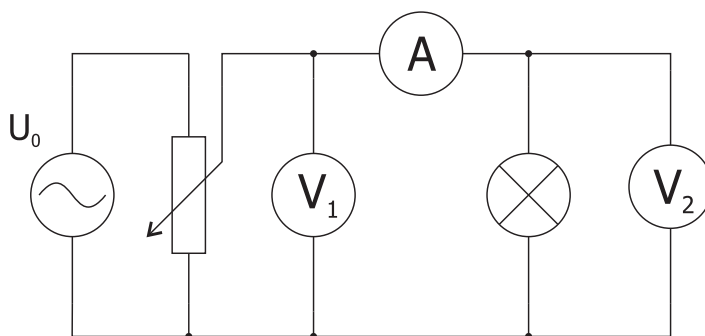
Úkol:

Zjistěte voltampérovou (VA) charakteristiku žárovky, kterou protéká střídavý proud.

Doporučený postup:

Žárovka je velmi jednoduchý nelineární prvek, nicméně obsahuje všechny typické vlastnosti nelineárních prvků, proto se jí zde zabýváme.

V této úloze se jako zdroj napětí používá transformátorek. Při měření VA charakteristiky je nutno měnit napětí. V zásadě bychom mohli nastavovat napětí po 1 V na sekundáru, bylo by to však pomalé. Proto je výhodnější použít potenciometru v zapojení podle obr. 17.5. Napětí zdroje by mělo být dvojnásobkem napětí žárovky. Potenciometr volíme tak, aby jím tekla co nejvyšší proud. Pro žárovku 6 V volíme 105 Ω nebo 250 Ω , pro 12 V žárovku 500 Ω .



Obrázek 17.5: Měření VA charakteristiky žárovky protékané střídavým proudem

Obvod zapojíme podle schématu, jezdec potenciometru nastavíme tak, aby výstupní napětí bylo nulové a zapneme zdroj. Volíme dostatečný počet bodů, u žárovky 6 V měníme napětí zhruba po 0,5 V, u 12 V žárovky po 1 V. Můžeme zvyšovat napětí až do jeden a půl násobku jmenovitého napětí, při zvýšeném napětí však měříme rychle – i když žárovka zvýšené napětí snese, dlouhodobě ji však může poškodit. Odečítáme napětí před ampérmetrem a za ním, správná je hodnota napětí měřená na prvku, tedy za ampérmetrem směrem od zdroje. Rozdíl napětí nám však umožní odhadnout úbytek napětí na ampérmetru na střídavém rozsahu. Naměřené hodnoty obou napětí a (jednoho) proudu zapisujeme do vhodné tabulky.

17.3.3 Voltampérová charakteristika lineárního akumulárního prvku (kondenzátoru) buzeného ze zdroje střídavého napětí

Úkol:

Změřte voltampérovou charakteristiku kondenzátoru při buzení střídavým napětím.

Doporučený postup:

U akumulčního prvku, kondenzátoru, je statickou charakteristikou voltcoulombová charakteristika. Ta se měří velice obtížně, proto zde provedeme jednodušší měření dynamické voltampérové charakteristiky při buzení harmonickým napětím. Poznamenejme, že integrací proudu lze získat voltcoulombovou charakteristiku. Z voltampérové charakteristiky (v lineárním případě) lze však odvodit stejné informace.

Akumulační prvky, cívku a kondenzátor, nemůžeme měřit v obvodu stejnosměrného proudu. V ideálním případě cívka představuje zkrat a kondenzátor rozpojený obvod. V obvodu harmonického proudu mají konečný nenulový odpor a z voltampérové charakteristiky lze zjistit kapacitu či indukčnost, ovšem s poměrně velkou chybou.

Postupujeme stejně jako u žárovky. Kondenzátor však snese vysoké napětí, proto na sekundáru transformátoru nastavíme maximum 40 V. Musíme se však přesvědčit, zda nepřetížíme potenciometr. Podíváme se na štítek a zjistíme maximální proud. Ten zjistíme tak, že zvolené napětí (40 V) dělíme celkovým odporem uvedeným na štítku. Při připojení kondenzátoru se tento proud může zvýšit až o 20 procent. Pokud by byl potenciometr přetížen, musíme zvolit nižší napětí. Zjistíme je tak, že maximální proud reostatem násobíme jeho odporem. Obě hodnoty odečteme ze štítku.

Před měřením v předchozím schématu na obr. 17.5 vyměníme žárovku za kondenzátor. Při měření nastavujeme napětí s krokem asi 2 V a postupujeme tak jako dříve.

17.3.4 Zatěžovací charakteristika zdroje střídavého harmonického napětí**Úkol:**

Změřte zatěžovací charakteristiku transformátorku pro zadané napětí. Jedno nebo více napětí (vinutí) určí vedoucí cvičení.

Doporučený postup:

Zdroj napětí je plně popsán zatěžovací charakteristikou. Ta umožní zjistit, do jakého odebíraného proudu jej můžeme považovat za ideální, či v jakém rozsahu jej lze nahradit lineárním modelem. V případě náhrady lineárním zdrojem lze z lineární části charakteristiky zjistit jeho parametry.

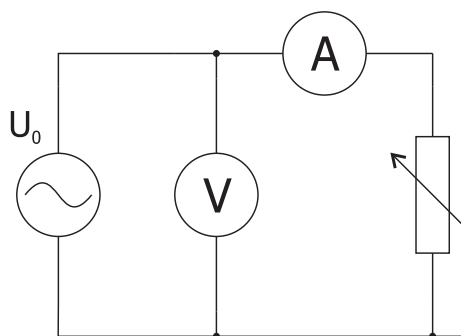
Použijeme zapojení podle obr. 17.6. Poněvadž vinutí je dimenzováno na 1 A, nejmenší zatěžovací proud by měl být menší než 0,1 A, maximálně 1 A. Reostat (posuvný odpor) volíme tak, aby minimální proud byl nejvýše 0,1 A, tedy velký celkový odpor. Maximální proud reostatem by měl být 1 A, což naopak požaduje malou hodnotu celkového odporu. Mezi těmito dvěma požadavky je nuto najít kompromis. Minimální proud by měl být blízký hodnotě 0,1 A a přípustný proud blízký 1 A.

Nejprve změříme napětí naprázdno, bez připojeného reostatu. Pak připojíme reostat nastavený na maximální odpor, změříme napětí a proud. Proud postupně zvyšujeme a odečítáme napětí. Když dosáhneme maximální hodnoty proudu uvedené na štítku reostatu, ukončíme měření a vrátíme se na minimální proud. Naměřené hodnoty napětí a proudu zapisujeme do vhodné tabulky.

Upozornění: Překročením maximální hodnoty proudu můžeme reostat spálit!

17.3.5 Voltampérová charakteristika nelineárního prvku (žárovky) buzeného ze zdroje stejnosměrného napětí**Úkol:**

Změřte voltampérovou charakteristiku žárovky při buzení stejnosměrným napětím.

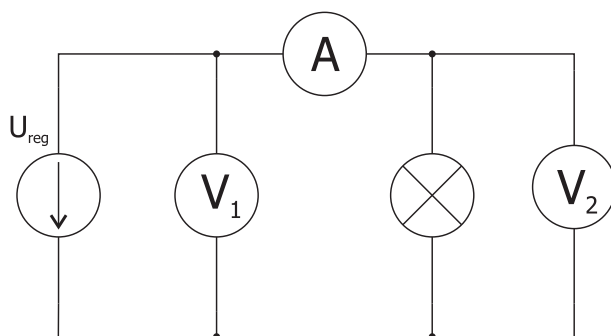


Obrázek 17.6: Měření zatěžovací charakteristiky zdroje střídavého napětí

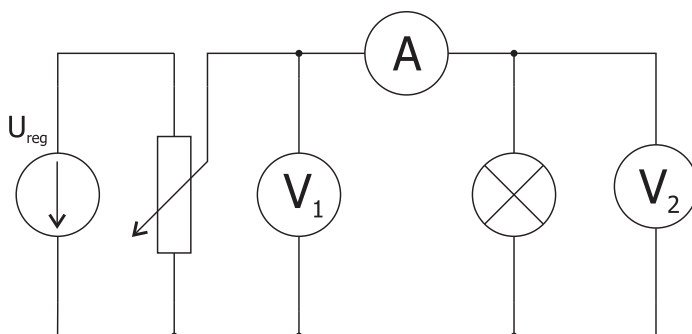
Doporučený postup:

I přes to, že žárovka je považována ze velmi jednoduchý nelineární prvek, v principu její vlákno má tepelnou setrvačnost, proto teoreticky její voltampérová charakteristika by se při stejnosměrném buzení měla lišit od charakteristiky zjištěné při dynamickém buzení, kterou jsme měřili dříve. Na cvičení by se mělo ověřit, zda tento rozdíl je měřitelný.

Schéma zapojení je na obr. 17.7. Zdrojem proměnného napětí je panelový stejnosměrný zdroj, regulaci napětí lze provádět přímo na tomto zdroji. Toto zapojení má tu nevýhodu, že nízká napětí, pod 2 V, se na zdroji obtížně nastavují a nejsou stabilní. V tomto případě je vhodnější použít schéma podle obr. 17.8.



Obrázek 17.7: Principiální schéma zapojení pro měření voltampérové charakteristiky žárovky, kterou protéká stejnosměrný proud



Obrázek 17.8: Obvod pro měření voltampérové charakteristiky žárovky, kterou protéká stejnosměrný proud, jemnější regulace

Obvod zapojíme podle schématu na obr. 17.8., dáme tedy přednost jemnější regulaci pro malá napětí (voltampérová charakteristika žárovky je pro malá napětí nejzajímavější). Jezdec potenciometru nastavíme tak, aby výstupní napětí bylo nulové, zapneme

panelový zdroj a nastavíme na něm napětí 2 až 3 V. Pak napětí na žárovce posuvem jezdce postupně zvyšujeme. Dosáhneme-li horní polohy, můžeme již zvyšovat napětí zdroje, nicméně i v tomto případě můžeme potenciometru použít k jemnějším dostavení. Můžeme též potenciometr odpojit, a tím přejít na měření podle schématu na obr. 17.7.

Při měření volíme dostatečný počet bodů, u žárovky 6 V měníme napětí zhruba po 0,5 V, u 12 V žárovky po 1 V. Blízko nuly můžeme volit i jemnější krok, zde je nelinearita nejvyšší. Můžeme překročit jmenovité napětí o více než 50 %, při zvýšeném napětí však měříme rychle (žárovka zvýšené napětí snese, ale není to pro ni optimální). Podobně jako u harmonického buzení odečítáme napětí před ampérmetrem a za ním, správná je hodnota napětí měřená na prvku, žárovce, tedy za ampérmetrem směrem od zdroje. Rozdíl napětí nám však umožní odhadnout úbytek napětí na ampérmetru na stejnosměrném rozsahu. Naměřené hodnoty obou napětí a (jednoho) proudu zapisujeme do vhodné tabulky.

17.3.6 Voltampérová charakteristika nelineárního obvodu (protisměrně zapojených diod) buzeného ze zdroje stejnosměrného napětí

Úkol:

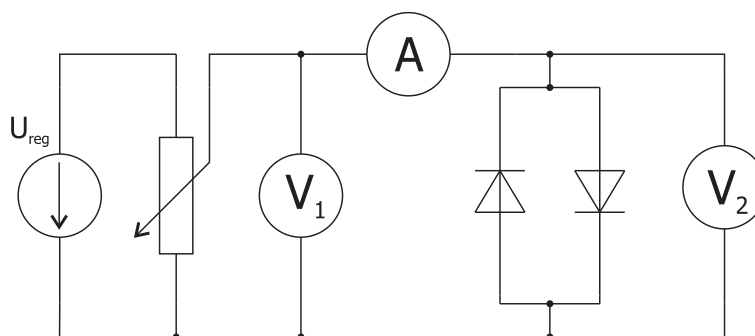
Změřte voltampérovou charakteristiku dvojice protisměrně zapojených luminiscenčních diod (LED) při buzení stejnosměrným napětím.

Doporučený postup:

Dioda je příkladem silně nelineárního prvku. V našem případě měříme voltampérovou charakteristiku dvojice protisměrně zapojených luminiscenčních diod, obr. 17.9. Podle polarity napětí je aktivní buď jedna nebo druhá dioda. Měříme tedy tuto charakteristiku pro kladná i záporná napětí na prvku.

V přípravku je před obě diody připojen srážecí odpor, který umožní jejich připojení až na 20 V střídavých. Abychom mohli měřit charakteristiky samostatných diod, je nutné jej zkratovat. K tomu slouží vodič s banánkem a krokodýlem. Krokodýl připojíme přímo k té straně odporu, která je ve styku s diodami, banánek do svorky z druhé strany odporu. Novější verze má na přípravku vypínač, který umožní zkratovat srážecí odpor.

Schéma zapojení je na obr. 17.9. Poněvadž maximální napětí na diodě není větší než asi 2,5 V, je nutno použít k jemnější regulaci napětí na potenciometru. Před měřením nastavíme jezdec potenciometru tak, aby jeho výstupní napětí bylo nulové. Pak zapneme stejnosměrný panelový zdroj a na něm nastavíme napětí asi 3 V. Nutno též dbát na to, že **maximální proud diodou nesmí překročit 25 mA**.



Obrázek 17.9: Měření VA charakteristiky dvojice protisměrně zapojených luminiscenčních diod

Dioda je silně nelineární prvek. Proto doporučujeme tento postup:

- Nejprve proměříme její charakteristiku hrubě, tj. napětí měníme s krokem 0,3 V.
- Při napětí nad 1,5 V je však nutno zvyšovat napětí opatrně, proud začne najednou prudce vzrůstat. Jakmile se blíží k 25 mA, považujeme to za poslední bod měření.
- Méně zkušeným studentům se proto doporučuje použít omezovače na 10 mA a neměřit dále.
- Ve druhé fázi měření se pak nastaví napětí odpovídající proudu o hodnotě desetiny mA, které se zvyšuje s krokem 0,1 V nebo lépe 0,05 V.
- Pak stejným způsobem proměříme charakteristiku druhé diody. Jednoduše zaměníme vodiče na svorkách panelového zdroje. Všechny digitální měřicí přístroje nyní ukazují záporné hodnoty, což je v pořádku.

Údaje přístroje zapisujeme do vhodné tabulky. Zapišeme si též hodnotu napětí a proudu, při kterém dioda začíná svítit.

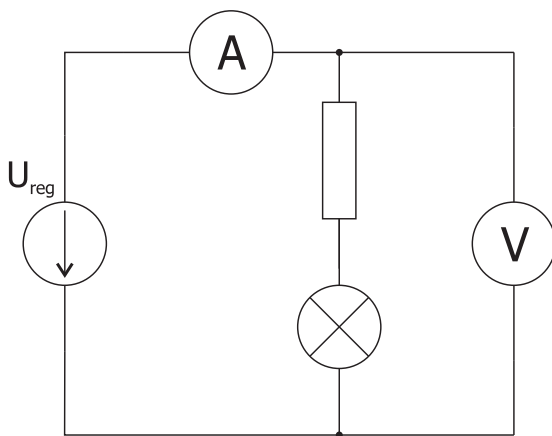
17.3.7 Voltampérová charakteristika nelineárního prvku s předřadným lineárním prvkem

Úkol:

Změřte voltampérovou charakteristiku dvojice protisměrně zapojených luminiscenčních diod (LED) se srážecím odporem při buzení stejnosměrným napětím. Totéž proveďte pro kombinaci žárovka, posuvný odpor.

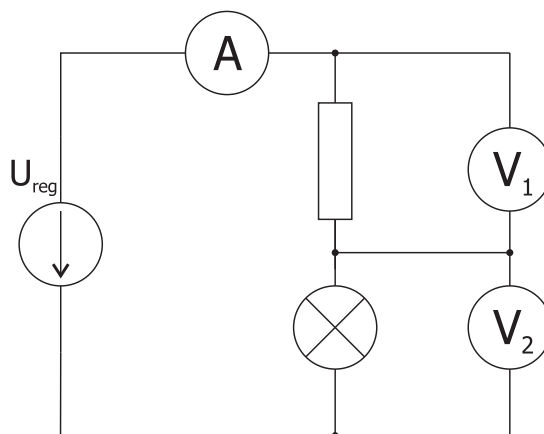
Doporučený postup:

Nelineární vlastnosti prvku jsou někdy na závadu, a proto se používají obvody, které tuto nelinearitu snižují. Nejjednodušší řešení je zapojit do série s nelineárním prvkem lineární rezistor. Příkladem takového zapojení je přípravek s diodami. Zde se přímo v obvodu nachází sériový lineární rezistor, i když jeho původní význam je jiný, sražení napětí. V případě žárovky je nutno k ní do série zapojit posuvný odpor, jak je tomu na obr. 17.10.



Obrázek 17.10: Měření VA charakteristiky linearizovaného prvku

Voltampérová charakteristika se měří standardním způsobem, podle obr. 17.10, který představuje zapojení se žárovkou. V případě diod je nutno kombinaci žárovka-odpor



Obrázek 17.11: Měření VA charakteristiky linearizovaného prvku, zjištění více informací

nahradit přípravkem s diodami. V tomto případě je na přípravku mezi svorkami již kombinace diod a odporu. Pokud chceme více informací, použijeme obvod z obr. 17.11. U starší verze přípravku s diodami je však v tomto případě nutno vyvést vnitřní uzel ven z přípravku pomocí vodiče s banánkem a krokodýlem. Novější verze přípravku má však již tento uzel vyveden na zdičku či svorku.

Díky srážecímu odporu je nyní rozsah změn napětí zejména u diod daleko větší. Opět se však musí hlídat, aby diodou neprotékal proud větší než 25 mA a u žárovky proud větší než asi 60 mA. Lze říci, že napětí se nyní může měnit až do 25 V, krok je 1 nebo 2 V. Při nízkých hodnotách by však krok měl být jemnější, nelinearita je tam nejvyšší a nejlépe měřitelná. V základním zapojení podle obr. 17.10 měříme celkové napětí na kombinaci a proud jí tekoucí. Přístroje je možné použít i na zapojení podle obr. 17.11. To umožní kromě proudu měřit napětí na obou prvcích, proto mu dáme přednost.

17.3.8 Voltampérová charakteristika aktivního prvku, který pracuje jako zdroj i spotřebič

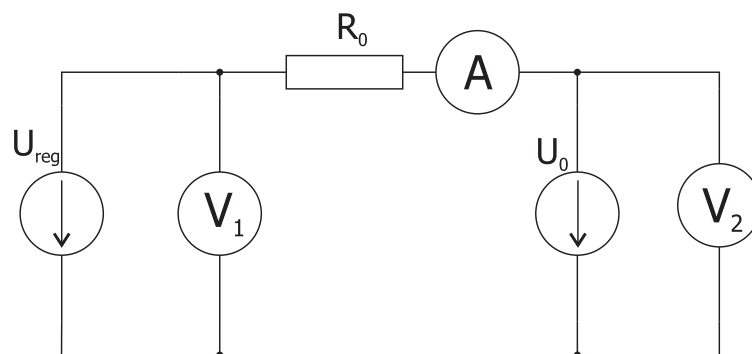
Úkol:

Změřte voltampérovou charakteristiku řízeného aktivního dvojpólu, k němuž je připojen jiný dvojpól tvořený sériovou kombinací pevného zdroje stejnosměrného napětí a odporu.

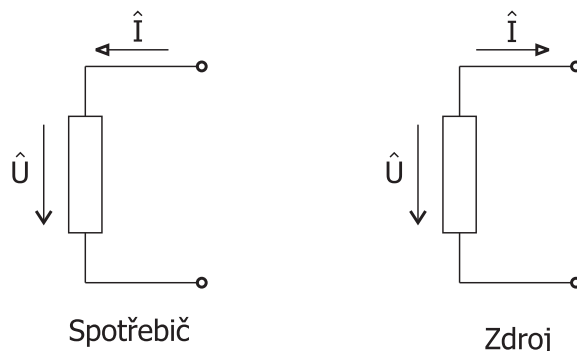
Doporučený postup:

Příkladem takového prvku obvodu může být solární článek, který nabíjí akumulátor. Za světla je napětí solárního článku vyšší než napětí akumulátoru, proud teče z článku do akumulátoru, článek je zdrojem, akumulátor spotřebičem. Za tmy je tomu naopak. Napětí na článku je téměř nulové, napětí na akumulátoru je vyšší, proud teče z akumulátoru do článku, akumulátor je zdrojem, článek spotřebičem. Je zřejmé, že tento případ je vykládán poněkud zjednodušeně. Především se dá vybíjení akumulátoru zabránit např. seriově zapojenou diodou. Dále je nutno uvažovat vnitřní odpory obou prvků, případně vnější odpor mezi nimi. Prakticky většina zdrojů tento systém zapojení nepřipouští. Nicméně základní rysy jsou zřejmé. Především v obvodu se dvěma a více zdroji již nelze předem říci, kterým směrem proud poteče.

Zapojení se dvěma zdroji je na obr. 17.12, vysvětlení zdrojové a spotřebičové orientace je na obr. 17.13. Proměnným zdrojem je panelový zdroj s napětím U_{reg} , které měříme voltmetrem V_1 . Pevným zdrojem je baterie 9 V s napětím U_0 , které udává voltmetr V_2 . Aby se zdroje navzájem neničily, je mezi nimi odpor R_0 , alespoň 3 k Ω . Proud se měří ampérmetrem A.



Obrázek 17.12: Měření VA charakteristiky prvku, který může být zdrojem i spotřebičem



Obrázek 17.13: Zdrojová a spotřebičová orientace

Ochranný odpor R_0 je v různém provedení, jednou jako vyšší odpor na odporovém děliči, třikrát jako jeden z odporů sady, zbytek jsou potenciometry používané v elektronických zařízeních. Pokud si nejsme jisti hodnotou odporu, zjistíme ji multimetrem zapojeným pro měření odporů. Baterii připojíme do obvodu pomocí speciálních svorek přivedených na banánky.

Při měření je důležité zapojení ampérmetru na obr. 17.12. Zapojíme jej tak, aby prvek U_{reg} byl zdrojem, tj. zdířka A ampérmetru je co nejbližší kladnému pólu panelového zdroje a zdířka COM co nejdále, tj. co nejbližší zápornému pólu. Pak na ampérmetru je kladný údaj, pokud proud teče kladnou svorkou z panelového zdroje, viz též obr. 17.13.

Při měření postupujeme takto:

1. Na panelovém zdroji nastavíme nulové napětí. Proud ampérmetrem je záporný, též ručička analogového ampérmetru na panelovém zdroji se vychýlila ze stupnice ven. Všechna napětí jsou však kladná. Z panelového zdroje se stal spotřebič, baterie je zdrojem. V případě solárního článku to odpovídá tmě.
2. Postupně zvyšujeme napětí panelového zdroje, např. po 1 V. Proud klesá, je však stále záporný. Nulové hodnoty nabyde v případě, že se napětí obou zdrojů rovnají.
3. Při dalším zvyšování napětí panelového zdroje se proud stává kladným. Z panelového zdroje se stal skutečný zdroj napětí, baterie je spotřebičem. U solárního článku to odpovídá stavu s osvětlením.
4. Kromě proudu měříme napětí na obou voltmetrech. Jejich rozdíl udává napětí na srazecím odporu. Úbytek napětí na ampérmetru lze v tomto případě zanedbat.

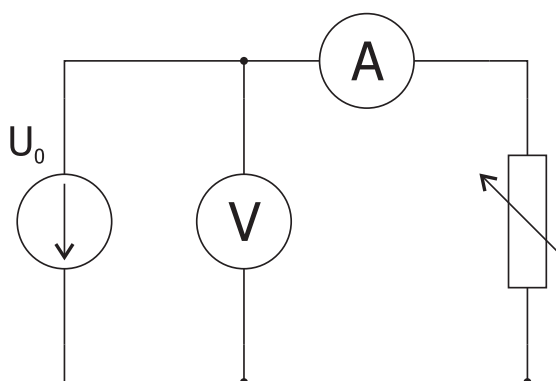
17.3.9 Zatěžovací charakteristika zdroje stejnosměrného napětí

Úkol:

Změřte zatěžovací charakteristiku panelového zdroje napětí s nastaveným proudovým omezovačem, který nastavíte maximálně na 1 A. Změřte zatěžovací charakteristiku 9 V baterie.

Doporučený postup:

Zdroj napětí je plně popsán zatěžovací charakteristikou. Ta umožní zjistit do jakého odebíraného proudu jej můžeme považovat za lineární, či v jakém rozsahu jej lze nahradit lineárním modelem. V případě náhrady lineárním zdrojem lze z lineární části charakteristiky zjistit jeho parametry. Použijeme zapojení podle obr. 17.14. Reostat (posuvný



Obrázek 17.14: Zatěžovací charakteristika zdroje stejnosměrného napětí

odpor) volíme tak, aby snesl maximální proud. Čím vyšší bude jeho jmenovitý odpor, tím nižší proud bude možno měřit. Pokud reostat nesnese maximální proud dodávaný zdrojem, je nutno měření ukončit při dosažení úplného zatížení reostatu. Pokud měříme zatěžovací charakteristiku 9 V baterie, je nutno použít otočného potenciometru nebo sady odporů.

Při měření postupujeme takto:

1. Nejprve změříme napětí naprázdno, bez připojeného reostatu.
2. Pak připojíme reostat nastavený na maximální odpor, změříme napětí a proud. Proud postupně zvyšujeme a odečítáme napětí.
3. Když dosáhneme maximální hodnoty proudu uvedené na štítku reostatu, ukončíme měření. Po zápisu této hodnoty nastavíme podstatně nižší hodnotu proudu. Překročením maximální hodnoty proudu můžeme reostat spálit!
4. Pokud to reostat dovolí, měříme až do okamžiku zkratu. Jinak reostat odpojíme a měříme zkratový proud přímo.

17.4 Zpracování výsledků měření

Výsledky v této části jsou převážně grafické povahy. Naměřená data dávají dostatek prostoru pro kreslení různých typů grafů, proto jsou tyto pokyny pouze rámcové a ponechávají na studentech možnost připravit další grafy. Podle zásady získat z naměřených dat všechny informace, které jsou v nich obsaženy, však pouhé nakreslení grafu nepostačuje, je nutno jej též vyhodnotit.

1. Transformátorek

V tomto případě můžeme pouze porovnat součet dílčích změřených napětí (se správným znaménkem podle zapojení vinutí) s celkovým změřeným napětím. Dále lze provést totéž pro nominální hodnoty a pro odchylky.

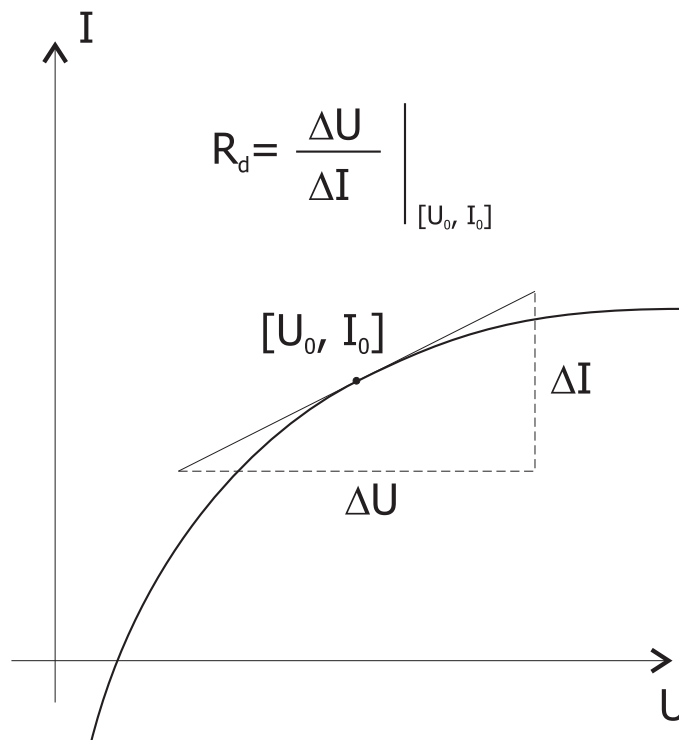
2. Voltampérová charakteristika žárovky napájené střídavým napětím

Především nakreslíme voltampérovou charakteristiku žárovky, tj. závislost proudu na napětí. Dále vypočteme úbytek napětí na ampérmetru a vyneseme jej graficky v závislosti na přiloženém napětí.

Na každém nelineárním prvku definujeme pracovní bod $[U_0, I_0]$ a pro něj určíme celkový odpor R_c a diferenciální odpor R_d pomocí vztahů

$$R_c = \frac{U_0}{I_0} \quad R_d = \left(\frac{dU}{dI} \right)_{[U_0, I_0]} \quad (17.2)$$

Poněvadž závislost $I = f(U)$ neznáme v analytickém tvaru, je nutno k zadanému napětí U_0 klidového pracovního bodu určit proud I_0 graficky. Celkový odpor lze vypočítat. Diferenciální odpor je převrácenou hodnotou směrnice tečny k charakteristice v pracovním bodě a zjišťuje se grafickou derivací, která je schématicky na obr. 17.15.



Obrázek 17.15: Grafická derivace

Mezi směnicí k tečny v pracovním bodě, diferenciální vodivostí G_d a diferenciálním odporem R_d platí tento vztah

$$k = G_d = \frac{\Delta I}{\Delta U} = G_d = \frac{1}{R_d} \quad \rightarrow \quad R_d = \frac{\Delta U}{\Delta I} \quad (17.3)$$

Graficky určíme diferenciální odpor, vodivost nebo směnicí tečny tak, že nakreslenou část tečny doplníme na pravoúhlý trojúhelník přidáním odvěsen ΔU a ΔI ,

kteřé jsou rovnoběžné s osami grafu. Čím větší trojúhelník nakreslíme, tím je další výpočet přesnější. Směrnici a diferenciální odpor pak určíme podle vztahu (17.3).

Za ΔU a ΔI musíme dosadit ve správných jednotkách. V žádném případě se nedosazují délky odvěsen měřené v mm. Pokud je již změříme v mm, je nutno je vynásobit moduly stupnic. Moduly stupnic udávají, jaký díl voltů či ampérů připadá na 1 mm. Pokud je stupnice např. v mA, je nutno její modul vynásobit ještě hodnotou 10^{-3} . Po vynásobení délek odvěsen jejich moduly dostáváme přírůstky napětí a proudu po řadě ve voltech a ampérech. Po jejich dosazení do (17.3) je jednotkou diferenciálního odporu Ω .

Celkový a diferenciální odpor zjistíme v rovnoměrně rozložených bodech, kterých volíme dostatečné množství, abychom získali grafickou závislost těchto veličin na napětí.

3. Voltampérová charakteristika kondenzátoru

Nakreslíme voltampérovou charakteristiku kondenzátoru, tj. závislost proudu na napětí. Poněvadž se jedná o prakticky ideální kondenzátor, je tato závislost lineární. Naměřenými body proložíme přímku procházející počátkem, která má rovnici

$$I = kU = \frac{U}{Z} \quad (17.4)$$

kde k je směrnice přímky a Z je absolutní hodnota, modul, impedance kondenzátoru. Platí $k = 1/Z$, tedy směrnice voltampérové charakteristiky je převrácenou hodnotou modulu impedance kondenzátoru. Nebo opačně, přímka (17.4) je grafickou formou Ohmova zákona (v absolutních hodnotách) pro střídavé proudy.

Z přímkové aproximace voltampérové charakteristiky můžeme zjistit kapacitu kondenzátoru. Graficky určíme modul impedance Z tak, že nakreslenou část přímky doplníme na pravouhlý trojúhelník přidáním odvěsen ΔU a ΔI , které jsou rovnoběžné s osami grafu, viz obr. 17.16a. Čím větší trojúhelník nakreslíme, tím je další výpočet přesnější. Modul impedance pak určíme podle vztahu

$$Z = \frac{\Delta U}{\Delta I} \quad (17.5)$$

Za ΔU a ΔI musíme dosadit hodnoty ve správných jednotkách, tj. po řadě ve voltech a ampérech, pak je jednotkou modulu impedance Ω . Podrobnější postup výpočtu je v předchozím bodu 2.

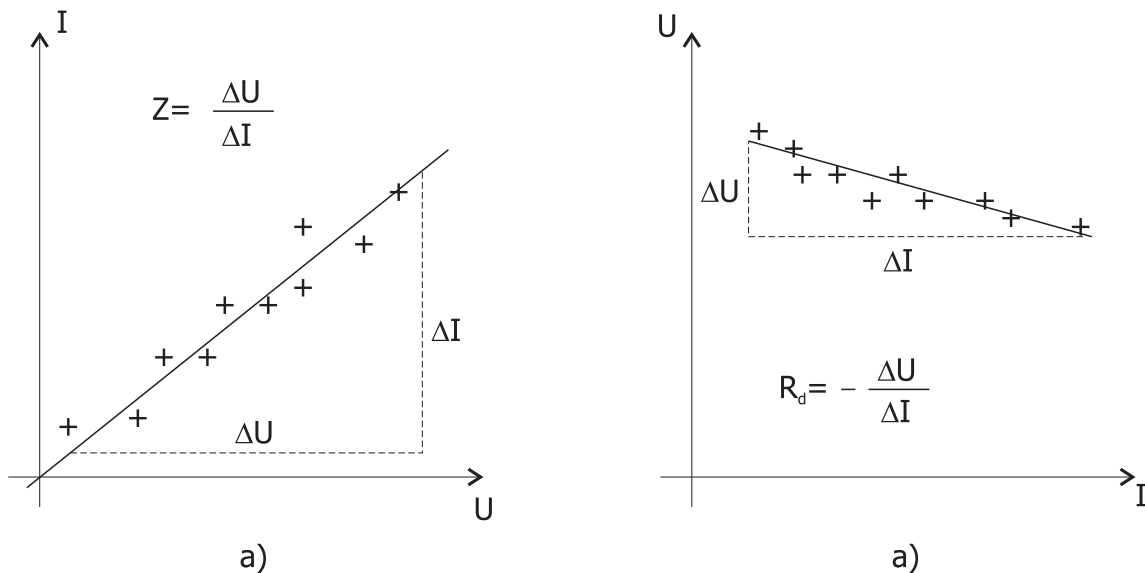
Pro modul impedance kondenzátoru o kapacitě C při frekvenci $f = 50$ Hz platí vztah

$$Z = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \doteq \frac{1}{314 C} \quad (17.6)$$

Odtud plyne pro kapacitu C kondenzátoru praktický výraz

$$C = \frac{Z}{314} \quad (17.7)$$

kde Z je modul impedance určený z přímkové závislosti proudu na napětí, který jsme již vypočetli, viz (17.5). Kapacita vypočtená ze vztahu (17.7) vyjde ve Faradech.



Obrázek 17.16: Graficko-početní konstrukce: a) Modul impedance, b) Vnitřní odpor

4. Zatěžovací charakteristika transformátorku

Nakreslíme zatěžovací charakteristiku transformátorku, tj. závislost napětí na proudu. Nejdříve vyneseme body a z jejich průběhu určíme oblast, v níž lze předpokládat lineární pokles. Měla by to být celá měřená oblast. Těmito body pak proložíme přímkou.

Lineární aproximace změřené zatěžovací charakteristiky umožní určit lineární náhradní obvod tvořený ideálním zdrojem napětí U_0 v sérii s vnitřním odporem R_i . Jeho parametry určíme takto. Z průsečíku zatěžovací přímky se svislou osou určíme napětí naoprázdno U_0 , z její směrnice k pak vnitřní odpor $R_i = -k$. Při určení vnitřního odporu postupujeme podle bodu 3 této části, viz též obr. 17.16b. Směrnice má však zápornou hodnotu, poněvadž jde o klesající závislost, proto $R_i = -k$. Přesněji, u diferencí ΔU či ΔI odečítáme počáteční hodnotu od koncové. Koncový bod je vpravo nebo nahoře, počáteční vlevo nebo dole. Poněvadž na zatěžovací charakteristice je koncový bod níže než počáteční, je $\Delta U < 0$, zatímco $\Delta I > 0$, protože koncový bod je napravo od počátečního.

5. Voltampérová charakteristika žárovky napájené stejnosměrným napětím

Měření se liší prakticky jen výměnou zdroje. Při zpracování dat postupujeme stejně jako v bodu 2 tohoto přehledu. Graficky vyneseme voltampérovou charakteristiku, vypočteme celkový odpor pro vybrané body a graficky určíme pro tyto body diferenciální odpor. Oba typy odporu pak vyneseme v závislosti na napětí.

6. Voltampérová charakteristika protisměrně zapojených diod

Formálně, z hlediska zpracování dat, je úloha obdobná žárovce, viz předchozí bod 5. Prakticky jsou zde významné rozdíly, na které chceme upozornit. Poněvadž závěrný proud diodou je zanedbatelný, výsledná charakteristika se skládá ze dvou protisměrných charakteristik jednotlivých diod. Omezíme se tedy na tyto dílčí charakteristiky.

Pro každou diodu existuje v propustném směru prahové napětí U_p . Pro luminiscentní diodu má hodnotu asi 1,5 V, $U_p \doteq 1,5$ V. Hodnoty proudu tekoucího diodou

pod prahovým napětím U_p jsou velmi malé, přesto měřitelné. Liší se o několik řádů. Nad tímto napětím jsou pak již téhož řádu. Správně bychom tedy měli kreslit dvě voltampérové charakteristiky s různým měřítkem na ose proudu, jednu do napětí U_p a další pro napětí nad U_p . Přitom samo napětí U_p se definuje poměrně obtížně. Budeme je brát jako napětí, při kterém teče 1 % maximální hodnoty proudu, tj. asi 0,2 mA. Lze též použít logaritmickou stupnici na ose proudu, pak stačí jeden graf. Prakticky se však této možnosti nevyužívá.

Dále můžeme voltampérovou charakteristiku nahradit přímkovými úseky a určit jejich významné parametry. U protisměrně zapojených diod je obvykle střední úsek shodný s osou proudu a oba krajní úseky lze nejlépe aproximovat tečnou pro maximální proud. U jedné diody se aproximace provede obdobně. Z průsečíku tečny a vodorovné osy se odhadne prahové napětí, z její směrnice diferenciální odpor pro běžný režim diody.

7. Voltampérová charakteristika sériové kombinace nelineárního a lineárního prvku

Zpracování dat může probíhat obdobně jako u předchozího bodu 6. Pokud však měříme napětí na lineárním a nelineárním prvku, můžeme vynést jejich závislost na proudu. Pro nelineární prvek je to inverzní voltampérová charakteristika. Pro lineární prvek by měla vyjít přímková, z její směrnice lze určit vodivost lineárního odporu.

Nové je též to, že zde můžeme posoudit vliv lineárního prvku na tvar charakteristiky. Lze ukázat, že koncová část charakteristiky by měla být blízká lineární. Opět vyneseme nejprve body a pak se pokusíme aproximovat přímkou co nejdelší úsek voltampérové charakteristiky počínaje jejím koncem. Pokusíme se též aproximovat celou charakteristiku pomocí přímkou procházející počátkem a posoudíme odchylky. Pro srovnání vyneseme též voltampérovou charakteristiku pouhé diody získanou v bodu 6.

8. Voltampérová charakteristika aktivního prvku působícího jako zdroj i spotřebič

Postupuje se stejně jako v předchozích případech. Jedná se o lineární závislost, vyneseme tedy body a proložíme jimi přímkou. Z její směrnice určíme použitý odpor. Dále zjistíme oblast, kde se panelový zdroj chová jako spotřebič a kde jako zdroj.

9. Zatěžovací charakteristika stejnosměrného zdroje

Postup je stejný jako u zatěžovací charakteristiky transformátoru, viz bod 4.

17.5 Diskuse

Před čtením dalších řádek by se studenti měli pokusit odpovědět např. na tyto zdánlivě jednoduché otázky. Většina otázek předpokládá kvalitní grafické zpracování výsledků měření, viz část 17.4.

1. Proč nesouhlasí jmenovité hodnoty napětí na sekundáru transformátoru s naměřenými?
2. Existuje nějaká hodnota odebíraného proudu, při níž je skutečné napětí na sekundáru transformátoru rovno jmenovitému?

3. Je teoretický rozdíl mezi voltampérovou charakteristikou žárovky napájenou střídavým a stejnosměrným napětím? Projeví se prakticky?
4. Dokážete z grafu voltampérové charakteristiky (konvexní, konkávní) odhadnout průběh celkového a diferenciálního odporu?
5. Jak lze zjistit kapacitu kondenzátoru, máme-li zdroj stejnosměrného napětí a ampérmetr?
6. Proč se diferenciální a vnitřní odpor určují ze směrnice různými vztahy? Jednou je $R_d = 1/k$, jindy dokonce $R_i = -k$. V čem je formální nedostatek?
7. O kolik řádů se mění proud diodou v propustném směru? Při jakém proudu začíná svítit?
8. Jak lze linearizovat nelineární prvek? Existuje ještě jiná možnost než ta, která je uvedena?
9. Jak spolu kvantitativně souvisí voltampérová charakteristika původního nelineárního a linearizovaného prvku?
10. Jak poznáte, zda prvek pracuje v režimu zdroje nebo spotřebiče?
11. Může být diferenciální odpor záporný? Může být celkový odpor záporný? Jak spolu souvisí tyto dva případy?
12. Jakou hodnotu má diferenciální a jakou vnitřní odpor zatěžovací charakteristiky?
13. Jak se kvantitativně liší náhradní obvod stabilizovaného zdroje a baterie na 9 V.
14. Proč mluvíme o odhadu vnitřního odporu ampérmetru?

V diskuzi by se měly především posuzovat souvislosti mezi jednotlivými měřeními. Proto není diskuze, na rozdíl od předchozí části, chronologická. Obvykle se porovnávají dvě nebo více měření prováděná v různé době.

Pokud jde o naměřenou a jmenovitou hodnotu napětí na sekundáru transformátorku, je nutno mít k dispozici zatěžovací charakteristiku alespoň jednoho sekundárního vinutí. Z ní vyplývá, že transformátorek je poměrně měkký zdroj, se zatěžováním (růstem odebíraného proudu) napětí klesá. Při určitém proudu je tedy rovno jmenovitému. Tento proud lze z grafu odečíst. Konstrukteři tedy navrhnou vinutí na určitou zátěž, poněvadž v praxi by transformátorek neměl běžet naprázdno. Na jaký odebíraný proud (poloviční, maximální apod.) je navrhnou a zda je stejný pro všechna vinutí, se zjistí teprve z naměřených hodnot.

Působením střídavého proudu žárovka velmi slabě bliká. Okem to není vidět, ale pomocí fotodiody lze průběh její intenzity znázornit na osciloskopu. Během periody se mění okamžitý odpor žárovky, jeho změna závisí na amplitudě napětí. Efektivní hodnota se však počítá pro neměnný odpor. Při stejnosměrném napájení se pro dané napětí odpor nemění. Účinek stejnosměrného a střídavého napětí téže efektivní hodnoty není tedy přesně stejný. V principu by se tedy měla ve střídavém režimu naměřit poněkud jiná voltampérová charakteristika než při stejnosměrném. Zda je tento rozdíl měřitelný, by mělo vyplýnout z grafů pro střídavý a stejnosměrný režim.

Pokud jde o tvar voltampérové charakteristiky a průběh odporů platí tyto závislosti. Při konkávním tvaru (proud narůstá stále méně, což je právě žárovka) celkový odpor klesá, směrnice též klesá, takže diferenciální odpor narůstá – je roven převrácené hodnotě

směrnice. Při konvexním průběhu voltampérové charakteristiky (proud narůstá stále více, což je např. dioda) celkový odpor roste, směrnice roste též, takže diferenciální odpor nyní klesá. Konvexní a konkávní charakteristiky jsou duální.

Kondenzátor je akumulativní prvek, jeho voltampérovou charakteristiku lze získat jen v dynamickém režimu, tj. při napájení harmonickým proudem. V obvodu stejnosměrného proudu představuje kondenzátor rozpojenou větev. Z lineární charakteristiky lze určit jeho kapacitu. Tato metoda je nejméně přesná a hodně pracná, avšak levná. V další úloze (parametry) probíráme mnohem přesnější a rychlejší metody jejího měření.

U voltampérové charakteristiky závisí proud na napětí, pro odpor (modul impedance) tedy platí $R_d = 1/k$, kde k je směrnice. U zatěžovací charakteristiky závisí napětí na proudu a klesá, pro vnitřní odpor nyní platí $R_i = -k$, kde k je směrnice. Formální chyba je v tom, že pro směrnici je v obou případech použit stejný symbol k , ačkoliv jde o rozdílné grafy. Vnitřní odpor zatěžovací charakteristiky musí být kladný, jde o vnitřní odpor lineárního náhradního zdroje, proto $R_i = -k$. Diferenciální odpor $R_d = k$ je naopak záporný, poněvadž voltampérová charakteristika klesá.

Citlivost multimetru zajistí, že u diody lze měřit proud řádově od desetin μA do desítek mA, tj. od 10^{-7} A do 10^{-2} A, tedy proud se v propustném směru mění o pět řádů. Takto rozdílné hodnoty lze skutečně při zodpovědném měření získat. Pokud chceme voltampérovou charakteristiku přehledně zobrazit, je nutno použít na ose proudu logaritmickou stupnici, lineární stupnici lze použít maximálně pro dva řády.

Poněvadž voltampérová charakteristika diody má konkávní tvar, celkový odpor roste a diferenciální klesá, což grafy potvrzují. Aproximace po úsecích umožní určit, od kterého napětí je dioda vodivá, porovnat toto napětí s prahovým napětím a pro vodivý stav zjistit diferenciální odpor. Můžeme též porovnat tato napětí s napětím, při kterém začíná svítit.

Vyneseme-li do téhož grafu průběh voltampérové charakteristiky samotného prvku a jeho sériové kombinace s lineárním odporem, rozsah na ose proudů se nemění, na ose napětí se však zvýší. V případě diody se zvýší z 2,5 V na 20 V. Linearizace vyžaduje zdroj podstatně vyššího napětí, nebo podstatně větší změnu napětí. Při měření se dvěma voltmetry lze získat voltampérové charakteristiky obou prvků.

Existují prvky, např. tunelová dioda, u kterých proud při vzrůstajícím napětí klesá. Pak je diferenciální odpor záporný. Celkový odpor však u pasivního prvku nemůže být záporný. Pokud je, jedná se o zdroj, tedy aktivní prvek, což je vysvětleno v dalším odstavci.

Aktivní prvek může pracovat jako zdroj či spotřebič. K tomu, aby byl spotřebičem, je nutná přítomnost dalšího aktivního prvku v obvodu. Pasivní prvek je jen spotřebičem. V pasivním režimu aktivního prvku proud vtéká do zdroje, při použitém zapojení ampérmetru má záporné znaménko, při zdrojové orientaci je tedy odpor prvku záporný. V aktivním režimu proud vytéká ze zdroje, má kladné znaménko, odpor prvku je kladný. Pokud použijeme spotřebičovou orientaci, je tomu naopak, v aktivním režimu prvku je odpor prvku záporný, v pasivním režimu kladný. Závisí tedy na připojení ampérmetru. Kladná a záporná hodnota celkového odporu tedy nemá nic společného se znaménkem diferenciálního odporu.

U stabilizovaného zdroje svorkové napětí velmi málo závisí na odebíraném proudu. To platí do určité hodnoty, pak naopak prudce klesá. Při správném měření to má voltampérová charakteristika potvrdit. Z lineární, téměř vodorovné části, se pak určí vnitřní odpor. U kvalitních zdrojů se tento odpor určuje obtížně. Naopak zatěžovací charakteristika baterie na 9 V klesá poměrně prudce. Stabilizovaný zdroj je tvrdým zdrojem (v určitém rozsahu odebíraného proudu), má malý vnitřní odpor. Naproti tomu baterie je měkkým zdrojem, má relativně velký vnitřní odpor. Numerické hodnoty vnitřních odporů tento závěr potvrzují.

Z měření voltampérové charakteristiky dvěma voltmetry, viz obr. 17.5 nebo 17.7 určíme rozdíl napětí mezi nimi, ten vydělíme proudem a odhadneme vnitřní odpor ampérmetru. O odhadu mluvíme proto, že rozdíl dvou blízkých veličin je zatížen velkou chybou. To provedeme jak pro stejnosměrný, tak střídavý rozsah.

17.6 Závěr

V závěru uvedeme nejdůležitější dosažené výsledky a jejich praktický či teoretický význam. Mezi výsledky by nemělo chybět toto:

1. Při jakém odběru proudu z transformátoru je skutečné napětí rovno jmenovitému, tj. jaký odebíraný proud považují konstruktéři za typický. Dále by se měly uvést parametry náhradního obvodu.
2. Zda se podařilo experimentálně prokázat rozdíl mezi voltampérovou charakteristikou žárovky napájenou střídavým a stejnosměrným napětím. Pokud ne, jak by se měl experiment zlepšit.
3. Uvést zjištěnou kapacitu, porovnat ji se jmenovitou hodnotou a vysvětlit rozdíl. Tolerance u kapacit bývá 5 %.
4. Uvést, s jakou přesností lze linearizovat voltampérovou charakteristiku luminiscenční diody.
5. Porovnat různá napětí (prahové, napětí, při kterém dioda začíná svítit, napětí zlomového bodu linearizace) u diody.
6. Porovnat vnitřní odpory stabilizovaného zdroje a baterie 9 V.
7. Uvést vnitřní odpor ampérmetru na střídavých a stejnosměrných rozsazích.

V případě, že nějaké měření nevyšlo dle předpokladu, pokusíme se to zdůvodnit. Též uvedeme příčiny, proč se případně některé měření nepodařilo realizovat.

18 Měření parametrů obvodových prvků

V teorii obvodů mluvíme o prvcích v několika významech:

- Ideální prvky, které mají jen jeden parametr (odpor, kapacitu, indukčnost, vzájemnou indukčnost). Tento parametr je konstantní, nezávislý na frekvenci, amplitudě budící veličiny, veličinách popisujících okolí, apod.
- Reálné prvky, mají parametr hlavní a několik parametrů vedlejších. Vedlejší parametry u kvalitních prvků nabývají řádově nižší hodnoty. Hlavní (ani vedlejší) parametry již však nejsou přesně konstantní, závisí na frekvenci, budícím napětí, protékajícím proudem, okolní teplotě, magnetickém poli, atd.

Obvykle reálné prvky modelujeme ideálními prvky. Nejjednodušším modelem je kombinace dvou prvků. Reálnou cívku nahrazujeme sériovou kombinací ideální cívky a ideálního odporu, reálný kondenzátor paralelní kombinací ideálního kondenzátoru a odporu. Tento model, nazývaný náhradní obvod, však pouze přibližně popisuje reálný prvek, říkáme též, že jej aproximuje. Konstantní parametry dávají uspokojivou shodu skutečnosti a modelu pouze v určitém frekvenčním pásmu. Pro širší frekvenční pásmo je nutný buď

složitější náhradní obvod, nebo několik hodnot aproximujících prvků, každá pro jedno užší frekvenční pásmo.

Poněvadž ideální prvky neexistují, je nutno zjistit parametry reálných prvků měřením. Teoretický výpočet z materiálových parametrů a geometrických rozměrů je možný jen v nejjednodušších případech, např. u deskových kondenzátorů. Ale i v tomto případě je nutné měření, poněvadž ani materiálové parametry, ani rozměry neznáme přesně, navíc se vlivem výrobních nepřesností parametry liší prvek od prvku i u téže výrobní série.

Dalším typem měření je měření obou složek imitance prvku či obvodu obecně pro různé frekvence. Pokud se frekvence mění spojitě, jedná se vlastně o měření obvodových funkcí či imitančních charakteristik a nikoliv parametrů. Tímto způsobem získáme nejúplnější informaci o prvku či obvodu.

Měření parametrů prvků patří k základním elektrotechnickým měřením. Bylo vyvinuto velké množství metod pro tato měření a existuje nepřehledné množství přístrojů, které z těchto metod na různé úrovni, co do přesnosti a úplnosti, vycházejí a realizují je. Uvedeme pouze přehled základních metod, aniž bychom se zajímali o jejich princip a podrobnější popis:

- Přímá metoda založená na aplikaci Ohmova zákona – rychlá, málo přesná, měří pouze hlavní parametr.
- Můstková metoda – přesná, ale měření je komplikované.
- Resonanční – vhodná pro měření specifických parametrů při vyšších frekvencích.
- Mikrovlnná – speciální metody měření pro velmi vysoké frekvence (prakticky se doporučují již nad 10 MHz).
- Kombinace jednotlivých základních metod.

Pokud jde o měřicí přístroje, vyrábějí se v mnoha kategoriích. Podle informací, které o prvku podávají a přesností s jakou zajistí měření, je lze rozdělit do několika kategorií:

- Přístroje pro orientační měření udávají pouze hlavní veličinu modelu (odpor, kapacitu, indukčnost) v poměrně úzkém rozsahu hodnot a s nízkou přesností.
- Přístroje pro orientační měření obou složek modelu umožňují kromě hlavní veličiny měřit i činitel jakosti cívky a ztrátový činitel kondenzátoru, avšak v malém rozsahu a s nízkou přesností, zpravidla je chyba kolem 5 %.
- Přístroje pro přesné měření obou složek imitance prvku při jedné frekvenci, zpravidla 1 kHz. Umožňují ji převést na činitel jakosti či ztrátový činitel.
- Přístroje pro přesné měření obou složek imitance prvku při několika frekvencích, např. 1, 10 a 100 kHz, jinak shodné s předchozím typem.
- Přístroje měřící imitanční charakteristiku v širokém frekvenčním rozsahu.

Později uvedené přístroje v tomto pořadí podávají řádově novou informaci a také se o řád liší jejich cena. Typické ceny jsou 500,- Kč, 2500,- Kč, 15 000,- Kč, 100 000,- Kč a 500 000,- Kč. Z toho je zřejmé, že při úlohách v naší laboratoři se musíme omezit na měření nejlevnějšími přístroji.

Soustředíme se na měření typických vyráběných prvků, a to odporů a kondenzátorů. Tyto prvky se vyrábějí jen v určitých řadách, tj. mají pouze hodnoty, které spadají do jedné z řad. Řada je určena tolerancí, např. nejjednodušší řada E20 s tolerancí 20 %

obsahuje v jednom řádu hodnot odpory 1; 1,5; 2,2; 3,3; 4,7 a 6,8 k Ω . Oběma směry se to opakuje, např. nižší řád má odpory 100, 150, 220, 330, 470 a 680 Ω . Tyto hodnoty nazýváme nominální. Původně byly hodnoty prvků rozptýleny v rámci tolerance, např. odpor nominální hodnoty 470 Ω mohl mít skutečnou hodnotu od 370 Ω do 570 Ω . Dnes se již výrobní přesnost zvýšila a odpory se vyrábějí na střed řady. U kondenzátorů je přesnost nižší.

Cívky mají špatné obvodové vlastnosti, reálná cívka se od ideální výrazně liší, proto se vyrábějí málo. Měření indukčností je proto důležité spíše v silnoproudé elektrotechnice.

Od tolerance prvků je nutno rozlišovat tolerance či chyby měřicích přístrojů. U přístrojů můžeme ještě rozlišovat mezi chybou a reprodukovatelností hodnoty. V každém případě musíme mít prvek s konstantním parametrem.

- Chybu přístroje zjistíme tak, že prvek změříme mnoha přístroji téhož typu. Správná hodnota je pak střední hodnota, přesněji střední hodnota je blízká správné. Chybu kteréhokoliv z použitých přístrojů udává směrodatná odchylka. Pokud máme k dispozici etalon, tj. prvek s velmi přesně známou hodnotou, můžeme ještě posoudit shodu střední a správné hodnoty, a tím kvalitu kalibrace či stability přístrojů.
- Reprodukovatelnost pro daný přístroj získáme tak, že prvek změříme mnohokrát na tomto přístroji. Střední hodnota se pak neblíží správné hodnotě, ale může se od ní lišit o konstantní odchylku. Směrodatná odchylka udává přesnost pouze použitého přístroje.

18.1 Cíl cvičení a jeho zabezpečení

V tomto laboratorním cvičení budou měřeny následující dílčí úlohy:

- Měření odporu prvků, zjištění tolerancí odporu a reprodukovatelnosti měření.
- Měření kapacity vyráběných kondenzátorů, zjištění tolerancí kondenzátoru a reprodukovatelnosti měření.
- Měření vlastní indukčnosti cívek transformátoru, zjištění reprodukovatelnosti měření.
- Měření vzájemné indukčnosti cívek transformátoru, zjištění reprodukovatelnosti měření.
- Měření parametrické charakteristiky.

K dispozici jsou tyto měřicí přístroje a přípravky:

- Přenosné:
 - Univerzální multimetry (3 kusy), pouze pro poslední měření.
 - Univerzální multimetr umožňující měření indukčnosti a kapacity.
 - Síťový transformátor se 4 sekundárními vinutími.
 - Posuvný odpor – vhodný kus se zvolí později podle zadání.
 - Přípravek s kondenzátorem.
- Měřené a pomocné prvky:
 - Měřené prvky, odpory a kondenzátory.

- Speciální vodiče pro připojení měřeného prvku: plochý kontakt – krokodýl (2 ks).
- Speciální vodiče banánek – krokodýl (2 ks).
- Spojovací vodiče – asi 10 kusů.
- Síťová šňůra k transformátoru.

18.2 Popis nových přístrojů

Většina zařízení byla popsána v předchozích návodech, kromě multimetru pro měření kapacit a indukčností. Proto popíšeme pouze tento přístroj.

18.2.1 Multimetr pro měření kapacit a indukčností

Používáme typ RE6810. Oproti běžným multimetrům obsahuje:

- Těsně pod displejem tlačítko LC, kterým se přepíná mezi měřením indukčnosti či kapacity a měřením ostatních veličin: napětí, proud, odpor, zkrat a proudový zesilovací činitel tranzistorů.
- Rozsahy jsou rozšířeny o část příslušející kapacitě a indukčnosti.
- Nad standardními zdírkami jsou z pravé strany speciální zdírky pro připojení cívky se symboly L a X nebo L_x , zleva podobné zdírky pro připojení kondenzátoru označené C_x .

18.2.2 Pomocné prvky

Nové jsou jen vodiče, které na jedné straně obsahují plochý vodič a na druhé straně krokodýl. Slouží k připojení kondenzátoru, ale zejména vinutí transformátoru k multimetru.

18.3 Měření

Tato část se zabývá měřením odporu, kapacity, indukčnosti a vzájemné indukčnosti. Měření parametrů je doplněno o měření parametrické charakteristiky. Bohužel, levné měřicí přístroje umožňují měření jen hlavního parametru. U reálných prvků není možnost změření vedlejšího (parazitního) parametru, a tím sestavení alespoň nejjednoduššího náhradního obvodu.

Druhý, parazitní, parametr u kondenzátoru a cívky je odpor. Nelze jej však změřit ohmetrem, jak by se na první pohled zdálo. Především je jeho hodnota buď velká (kondenzátor) a běžně neměřitelná, nebo malá (cívka) a tudíž obtížně a nepřesně měřitelná. Navíc silně závisí na frekvenci a levné multimetry měří odpor obvykle stejnosměrnou metodou.

18.3.1 Měření odporu

Úkol:

Změřit odpor alespoň 10 prvků téže nominální hodnoty, posoudit reprodukovatelnost údaje přístroje. Odhadnout hodnotu kontaktního odporu.

Doporučený postup:

Odpor můžeme měřit jak standardními multimetry tak multimetrem RE6810. Poněvadž

přístroj v tomto případě používá běžné zdířky, pro připojení měřeného odporu se využijí vodiče s banánkem a krokodýlem. Ze série měřených prvků se vybere jeden odpor jako referenční pro zjištění reprodukovatelnosti údaje přístroje. Ten se změří vždy znovu po změření každého dalšího ze sady odporů. Údaje se zapisují do tabulky.

Při měření se nedotýkáme živých částí, poněvadž se k měřenému odporu přidává odpor lidského těla. Chyba může být značná již pro odpory nad $3\text{ k}\Omega$. Na druhé straně si studenti mohou proměřit odpor mezi svými rukama tím, že v nich budou držet banánky či krokodýlky. Velikost odporu závisí na tlaku na banánky, proto k získání akceptovatelné hodnoty je nutno provést více měření. Mohou také měřit odpor mezi rukou a zemí, když jeden z banánků připojí do uzemněné svorky na laboratorním stole, druhý drží v ruce. Uzemněné svorky jsou trojice neizolovaných svorek uprostřed mezi uzly. Opět je nutno měření několikrát opakovat a určit střední hodnotu.

Při měření kontaktního odporu se měří odpor mezi vodiči připojenými do téhož uzlu na laboratorním stole. Měří se nejen kontaktní odpor, ale i odpor vodičů, kontaktní odpor ale obvykle převládá. Měření lze zpřesnit když použijeme dva uzly. První vodič z přístroje jde do levého uzlu, další směřuje z tohoto uzlu do sousedního pravého uzlu a poslední vodič z něho míří zpátky do přístroje, Pokud jsou dlouhé vodiče, lze přidat třetí a čtvrtý uzel. Opět je nutné měření provést opakovaně.

18.3.2 Měření kapacity

Úkol:

Změřte kapacitu alespoň 10 kondenzátorů o téže nominální hodnotě v rozmezí 1 nF až 500 nF , dále sady kondenzátorů o kapacitě z rozsahu 10 až 47 pF a několika elektrolytických kondenzátorů s kapacitou nad $5\text{ }\mu\text{F}$. Změřte též kapacitu kondenzátoru v přípravku. Dále posuďte reprodukovatelnost údaje přístroje.

Doporučený postup:

Kapacitu můžeme měřit jen multimetrem RE6810. Je nutno použít vodičů s plochým ukončením a krokodýlem. Ploché konce se zasunou do zdířek označených C_x na levé straně přístroje. Měřený kondenzátor se vkládá mezi krokodýly. Tlačítko LC pod displejem musíme zatlačit. Otočný prepínač přepneme na nejvyšší hodnotu kapacity a pak se přepíná na nižší rozsahy, až se dosáhne maximální přesnosti.

Ze série měřených prvků (rozsah 1 nF až 500 nF) se vybere jeden kondenzátor jako referenční pro zjištění reprodukovatelnosti údaje přístroje. Ten se změří vždy znovu po změření každého dalšího z kondenzátorů pro tuto sadu. Při měření elektrolytických kondenzátorů se měří v obou směrech. Údaje se zapisují do tabulky.

Několik praktických upozornění:

- Kontakt plíšků ve zdířce je špatný, plíšky snadno vypadávají, nebo se posouvají. Plíšek by měl být ve vnější části zdířky a v kolmém směru.
- Kondenzátor nezastrkáváme přímo do zdířek, to vyžaduje ohnutí drátků. Drátky by se měly ohýbat minimálně 1 cm od bodu vetknutí. Pokud se ohýbají přímo v bodě vetknutí, což jde velmi lehko, snadno se ulomí. Jak se učí v pružnosti, v bodě vetknutí je nejvyšší deformace a materiál je nejvíce namáhán.
- Může se stát, že kontakt v krokodýlu je špatný, stisk čelistí není dostatečně pevný a kondenzátor se v nich snadno posouvá. Pak se doporučuje stáhnout izolaci z krokodýlu na vodič a čelisti ponechat odizolované. Tím se zvýší síla mezi čelistmi. Izolaci lze natáhnout zpět tak, že čelisti se trvale rozevřou např. živým koncem banánku.

18.3.3 Měření vlastní indukčnosti

Úkol:

Změřit vlastní indukčnost všech vinutí transformátoru a posoudit reprodukovatelnost jejího měření.

Základní vztah:

Na přednáškách bylo naznačeno, že pro vlastní indukčnost cívky platí vztah

$$L = \frac{N^2}{R_m} \quad (18.1)$$

kde N je počet závitů a R_m je magnetický odpor. Tento vztah platí tím přesněji, čím méně se magnetické toky jednotlivými závity navzájem od sebe liší, tj. čím menší je rozptylový magnetický tok.

Doporučený postup:

Indukčnost můžeme měřit jen multimetrem RE6810. Je nutno použít vodiče s plochým ukončením, které se zasunou plochými konci do zdírek označených L a X na pravé straně přístroje. Při měření indukčnosti primáru se krokodýlci připojují k vývodu pro fázi a nulový vodič v síťové zásuvce na přístroji, případně na zástrčce síťové šňůry. Síťový vypínač musí být zapnutý. Nepřipojují se k zemnímu vodiči, jehož vývod více vyčnívá. Při měření na sekundárních cívkách se ke krokodýlkům připojí vodiče s banánky a ty se zasunou do svorek. Tlačítko LC pod displejem musíme zatlačit. Otočný přepínač přepneme na nejvyšší hodnotu indukčnosti a pak přepínáme na nižší rozsahy, až dosáhneme maximální přesnosti.

Údaje se zapisují do tabulky. Sekundární cívky je vhodné očíslovat, např. L_{s1} L_{s2} L_{s3} L_{s4} . Index 1 přísluší nejvyššímu, index 4 nejnižšímu napětí.

Měření opakujeme alespoň třikrát. Přitom je vhodné měnit pořadí vinutí, ale zachovat pořádek v tabulce.

Pozor na kontakt! Kontakt plíšků ve zdírce je špatný, plíšky snadno vypadávají. Ještě horší je ale kontakt krokodýlů v zásuvce. Ty mohou vypadnout velmi snadno a zdánlivě samy od sebe. Pokud je na displeji pouze číslice 1 a nepomůže ani přepnutí na nejvyšší rozsah, je špatný kontakt. Nejprve je nutno ověřit kontakt v přístroji, pak v zásuvce a posléze na dalších místech.

18.3.4 Měření vzájemné indukčnosti

Úkol:

Změřit vzájemnou indukčnost mezi všemi dvojicemi vinutí transformátoru a posoudit reprodukovatelnost jejího měření.

Základní vztah:

Na přednáškách bylo naznačeno, že pro vzájemnou indukčnost dvou cívek platí vztah

$$M = \frac{N_1 N_2}{R_m} \quad (18.2)$$

kde N_1 a N_2 je počet závitů jednotlivých cívek a R_m je magnetický odpor. Tento vztah platí tím přesněji, čím méně se magnetické toky jednotlivými závity u cívek od sebe liší. Jinými slovy, tento vztah platí tím přesněji, čím více magnetického toku vytvořeného druhou cívkou prochází všemi závity cívky první, tedy opět čím menší je rozptylový magnetický tok. Zde však, v porovnání s vlastní indukčností, dochází k podstatně většímu

rozptylu magnetického toku.

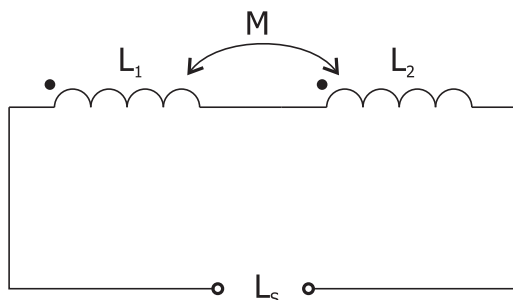
Měřicí metoda:

Vzájemnou indukčnost můžeme měřit přístrojem pro měření vlastní indukčnosti, jestliže vinutí zapojíme do série. Je možné vinutí zapojit dvěma způsoby, jak ukazují obr. 18.1 a obr. 18.2. V zapojení na obr. 18.1 naměříme mezi svorkami vlastní indukčnost L_s , v obvodu podle obr. 18.2 pak indukčnost L_o . V zapojení na obr. 18.1 teče proud do začátku obou vinutí, magnetické toky se sčítají, zatímco v obvodu podle obr. 18.2 teče proud do začátku jednoho a do konce druhého vinutí, magnetické toky se odečítají. Pro naměřené vlastní indukčnosti z toho plyne podmínka $L_s > L_o$. Na přednášce jsme ukázali, že vzájemnou indukčnost lze určit z vlastních indukčností změřených pro obě zapojení pomocí výrazu

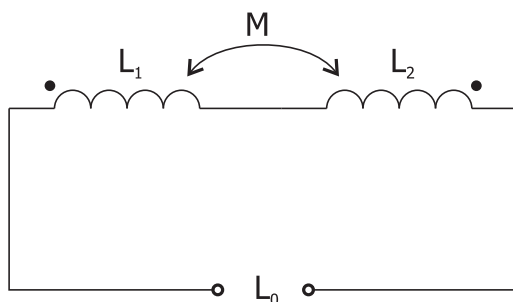
$$M = \frac{L_s - L_o}{4} \quad (18.3)$$

Poněvadž jsou známy též vlastní indukčnosti obou cívek, které označíme jako L_1 a L_2 , lze vypočítat koeficient vazby κ podle definice

$$\kappa = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (18.4)$$



Obrázek 18.1: Souhlasně zapojená vinutí



Obrázek 18.2: Opačně zapojená vinutí

Doporučený postup:

Postup měření vyplývá z výše uvedených vztahů. Dvě vinutí se spojí do série a změří se jejich vlastní indukčnost. Pak se svorky jednoho z vinutí zamění a změří se opět vlastní indukčnost zapojení. Větší hodnota odpovídá souhlasnému zapojení vinutí podle obr. 18.1, tj. hodnotě L_s , menší pak udává L_o .

Poněvadž se měří mezi všemi dvojicemi vinutí a výsledky se zapisují do tabulky, musí být v označení výsledků přísný systém. Sekundárním vinutím přiřadíme indexy 1 až 4,

kde index 1 odpovídá vinutí 27 V a index 4 je pro 1 V. Vlastní indukčnosti získané jako výsledky obou měření mezi primárem a sekundárem označíme

$$\begin{array}{cccc} L_{sp1} & L_{sp2} & L_{sp3} & L_{sp4} \\ L_{op1} & L_{op2} & L_{op3} & L_{op4} \end{array} \quad (18.5)$$

Např., L_{sp2} je jedna (větší) z hodnot vlastní indukčnosti naměřená mezi primárním vinutím a sekundárním vinutím č. 2, tj. pro 9 V nominálních.

Pro výsledky měření obou indukčností mezi všemi vinutími sekundáru použijeme označení

$$\begin{array}{cccccc} L_{s12} & L_{s13} & L_{s14} & L_{s23} & L_{s24} & L_{s34} \\ L_{o12} & L_{o13} & L_{o14} & L_{o23} & L_{o24} & L_{o34} \end{array} \quad (18.6)$$

Indexy udávají dvojice sekundárních cívek, např., L_{s23} je jedna (větší) z hodnot vlastní indukčnosti naměřená mezi vinutími 2 a 3 sekundáru, tj. pro 9 V a 3 V nominální hodnoty. Vzájemná indukčnost této dvojice vinutí je podle (18.3)

$$M_{23} = \frac{L_{s23} - L_{o23}}{4} \quad (18.7)$$

Měření opakujeme alespoň třikrát. Přitom je vhodné měnit pořadí vinutí, ale zachovat pořádek v tabulce.

Pozor na kontakt! Kontakt plíšků ve zdířce je špatný, plíšky snadno vypadávají. Ještě horší je ale kontakt krokodýlků v síťové zásuvce. Ty mohou vypadnout velmi snadno a zdánlivě samy od sebe. Dojde k tomu snadno např. při změně svorek na sekundáru. Pokud je na displeji pouze číslice 1 a nepomůže ani přepnutí na nejvyšší rozsah, je špatný kontakt. Nejprve je nutno ověřit kontakt v přístroji, pak v zásuvce a poté na dalších místech.

18.3.5 Měření parametrické charakteristiky

Úkol:

Změřit závislost obvodových veličin na odporu reostatu zapojeného do série s kondenzátorem.

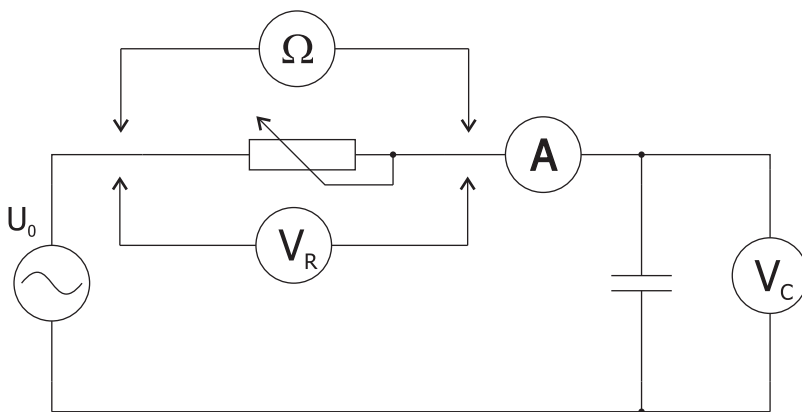
Teorie:

Parametrická charakteristika je závislost obvodových veličin na některém obvodovém parametru, např. odporu, kapacitě, indukčnosti, vzájemné indukčnosti, kterou lze však lépe charakterizovat koeficientem vazby. Má význam zejména v regulaci, citlivostní a toleranční analýze, tedy pro dosti specifické aplikace teorie obvodů. V dané úloze jde o to zjistit, v jakých mezích se mohou měnit obvodové parametry při změně odporu.

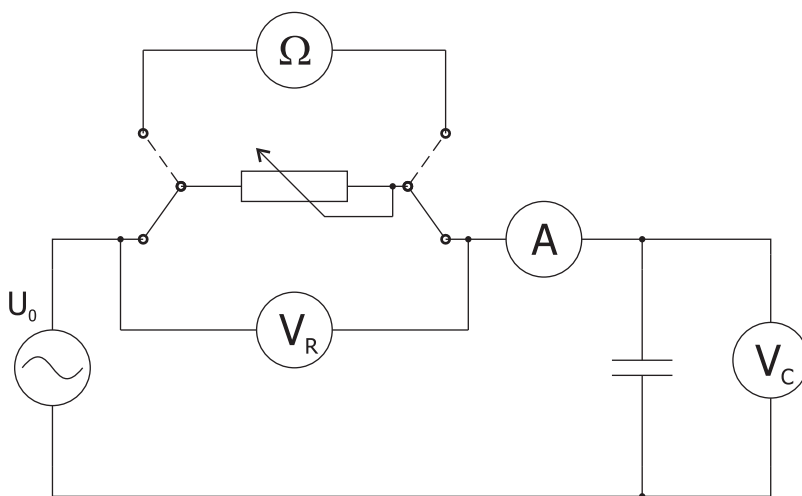
Doporučený postup:

Uvažujeme obvod na obr. 18.3. Použijeme reostatu a přípravku s kondenzátorem. Posuvný odpor volíme podle pravidla, čím nižší kapacita, tím vyšší odpor. Obvod napájíme z transformátoru napětím blízkým 40 V. Měříme závislost obou napětí a jednoho proudu na hodnotě odporu.

V novější verzi uvažujeme obvod podle obr. 18.4. V tomto případě se reostat zapojuje do obvodu nebo připojuje k ohmetru pomocí přepínače, měření je podstatně rychlejší a jednodušší. Měření by se mělo provést asi v 10 bodech. Změříme odpor posuvného odporu a určíme jeho desetinu. Tu pak násobíme číslicemi 1, 2, až 10, vhodně zaokrouhlíme a získáme odpor, které máme nastavit.



Obrázek 18.3: Měření parametrické charakteristiky – stará verze



Obrázek 18.4: Měření parametrické charakteristiky – nová verze

Podle staré verze postupujeme takto:

- Reostat odpojíme z obvodu¹⁹, připojíme k němu ohmometr, tj. multimetr nastavený pro měření odporu, a na reostatu nastavíme požadovaný odpor.
- Odpojíme multimetr, připojíme reostat²⁰ a změříme všechny obvodové veličiny.
- Tyto dva body opakujeme pro všechny hodnoty odporu na reostatu.

Při měření v nové verzi postupujeme takto:

- V jedné poloze přepínače je reostat odpojen od obvodu, obvodem neteče proud, ampérmetr ukazuje nulovou hodnotu. Poněvadž ohmometr měří nyní odpor reostatu, nastavíme požadovaný odpor.
- V druhé poloze přepínače ukazuje ohmometr nekonečný odpor, ampérmetr udává proud a voltmetr napětí. Obě tyto hodnoty odečteme. Výsledky zapisujeme do vhodné tabulky.
- Tyto dva body opakujeme pro všechny hodnoty odporu na reostatu. Přepínáme tedy pouze přepínač.

¹⁹Zapomeneme-li jej odpojit, měříme odpor celého obvodu a ne odpor reostatu. Zde to ovšem nevadí, protože kondenzátor představuje rozpojený obvod, ale jen v případě, že multimetr měří odpor stejnosměrnou metodou.

²⁰Zapomeneme-li jej připojit, neteče proud, což zjistíme velmi snadno.

18.4 Diskuse

Diskuse obsahuje dvě části. V první části jsou základní informace o přesnosti digitálních přístrojů. Obsahuje též údaje týkající se návrhu transformátoru. Druhá část na ní navazuje a obsahuje pokyny, jak vyhodnotit naměřené výsledky.

18.4.1 Přesnost digitálních přístrojů a nepřímých měření

Chyba všech digitálních přístrojů pro daný rozsah se udává pomocí těchto hodnot:

- Relativní chyba údaje přístroje v procentech.
- Absolutní chyba rozsahu udávaná v jednotkách měřené veličiny. V příručkách je označována jako *digits*, poněvadž jde o číslo na nejnižším řádu údaje. Budeme jej nazývat číslice.
- K výpočtu absolutní chyby rozsahu je ještě nutno uvést rozlišení, což je nejmenší hodnota veličiny měřená na daném rozsahu, nebo též nejmenší změna této veličiny.

Při určení chyby měření se postupuje takto:

1. Relativní chyba v procentech se vztahuje k údaji na displeji. Absolutní chyba údaje se mění podle hodnoty na displeji a získá se vynásobením údaje relativní chybou, která se však musí převést z procent na zlomek.
2. Absolutní chyba rozsahu je pro daný rozsah pevná a získáme ji vynásobením číslic a rozlišení. Udává minimální absolutní chybu údaje.
3. Absolutní chyba údaje zjištěná z relativní chyby a údaje přístroje podle bodu 1 se porovná s minimální absolutní chybou údaje podle bodu 2 a jako chyba měření se bere vyšší hodnota z této dvojice: absolutní chyba rozsahu (minimální absolutní chyba údaje) a absolutní chyba údaje.

Jako příklad uvažujme měření kapacity kondenzátoru na rozsahu 2 nF. Obě chyby pak udává první řádek tabulky 18.2. Relativní chyba údaje je 2,5 %, absolutní chyba rozsahu je 10 číslic, rozlišení činí 1 pF. Pro jednoduchost uvažujme v prvním případě hodnotu údaje 100 pF, pak je absolutní chyba údaje $0,025 \cdot 100 = 2,5$ pF a absolutní chyba rozsahu je $10 \cdot 1 = 10$ pF. Chyba měření je větší z těchto hodnot, tedy 10 pF. Kapacitu 100 pF tedy měříme s absolutní chybou 10 pF, tudíž relativní chyba činí 10 %. V druhém případě uvažujme, opět pro jednoduchost, údaj přístroje 1 nF = 1000 pF. Absolutní chyba rozsahu zůstává stejná, 10 pF, absolutní chyba údaje je nyní však $0,025 \cdot 1000 = 25$ pF. Za chybu měření budeme považovat větší hodnotu, což je nyní 25 pF. Kapacitu 1000 pF měříme s absolutní chybou 25 pF, což dává relativní chybu 2,5 %.

Základní informace o přesnosti měření přístrojem RE6810 je uvedena v následujících tabulkách. Přesnost pro měření odporu udává tabulka 18.1. Pro měření kapacity platí tabulka 18.2. Pro měření indukčnosti je na všech rozsazích relativní chyba údaje 2,5 % a počet číslic je 3, nicméně je nutno uvést tabulku 18.3, poněvadž rozlišení není úplně zřejmé.

Chyby nepřímo měřených veličin

Většina veličin se neměří přímo, ale počítá se z jiných přímo měřených veličin. Pak vzniká otázka, s jakou přesností je určena výsledná veličina, jsou-li známy přesnosti dílčích výchozích veličin. Pomocí diferenciálů lze odvodit poměrně komplikované vzorce pro výpočet absolutní nebo relativní chyby. Pro praxi je zpravidla postačující velmi

| Rozsah | Chyba [proc.] | Chyba abs. | Rozlišení |
|----------------|---------------|------------|---------------|
| 200 Ω | 1 | 1 | 0,1 Ω |
| 2 k Ω | 0,8 | 3 | 1 Ω |
| 20 k Ω | 0,8 | 3 | 10 Ω |
| 200 k Ω | 0,8 | 3 | 100 Ω |
| 2 M Ω | 0,8 | 3 | 1 k Ω |
| 20 M Ω | 2,5 | 2 | 10 k Ω |

Tabulka 18.1: Přesnost měření odporu

| Rozsah | Chyba [proc.] | Chyba abs. | Rozlišení |
|-------------|---------------|------------|-----------|
| 2 nF | 2,5 | 10 | 1 pF |
| 20 nF | 2,5 | 3 | 10 pF |
| 2 μ F | 2,5 | 3 | 1 nF |
| 200 μ F | 5 | 5 | 100 nF |

Tabulka 18.2: Přesnost měření kapacity

jednoduché pravidlo: absolutní či relativní chyby všech vstupujících veličin se sčítají. Přesnější výpočet chyby pak dává nižší hodnotu, jedná se tedy o horní odhad.

Jako příklad uveďme výpočet koeficientu vazby podle vztahu (18.4). Jsou použity tři veličiny, vlastní indukčnosti L_1 a L_2 a vzájemná indukčnost M , kterou však opět měříme nepřímo, pomocí vlastních indukčností L_s a L_o . Podle tabulky 18.3 měříme vlastní indukčnost s relativní chybou údaje 2,5 % a absolutní chybou 3 číslice. Uvažujme rozsah 2 H. Pak je absolutní chyba rozsahu 3 mH. Vzájemná indukčnost M je určena ze dvou vlastních indukčností L_s a L_o podle vztahu (18.3). Poněvadž se chyby sčítají, relativní chyba určení M je 5 %, absolutní chyba je 6 mH. U koeficientu vazby se sčítají chyby vlastních indukčností L_1 a L_2 a vzájemné indukčnosti M , takže relativní chyba určení κ je 10 % a absolutní chyba činí 12 mH.

Nejhorsí nepřímé měření je měření založené na rozdílu měřených veličin. Jsou-li blízké, relativní chyba rozdílu je vysoká. V tomto cvičení, se vzájemná indukčnost počítá právě z rozdílu vlastních indukčností, viz. vztah (18.3). Její hodnota může být nepřesná, proto by vždy měla být doprovázena relativní chybou, zjištěnou z její hodnoty a chyb měření vlastních indukčností.

Řádový rozsah přístroje, displeje

Přístroje měří obvykle v rozsahu mnoha řádů, např. odpor lze multimetrem měřit zhruba s 1% přesností od 1 Ω do 20 M Ω , tj. v rozsahu od 1 $\Omega = 1 \cdot 10^0 \Omega$ do 2 $\cdot 10^7 \Omega$. Často je pro srovnání přístrojů vhodnější uvést pouze řádový rozsah. Pokud by byl rozsah 1 Ω až

| Rozsah | Chyba [proc.] | Chyba abs. | Rozlišení |
|--------|---------------|------------|-------------|
| 20 mH | 2,5 | 3 | 10 μ H |
| 200 mH | 2,5 | 3 | 100 μ H |
| 2 H | 2,5 | 3 | 1 mH |
| 20 H | 2,5 | 3 | 10 mH |

Tabulka 18.3: Přesnost měření indukčnosti

10 M Ω , jednalo by se o 7 řádů. Jak ale započítat část dalšího řádu?

Část, díl, řádu se započítá pomocí dekadických logaritmů. Platí

$$\begin{aligned}\log_{10}(2) &\doteq 0,3 \\ \log_{10}(3) &\doteq 0,48 \doteq 0,5 \\ \log_{10}(5) &\doteq 0,7\end{aligned}\tag{18.8}$$

Tedy hodnotě 20 M Ω přísluší řád

$$\log_{10}(2 \cdot 10^7) = 7 + \log_{10}(2) \doteq 7,3$$

Řádový rozsah měření odporu je tedy 7,3 řádu.

Numerické hodnoty ve vztazích (18.8) jsou blízké násobku 1/4. Často se proto říká, že rozsah měření odporu je sedm a čtvrt řádu. Pokud by byl maximální měřitelný odpor 30 M Ω , byl by rozsah měření odporu sedm a půl řádu.

Z tohoto hlediska výrobci přístrojů neuvádějí správné hodnoty. O přístroji který má na displeji maximální hodnotu 1999, což je prakticky $2 \cdot 10^3$, říkají, že má displej tři a půl řádu. Přesnější je ovšem tři a čtvrt řádu. Tři a půl řádu má přístroj s maximálním údajem 2999, pro tři a tři čtvrtě řádu to je 4999.

Navíjecí předpis transformátoru

Navíjecím předpisem transformátoru se rozumí počty závitů na všech vinutích. Pro transformátor použitý v úloze je navíjecí předpis v tab. 18.4. Použité symboly mají tento význam: N_p je počet závitů primáru, N_1 , N_2 , N_3 a N_4 počty závitů v sekundárních vinutích směrem od nominálních 27 V k 1 V.

| N_p | N_1 | N_2 | N_3 | N_4 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1293 | 171 | 57 | 19 | 6 |

Tabulka 18.4: Navíjecí předpis

18.4.2 Jednotlivá měření

Před čtením této části by studenti měli být schopni odpovědět na tyto otázky:

1. Odpor s tolerancí 10 % má nominální hodnotu 470 Ω . V jakém intervalu můžeme naměřit jednotlivé hodnoty? Jaká je pravděpodobnost (velká, malá, stejná), že zadanou hodnotu z tohoto intervalu naměříme?
2. Jaký nejjednodušší náhradní obvod reálné cívky a reálného kondenzátoru používáme? Proč nemůžeme změřit parazitní parametr, např. ohmetrem?
3. Jaký nejmenší odpor, kapacitu a indukčnost můžeme s přijatelnou přesností (20 nebo 50 %) měřit multimetrem RE6820?
4. Jaký nejmenší odpor, kapacitu a indukčnost můžeme změřit s přesností 10 %?
5. S jakou přesností změříme odpor 3 k Ω , kapacitu 5 nF a indukčnost 300 mH?
6. Kapacitu 300 pF měříme na nesprávném rozsahu 20 nF. Jaká je relativní chyba? Jak se chyba změní při přepnutí na správný rozsah 2 nF?
7. Jaký je rozsah měření odporu, kapacity, indukčnosti za podmínky:

- (a) Maximální relativní chyba je 100 %.
 - (b) Kolik je to řádů při této chybě (100 %)? Uvažujte i čtvrtiny řádu.
 - (c) Maximální relativní chyba je 10 %.
 - (d) Kolik je to řádů při této chybě (10 %)? Uvažujte i čtvrtiny řádu.
8. Na displeji multimetru při měření kapacity je v levé části displeje pouze číslice 1. Co vše to může znamenat? Jak budete reagovat?
 9. Jak rozlišíte případ, že měřená hodnota překročila maximální rozsah, od případu, že se jedná o špatný kontakt? Co uděláte?
 10. Jaká je maximální teoretická hodnota koeficientu vazby? Co to znamená?
 11. Výpočtem zjistíte, že hodnota koeficientu vazby je 1,2. Co to teoreticky znamená? Jaká je příčina této hodnoty?

Další diskuse se vztahuje k jednotlivým měřením. Předpokládá dobrou znalost předchozí části 18.4.1.

1. Měření odporu

Zpracování výsledků je jednoduché a spočívá v těchto krocích:

- Měření různých odporů. Vypočítáme střední hodnotu a směrodatnou odchylku jednoho měření. Ověříme, zda vyhovují toleranci.
- Měření reprodukovatelnosti údaje přístroje. Porovnáme směrodatnou odchylku z měření pro referenční odpor s chybou přístroje pro daný rozsah.
- Odhadneme kontaktní odpor, při použití jednoho uzlu se jedná o tři kontakty. Pokud bylo několik uzlů, je nutno je k počtu kontaktů přičíst. Kontaktní odpor je pak průměrná hodnota naměřeného odporu na jeden kontakt.
- Vliv chyby přístroje. Posoudíme přesnost určení kontaktního odporu, tj. určíme absolutní a (zejména) relativní chybu přístroje pro použitý rozsah. Způsob výpočtu chyby přístroje byl uveden výše, viz. 18.4.1.

2. Měření kapacity

Zpracování výsledků je jednoduché, obdobné jako u odporu a spočívá v těchto krocích:

- Měření různých kondenzátorů. Z naměřených hodnot kapacity vypočteme střední hodnotu, absolutní a relativní chybu pro jedno měření. Ověříme, zda vyhovují toleranci. Zvlášť porovnáme soulad s nominální hodnotou pro kondenzátory o malé hodnotě do 50 pF a zvlášť pro skupinu od 1 nF výše.
- Vliv přesnosti přístroje. Posoudíme přesnost určení kapacity pro obě skupiny tak, že určíme absolutní a (zejména) relativní chybu přístroje pro použitý rozsah. Způsob výpočtu chyby přístroje byl uveden výše, viz. 18.4.1.
- Měření reprodukovatelnosti údaje přístroje. Porovnáme směrodatnou odchylku z měření pro referenční kondenzátor s chybou přístroje pro daný rozsah.
- Popíšeme závislost kapacity elektrolytického kondenzátoru na polaritě.

3. Měření vlastní indukčnosti

Podle zadání se měla vlastní indukčnost měřit třikrát. Porovnáme tři výsledky, určíme střední hodnotu a směrodatnou odchylku.

Dále ověříme teoretický vztah (18.1). Indukčnost by měla růst přímo úměrně čtverci počtu závitů, což lze graficky ověřit. Po nahlédnutí do tabulky 18.4 zjistíme, že se počet závitů mění o tři řády, nelze tedy použít v grafu lineární stupnice, body pro malý počet závitů by byly prakticky v počátku. Je nutno použít logaritmické stupnice, tj. na vodorovnou osu vynášíme dekadický logaritmus počtu závitů $\log_{10}(N)$ a na svislou osu dekadický logaritmus vlastní indukčnosti $\log_{10}(L)$. Logaritmováním vztahu (18.1) dostaneme

$$\log_{10}(L) = 2 \log_{10}(N) - \log_{10}(R_m) \quad (18.9)$$

kde L je vlastní indukčnost, N je počet závitů a R_m je magnetický odpor. Je zřejmé, že rovnice (18.9) je rovnicí přímky se směrnici 2, která osu pořadnic, tj. svislou přímku procházející bodem 0 (pro $N = 1$), protíná v bodě $(-\log_{10}(R_m))$.

Prakticky postupujeme tak, že zlogaritmujeme počty závitů z tabulky 18.4 a hodnoty vlastní indukčnosti. Těchto 5 bodů vyneseme do grafu, proložíme jimi přímku a zjistíme její směrnici. Posoudíme, nakolik se směrnice liší od teoretické hodnoty 2.

4. Měření vzájemné indukčnosti

Podle zadání se měla vzájemná indukčnost měřit třikrát. Porovnáme tři výsledky, určíme střední hodnotu a směrodatnou odchylku.

Dále ověříme teoretický vztah (18.2). Vzájemná indukčnost by měla růst přímo úměrně součinu počtu závitů obou cívek, což lze graficky ověřit. Podobně jako výše, po nahlédnutí do tabulky 18.4 zjistíme, že se počet závitů mění o tři řády. Jejich součiny by se měnily možná o čtyři řády, nemá tedy smysl použít v grafu lineární stupnice, body pro nízkou hodnotu součinu závitů by byly prakticky v počátku. Je nutno použít logaritmické stupnice, tj. na vodorovnou osu vynášíme dekadický logaritmus součinu počtu závitů $\log_{10}(N_1 N_2)$ a na svislou osu dekadický logaritmus vzájemné indukčnosti $\log_{10}(M)$. Logaritmováním vztahu (18.2) dostaneme

$$\log_{10}(M) = \log_{10}(N_1 N_2) - \log_{10}(R_m) = \log_{10}(N_1) + \log_{10}(N_2) - \log_{10}(R_m) \quad (18.10)$$

kde M je vlastní indukčnost, N_1 , N_2 jsou počty závitů obou cívek a R_m je magnetický odpor. Je zřejmé, že rovnice (18.10), zejména její první tvar, kde je součin počtu závitů, je rovnicí přímky se směrnici 1, která osu pořadnic, tj. svislou přímku procházející bodem 0 (pro $N_1 N_2 = 1$), protíná v bodě $(-\log_{10}(R_m))$.

Prakticky postupujeme tak, že zlogaritmujeme všechny kombinace součinů počtu závitů z tabulky 18.4 a hodnoty vzájemné indukčnosti. Kombinací, se zahrnutím primárního vinutí, je 10. Těchto 10 bodů vyneseme do grafu, proložíme jimi přímku a zjistíme její směrnici. Posoudíme, o kolik se směrnice liší od teoretické hodnoty 1.

Dále pro všech 10 hodnot vzájemné indukčnosti určíme koeficient vazby podle vztahu (18.4). Vyneseme jej též do grafu v závislosti na součinu počtu závitů. Vodorovná stupnice je opět logaritmická, lze použít stupnice z předchozího grafu pro vzájemnou indukčnost, svislá stupnice je lineární. Porovnáme naměřené (vypočtené) hodnoty s hodnotami, které bychom očekávali.

5. Parametrická závislost obvodových veličin

Zde je zpracování veličin jednak matematické, jednak grafické. Nezávisle proměnnou je odpor rezistoru R , závislými je proud I v obvodu, napětí U_R na rezistoru a napětí U_C na kondenzátoru. Pevnou veličinou by mělo být napětí zdroje U_0 .

Při početním zpracování

- Do tabulky doplníme součet obou napětí $U_R + U_C$ a porovnáme s napětím zdroje U_0 .
- Posoudíme, zda obě veličiny jsou si rovné. Pokud se liší, pokusíme se vysvětlit příčinu.

V grafické formě vypracujeme např. tyto grafy (všechny mají na vodorovné ose odpor R):

- Závislost proudu I na odporu R .
- Závislost napětí U_R na odporu R .
- Průběh napětí U_C .
- Průběh obou předchozích napětí U_R a U_C na témže grafu.
- Průběh součtu obou napětí $U_R + U_C$. Současně uvedeme křivku pro napětí zdroje U_0 .

Posoudíme, které závislosti lze aproximovat přímkou. Pokud to jde, určíme směrnici této přímky a vysvětlíme její fyzikální význam. Dále posoudíme odchylky, zejména u posledních dvou grafů, a pokusíme se vysvětlit jejich příčinu.

18.5 Závěr

Závěr má shrnovat dosažené výsledky, posoudit jejich věrohodnost, uvést nové poznatky, které z nich plynou, důležité závěry pro praxi apod. V diskusi je dostatečný počet podkladů pro závěr, proto další náměty jsou jen heslovité.

- Měření odporu – přesnost měření malých odporů, porovnání chyby přístroje a reprodukovatelnosti jeho měření. Dovoluje přesnost přístroje zjistit toleranci hodnot odporu?
- Měření kapacity – přesnost měření malých kapacit, porovnání chyby přístroje a reprodukovatelnosti jeho měření.
- Měření vlastní indukčnosti – souhlas s teorií (pomocí grafu), určení magnetického odporu.
- Měření vzájemné indukčnosti – souhlas s teorií, jak pro vzájemnou indukčnost, tak pro koeficient vazby (obojí pomocí grafu), určení magnetického odporu. Vysvětlení příčin odchylek. Lze transformátor považovat za ideální?
- Parametrická závislost – možnost lineární aproximace, význam jejích parametrů. K čemu lze toto zapojení, při jiných hodnotách parametrů a při buzení harmonickým napětím, využít ve frekvenční oblasti?

V případě, že nějaké měření nevyšlo dle předpokladu, pokusíme se to zdůvodnit. Též uvedeme příčiny, proč se případně některé měření nepodařilo realizovat.

19 Trojfázová soustava

Pro zopakování a osvěžení znalostí shrneme v úvodní části všeobecně známé poznatky o trojfázové soustavě. Úvodní část by měla též umožnit snadnější orientaci ve vlastním měření.

19.1 Úvod

Pro přenos elektrické energie se používá výhradně trojfázová soustava, a to z těchto praktických důvodů:

- Trojfázová soustava vytváří točivé magnetické pole, které je podmínkou pro to, aby se točil trojfázový indukční asynchronní elektromotor. Trojfázovému elektromotoru se dává přednost před jednofázovým, poněvadž nemá kartáčky, a tím odpadá jiskření, vedoucí k jejich opotřebení.
- Umožňuje úspornější přenos energie, než tři jednofázové soustavy.
- Praxe ukázala, že tři fáze bohatě stačí, dvě fáze je málo a čtyři jsou nadbytečné.

Trojfázová soustava je tvořena třemi zdoji, obvykle se kreslí ve formě cívek, které mají začátek a konec vinutí. Tyto cívky lze zapojit dvěma základními způsoby:

- Zapojení do hvězdy. Počátky všech zdrojů (cívek) se spojí do jednoho uzlu. Vodiče, kterými se přenáší energie lze připojit dvěma způsoby:
 - Vodiče se připojí na konce zdrojů (cívek) a na společný uzel. Vodiče připojené na konce zdrojů (cívek) se nazývají fázové vodiče, nebo stručně jen fáze, vodič připojený na uzel nese název nulový vodič. Vznikne čtyřvodičová soustava zapojená do uzemněné hvězdy.
 - Vodiče se připojí na konce zdrojů (cívek), společný uzel zůstane nepřipojený. Tři vodiče připojené na konce zdrojů (cívek) sloužící k přenosu energie se opět nazývají fázové vodiče, nebo stručně jen fáze. Vznikne třívodičová soustava zapojená do hvězdy.
- Zapojení do trojúhelníku. Počátky jednoho zdroje (cívky) se spojí s koncem dalšího zdroje (cívky) a takto se postupuje cyklicky. Na spojené počátky a konce zdrojů (cívek) se připojí vodiče, kterými se přenáší energie. Může vzniknout pouze jediná třívodičová soustava zapojená do trojúhelníka.

Trojfázovou zátěž tvoří buď trojfázový stroj nebo několik jednofázových spotřebičů zapojených mezi různé fázové vodiče. Trojfázový stroj představuje souměrnou zátěž, alespoň z praktického hlediska, jednofázové spotřebiče obvykle netvoří souměrnou zátěž. Stejně jako zdroj, lze zátěž zapojit do hvězdy a trojúhelníku.

Podle počtu vodičů přicházejících ze zdroje lze trojfázovou zátěž připojit různými způsoby²¹.

- Ze zdroje přicházejí čtyři vodiče (zapojení do hvězdy, méně běžný případ v energetice). Zátěž lze zapojit jako
 - Hvězdu s propojenými uzly zátěže a zdroje prostřednictvím nulového vodiče.
 - Hvězdu s nevyvedeným uzlem. Nulový vodič ze zdroje je nevyužit.

²¹V této úvaze nás pro jednoduchost nezajímá, zda spotřebiče snesou příslušná napětí

- Trojúhelník.
- Ze zdroje přicházejí tři vodiče. Zátěž lze zapojit jako
 - Hvězdu s nevyvedeným středem, uzlem.
 - Trojúhelník.

Povšimněme si, že v případě třívodičové soustavy nezáleží na tom, zda zdroj je spojen do hvězdy s nevyvedeným uzlem nebo do trojúhelníku.

Z hlediska obvodových veličin máme tyto případy:

- Zapojení do hvězdy.
 - Jeden typ proudu – fázový. Teče od fáze do nulového vodiče nebo uzlu.
 - Dva typy napětí
 - * Fázové, které se měří mezi fází a uzlem.
 - * Sdružené, které se měří mezi dvěma fázemi.
- Zapojení do trojúhelníku.
 - Jeden typ napětí – síťové. Měří se mezi dvěma fázemi.
 - Dva typy proudu
 - * Fázový, který protéká spotřebičem připojeným mezi dvě fáze.
 - * Síťový, který protéká přírodnými vodiči.

19.2 Teorie

Při kontrole naměřených hodnot výpočtem v trojfázové soustavě budeme potřebovat následující vztahy. Přitom probereme zvlášť zapojení do hvězdy a do trojúhelníku. U hvězdy budeme uvažovat jak čtyřvodičovou, tak třívodičovou soustavu, tj. uzel uzemněný a neuzemněný. Pro jednoduchost uvažujeme jen odporovou zátěž, ale nesouměrnou. V porovnání s obdobnou kapitolou 12 je tato část zaměřena prakticky, tj. na přímé výpočty.

19.2.1 Zapojení do hvězdy

Pracujeme s fázory napětí a proudu. Fázová napětí ve formě fázoru označíme \hat{U}_A , \hat{U}_B a \hat{U}_C . Ve složkovém tvaru je lze popsat těmito vztahy

$$\begin{aligned}\hat{U}_A &= U \\ \hat{U}_B &= U \left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \hat{U}_C &= U \left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)\end{aligned}\tag{19.1}$$

kde je U efektivní hodnota napětí jednoho zdroje (vinutí) měřená mezi svorkou a uzlem. Nazýváme je fázovým napětím. Ze vztahů (19.1) snadno plyne, že součet fázových napětí je nulový

$$\hat{U}_A + \hat{U}_B + \hat{U}_C = 0\tag{19.2}$$

Pro efektivní hodnotu sdruženého napětí platí vztah

$$U_s = \sqrt{3}U_f = \sqrt{3}U\tag{19.3}$$

Vyvedený uzel – čtyřvodičová soustava

Předpokládejme, že do fází byla zapojena nesouměrná zátěž tvořená odpory R_A , R_B a R_C , viz. obr. 19.1. Pokud budou zapojeny do hvězdy s vyvedeným uzlem, pro napětí na odporech budou opět platit vztahy (19.1). Napětí mezi uzlem a nulovým vodičem bude nulové

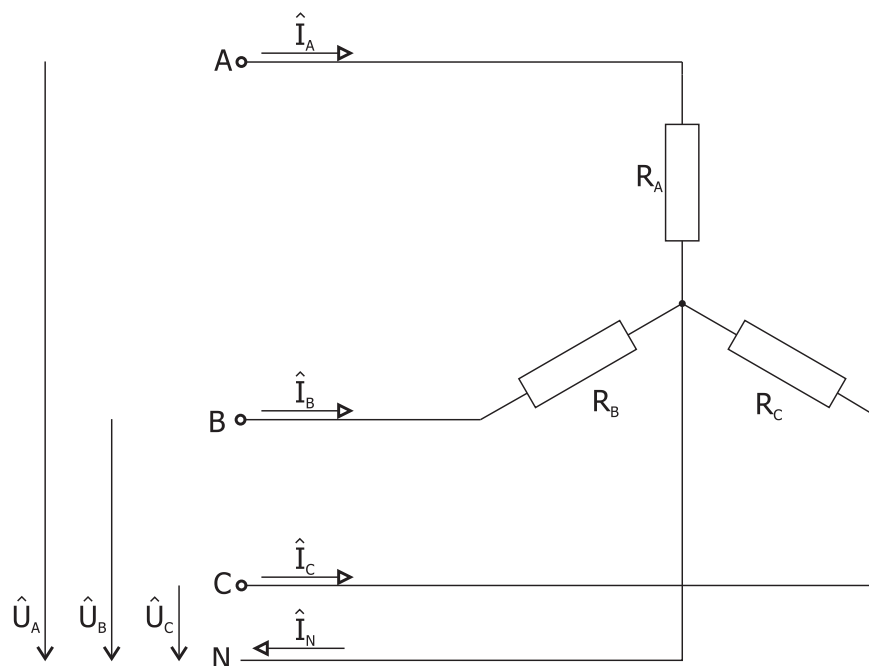
$$\hat{U}_N = 0 \quad (19.4)$$

Nulovým vodičem však poteče proud

$$\hat{I}_N = -\hat{I}_A - \hat{I}_B - \hat{I}_C \quad (19.5)$$

kde \hat{I}_A , \hat{I}_B a \hat{I}_C jsou fázové proudy.

Proud $\hat{I}_N = I_N e^{j\varphi_N}$ nulovým vodičem nemůžeme měřit, poněvadž ampérmetry udávají pouze jeho efektivní hodnotu I_N . Rovněž změříme pouze efektivní hodnoty fázových proudů I_A , I_B a I_C . K ověření naměřené efektivní hodnoty I_N je nutno vypočíst proudy jednotlivými fázemi z fázových napětí. Při odporové zátěži to jsou proudy



Obrázek 19.1: Vyvedený uzel – čtyřvodičová soustava

$$\begin{aligned} \hat{I}_A &= \frac{\hat{U}_A}{R_A} = \frac{U}{R_A} \\ \hat{I}_B &= \frac{\hat{U}_B}{R_B} = \frac{U}{R_B} \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \hat{I}_C &= \frac{\hat{U}_C}{R_C} = \frac{U}{R_C} \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned} \quad (19.6)$$

S využitím těchto vztahů a vztahu (19.5) dostaneme praktický vztah pro výpočet proudu nulovým vodičem ve složkovém tvaru

$$\begin{aligned}\hat{I}_N &= -\hat{I}_A - \hat{I}_B - \hat{I}_C = -\frac{U}{R_A} - \frac{U}{R_B} \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{U}{R_C} \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= U \left[\left(-\frac{1}{R_A} + \frac{1}{2R_B} + \frac{1}{2R_C} \right) + j \left(\frac{\sqrt{3}}{2R_C} - \frac{\sqrt{3}}{2R_B} \right) \right] = \\ &= -I_A - I_B \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - I_C \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)\end{aligned}\quad (19.7)$$

Důležité jsou dva poslední tvary, v předposledním používáme fázové napětí a hodnoty odporů, v posledním naměřené efektivní hodnoty fázových proudů.

Pro souměrnou zátěž, $R = R_A = R_B = R_C$, ze vztahu (19.7) vyplývá, že nulovým vodičem neteče proud.

Nepřipojený uzel – třívodičová soustava

Pokud je tato nesouměrná zátěž tvořená odpory R_A , R_B a R_C zapojena do hvězdy s nepřipojeným uzlem, viz. obr. 19.2, je proud vytékající z uzlu do nulového vodiče nulový, tj.

$$\hat{I}_N = -\hat{I}_A - \hat{I}_B - \hat{I}_C = 0 \quad (19.8)$$

Pak mezi tímto uzlem a nulovým vodičem bude nenulové napětí \hat{U}_N , pro které lze odvodit vztah

$$\hat{U}_N = \frac{1}{R_{ABC}} \left(\frac{\hat{U}_A}{R_A} + \frac{\hat{U}_B}{R_B} + \frac{\hat{U}_C}{R_C} \right) \quad (19.9)$$

kde

$$R_{ABC} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} \quad (19.10)$$

Toto napětí nemůžeme přímo měřit, poněvadž voltmetr nám udá jen jeho efektivní hodnotu. Je nutno vztah (19.9) upravit tak, aby v něm byly známé veličiny.

Po dosazení ze vztahů (19.1) do (19.9) a jednoduchých úpravách dostaneme napětí uzlu ve složkovém tvaru

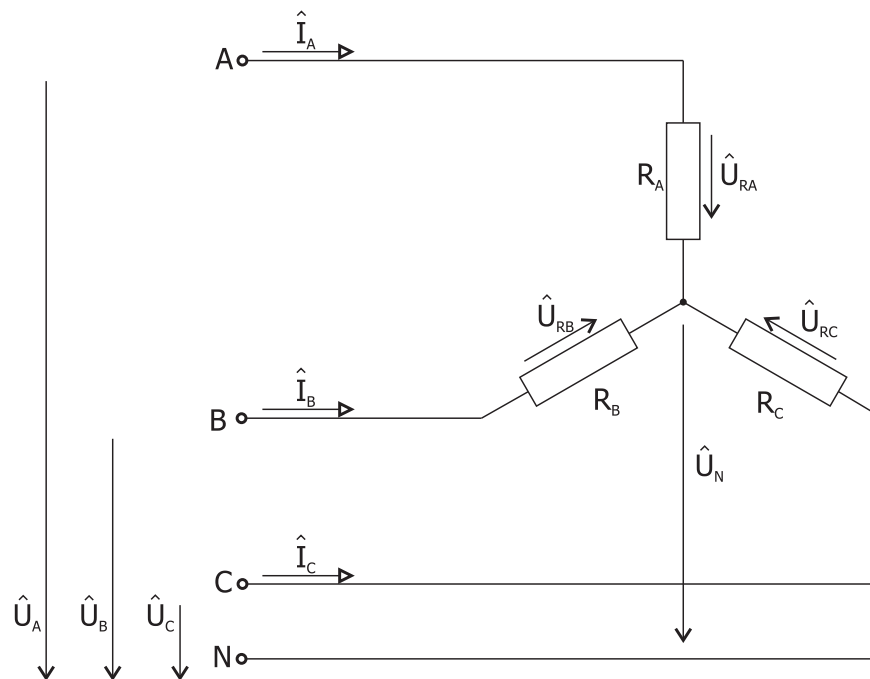
$$\hat{U}_N = \frac{U}{R_{ABC}} \left[\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{2R_B} - \frac{1}{2R_C} \right) + j \left(\frac{\sqrt{3}}{2R_B} - \frac{\sqrt{3}}{2R_C} \right) \right] \quad (19.11)$$

Pro souměrnou zátěž, $R = R_A = R_B = R_C$, ze vztahu (19.11) vyplývá, že na uzlu je nulové napětí.

Pro napětí na jednotlivých odporech ve hvězdě s nepřipojeným uzlem platí vztahy (plynou ze směru napětí v soustavě)

$$\begin{aligned}\hat{U}_{RA} &= \hat{U}_A - \hat{U}_N \\ \hat{U}_{RB} &= \hat{U}_B - \hat{U}_N \\ \hat{U}_{RC} &= \hat{U}_C - \hat{U}_N\end{aligned}\quad (19.12)$$

Na odporech jsou různá napětí odlišná od fázových. Měříme ovšem jen jejich efektivní hodnoty. Po dosazení numerických hodnot pro \hat{U}_N z (19.11) a pro fázová napětí \hat{U}_A , \hat{U}_B a \hat{U}_C ze vztahů (19.1) lze získat fázory napětí na jednotlivých odporech. Pak lze vypočítat jejich modul a porovnat s naměřenou hodnotou.



Obrázek 19.2: Nevyvedený uzel – třívodičová soustava

19.2.2 Zapojení do trojúhelníku

V zapojení do trojúhelníku opět pracujeme s fázory napětí a proudu, mají však jiné názvy i symboly. Síťová napětí mezi jednotlivými fázemi (a na jednotlivých odporech) označíme \hat{U}_{AB} , \hat{U}_{BC} a \hat{U}_{CA} . Dvojice indexů se mění cyklicky. Ve složkovém tvaru lze síťová napětí popsat těmito vztahy

$$\begin{aligned} \hat{U}_{AB} &= U \\ \hat{U}_{BC} &= U \left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \hat{U}_{CA} &= U \left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned} \quad (19.13)$$

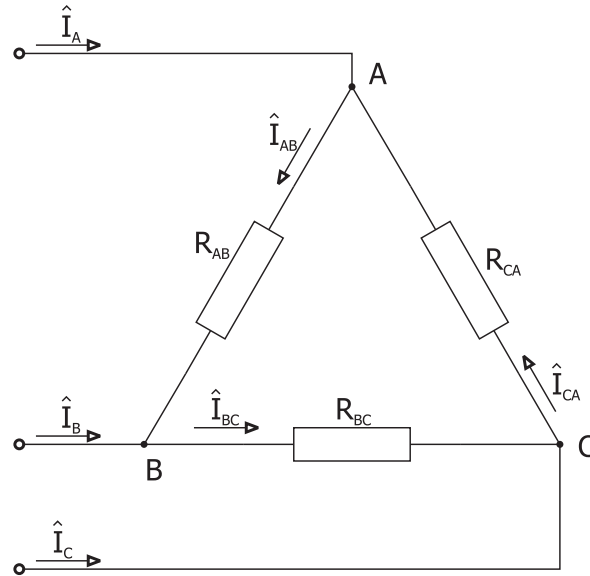
kde U je efektivní hodnota napětí měřená mezi svorkami. Obvykle $U = \sqrt{3}U_f$, kde U_f je fázové napětí. Ze vztahů (19.13) snadno plyne, že součet síťových napětí je nulový

$$\hat{U}_{AB} + \hat{U}_{BC} + \hat{U}_{CA} = 0 \quad (19.14)$$

Nesymetrická zátěž tvořená odpory R_{AB} , R_{BC} a R_{CA} je zapojena do trojúhelníku podle obr. 19.3. V trojúhelníku jsou dva typy proudů:

1. fázové \hat{I}_{AB} , \hat{I}_{BC} a \hat{I}_{CA} tekoucí zátěží,
2. síťové \hat{I}_A , \hat{I}_B a \hat{I}_C tekoucí přívodními vodiči

Názorně jsou oba typy proudů vyznačeny na obr. 19.3.



Obrázek 19.3: Trojúhelník – základní vztahy

Pro fázové proudy lze snadno s pomocí (19.13) odvodit vztahy

$$\begin{aligned}\hat{I}_{AB} &= \frac{\hat{U}_{AB}}{R_{AB}} = \frac{U}{R_{AB}} \\ \hat{I}_{BC} &= \frac{\hat{U}_{BC}}{R_{BC}} = \frac{U}{R_{BC}} \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \hat{I}_{CA} &= \frac{\hat{U}_{CA}}{R_{CA}} = \frac{U}{R_{CA}} \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)\end{aligned}\quad (19.15)$$

Z obr. 19.3 plynou s použitím vztahů (19.15) tyto vztahy pro síťové proudy

$$\begin{aligned}\hat{I}_A &= \hat{I}_{AB} - \hat{I}_{BC} = U \left[\left(\frac{1}{R_{AB}} + \frac{1}{2R_{CA}} \right) + j\frac{\sqrt{3}}{2R_{CA}} \right] = I_{AB} + \frac{I_{CA}}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}I_{CA} \\ \hat{I}_B &= \hat{I}_{BC} - \hat{I}_{AB} = U \left[-\left(\frac{1}{R_{AB}} + \frac{1}{2R_{BC}} \right) + j\frac{\sqrt{3}}{2R_{BC}} \right] = -I_{AB} - \frac{I_{BC}}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}I_{BC} \\ \hat{I}_C &= \hat{I}_{CA} - \hat{I}_{BC} = U \left[\left(\frac{1}{2R_{BC}} - \frac{1}{2R_{CA}} \right) - j\left(\frac{\sqrt{3}}{2R_{CA}} + \frac{\sqrt{3}}{2R_{BC}} \right) \right] = \\ &= \frac{I_{BC}}{2} - \frac{I_{CA}}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}(I_{CA} + I_{BC})\end{aligned}\quad (19.16)$$

Síťové proudy tedy můžeme vypočítat jednak z hodnoty napětí zdroje U a jednotlivých odporů, vztahy 19.15, jednak ze změřených fázových proudů I_{AB} , I_{BC} a I_{CA} , vztahy 19.16.

Ze vztahů (19.16) vyplývá, že součet síťových proudů je nulový, což potvrzuje správnost odvození či zápisu,

$$\hat{I}_A + \hat{I}_B + \hat{I}_C = 0 \quad (19.17)$$

Pro souměrnou zátěž, $R = R_{AB} = R_{BC} = R_{CA}$, z (19.16) plyne pro efektivní hodnoty síťových proudů vztah

$$I_A = I_B = I_C = \sqrt{3}\frac{U}{R} = \sqrt{3}I_f \quad (19.18)$$

kde $I_f = I_{AB} = I_{BC} = I_{CA}$ je fázový proud stejný ve všech spotřebičích.

19.3 Cíl cvičení a jeho zabezpečení

V laboratorním cvičení budou měřeny tyto dílčí úlohy:

- Měření voltampérové charakteristiky odporové zátěže.
- Měření fázových a sdružených napětí trojfázového zdroje naprázdno v zapojení do hvězdy. Měření síťových napětí naprázdno v zapojení trojfázového zdroje do trojúhelníku.
- Měření na souměrné zátěži zapojené do hvězdy s připojeným středem. Simulace výpadku fáze.
- Měření na nesouměrné zátěži zapojené do hvězdy s připojeným středem.
- Měření na souměrné zátěži zapojené do hvězdy s nepřipojeným středem. Simulace výpadku fáze.
- Měření na nesouměrné zátěži zapojené do hvězdy s nepřipojeným středem.
- Měření na souměrné zátěži zapojené do trojúhelníku. Simulace výpadku fáze.
- Měření na nesouměrné zátěži zapojené do trojúhelníku.

K dispozici jsou tyto měřicí přístroje a přípravky:

- Pevné:
 - Trojfázový zdroj.
- Přenosné:
 - Univerzální multimetry.
 - Přípravky se žárovkami.
 - Přípravky se zatěžovacím odporem.
 - Pomocný uzel.
- Měřené a pomocné prvky:
 - Speciální vodiče pro připojení multimetrů.
 - Spojovací vodiče

19.4 Popis nových přístrojů

Většina zařízení byla popsána v předchozích návodech, kromě trojfázového zdroje. Proto popíšeme pouze toto zařízení.

19.4.1 Trojfázový zdroj

Trojfázový zdroj má tyto vlastnosti a použití.

- Je tvořen třemi nezávislými transformátorky zapojenými do jednotlivých fází. Lze tedy libovolně kombinovat jednotlivá napětí.
- Každý transformátor je připojen ke dvěma svorkám. Počátek vinutí má index 0, konec index k.
- Jmenovité napětí je 12 V. Zdroj snese trvalý zkrat a tudíž musí být měkký. Se zatížením napětí značně klesá.
- Správnou funkci indikují svítící LED.
- Zdroj se zapíná trojfázovým spínačem.

19.4.2 Pomocné prvky

Kromě žárovek se jako spotřebič bude používat zatěžovací odpor o nominálním výkonu 10 W. Na každém pracovišti budou tři kusy 68 Ω , 100 Ω a 150 Ω . Aby bylo na první pohled zřejmé, že odporem prochází proud, jsou k němu paralelně protisměrně připojeny 2 LED přes srážecí odpor 1 k Ω , takže přípravek lze použít do napětí asi 25 V. V obvodu střídavého proudu svítí obě diody.

Přibyl pomocný uzel, obsahující dvě pětice zdírek, které slouží k vytvoření třetího a případně čtvrtého uzlu nutného pro trojfázová zapojení. Další dva uzly jsou na stole v blízkosti trojfázového zdroje.

Další nové propojovací prvky jsou vodiče, které na jedné straně obsahují speciální díl pro připojení do multimetru, na druhém konci je běžný banánek. Tím se snažíme vyhnout obtížnému zasouvání některých banánků do zdírek přístroje. Tyto vodiče slouží jen pro připojení multimetru.

19.5 Pokyny k měření

Tyto pokyny jsou řazeny logicky, vlastní měření by se mělo řídit minimem zásahů do zapojení. Proto doporučujeme měřit souměrnou zátěž ve čtyřvodičové a vzápětí ve třívodičové soustavě zapojené do hvězdy, povědáž stačí pouze vyměnit v nulovém vodiči ampérmetr za voltmetr. Pak se totéž provede pro nesouměrnou zátěž.

19.5.1 Měření voltampérové charakteristiky odporové zátěže

Odporová zátěž obsahuje luminiscenční diody, což jsou nelineární prvky. Určení jejího celkového odporu tedy není jednoduché, proto je na začátku zařazeno toto měření. Z hlediska trojfázové soustavy je toto měření pomocné, spadá do měření charakteristik, nicméně je nutné ke spolehlivému určení odporu zátěže.

Použijeme nejjednoduššího zapojení, zátěž připojíme ke stejnosměrnému zdroji, do série s ní zapojíme ampérmetr a paralelně k ní voltmetr. Napětí nastavujeme v rozsahu 8 až 24 V s krokem 2 V. Můžeme též měřit pro nízká napětí 0 až 3 V s krokem po 0,5 V a v rozsahu 3 až 8 V s krokem 1 V. Změříme všechny tři zátěže.

Kromě charakteristiky změříme odpor zátěže též multimetrem, tím získáme další informaci.

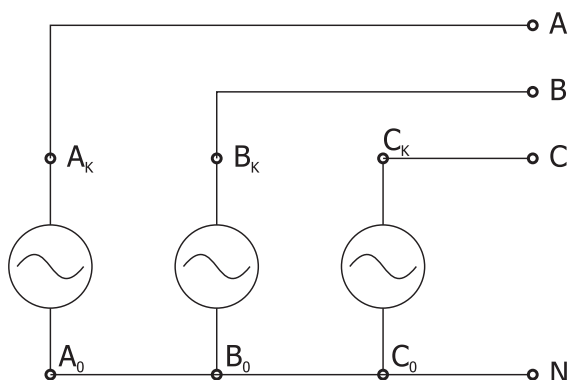
19.5.2 Měření napětí trojfázového zdroje naprázdno

Úkol:

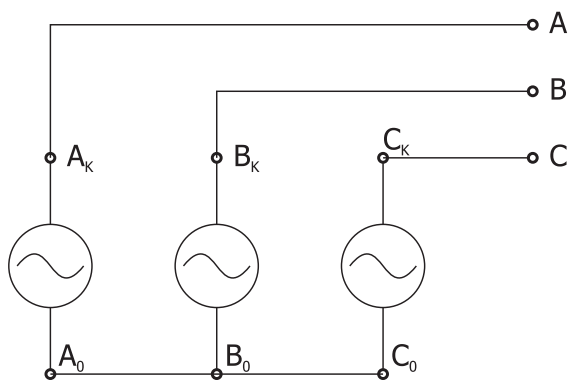
Změřit fázová a sdružená napětí trojfázového zdroje naprázdno v zapojení do hvězdy. Měřit síťová napětí v režimu naprázdno pro zapojení trojfázového zdroje do trojúhelníku.

Doporučený postup:

Pro případ hvězdy zapojíme svorky trojfázového zdroje podle obr. 19.4, čtyřvodičová soustava, případně podle obr. 19.5 pro třívodičovou soustavu. Prakticky to znamená, že propojíme pouze počátky vinutí dvěma vodiči kabelové očko – banánek. Fázová napětí měříme proti nulovému uzlu či vodiči (mezi odpovídající dolní a horní svorkou), sdružená napětí měříme mezi fázemi, (mezi všemi dvojicemi horních svorek). Postačuje sice jeden voltmetr, doporučuje se však použít tři. Pak je ihned vidět, jak je soustava ve skutečnosti souměrná. Pro případ trojúhelníku zapojíme svorky trojfázového zdroje podle obr. 19.6.



Obrázek 19.4: Zapojení zdroje do hvězdy – čtyřvodičové



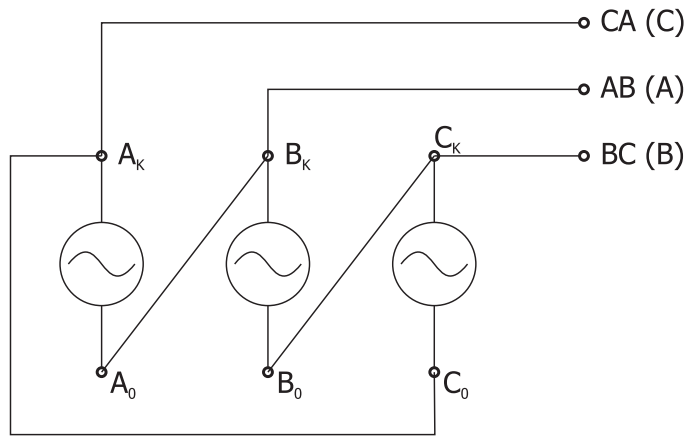
Obrázek 19.5: Zapojení zdroje do hvězdy – třívodičové

Symbole u vodičů udávají indexy spojených svorek v pořadí počátek konec (dvojice indexů) a index počáteční svorky. Prakticky to znamená, že cyklicky propojíme počátky a konce sousedních vinutí třemi vodiči kabelové očko – banánek. Síťová napětí měříme mezi všemi dvojicemi volných svorek. Postačuje sice jeden voltmetr, lepší postup je však použít tři. Pak je na první pohled jasné, zda je skutečná soustava souměrná.

19.5.3 Měření na souměrné zátěži zapojené do hvězdy s připojeným středem, čtyřvodičová soustava

Úkol:

Změřit všechny obvodové veličiny v souměrné zátěži zapojené do hvězdy a připojené

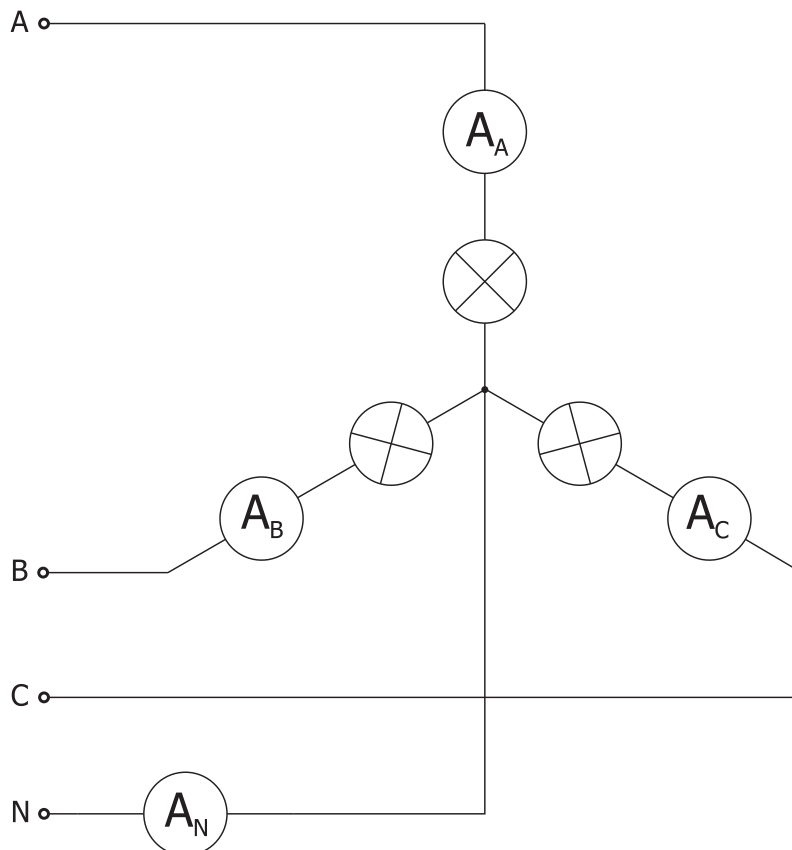


Obrázek 19.6: Zapojení zdroje do trojúhelníku

k nulovému uzlu zdroje. Simulovat vypínání spotřebičů, případně výpadky jednotlivých fází.

Doporučený postup:

Svorky trojfázového zdroje zapojíme podle obr. 19.4. Nulový vodič připojíme na uzel pod zdrojem. Při zapojení spotřebičů postupujeme podle schématu na obr. 19.7. Spotřebiči jsou tři žárovky na 12 V. Zapojíme je do hvězdy tak, že jednu svorku připojíme ke zvolené fázi zdroje, druhou pak do druhého společného uzlu na stole. Oba uzly spojíme vodičem. Po zapnutí zdroje by měly žárovky svítit.

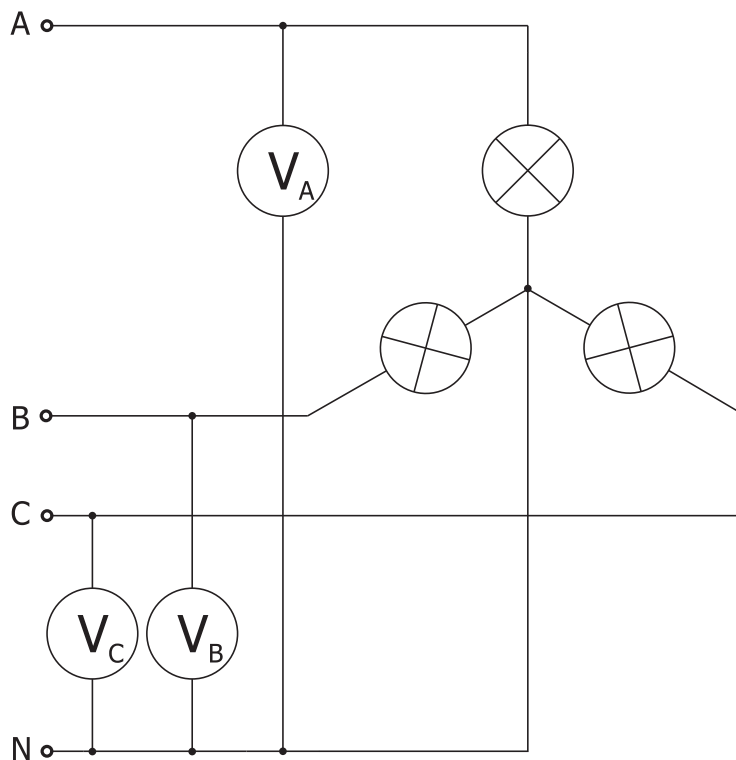


Obrázek 19.7: Měření proudu ve čtyřvodičovém zapojení do hvězdy

Nejdůležitějšími obvodovými veličinami jsou proudy, proto do každé fáze a též do spoje obou uzlů vložíme ampérmetr. Po zapnutí zdroje odečteme proudy. Nyní vypí-

náme fáze tak, že povolíme jednu nebo dvě žárovky. Posoudíme, zda se mění svítivost ostatních a odečteme všechny proudy, zejména proud nulovým vodičem. Při systematickém postupu by mělo být šest (nebo sedm) měření.

Zdroj je měkký, proto je nutno též změřit napětí na jednotlivých žárovkách, alespoň pro případ, že všechny svítí. To lze snadno, pro úplnost je zapojení uvedeno na obr. 19.8. Toto měření se provede až po dokončení měření s vypínáním fází v předchozím odstavci.



Obrázek 19.8: Měření fázových napětí ve čtyřvodičovém zapojení do hvězdy

19.5.4 Měření na nesouměrné zátěži zapojené do hvězdy s připojeným středem, čtyřvodičová soustava

Úkol:

Změřit všechny proudy a napětí v nesouměrné zátěži zapojené do hvězdy a připojené k nulovému uzlu zdroje.

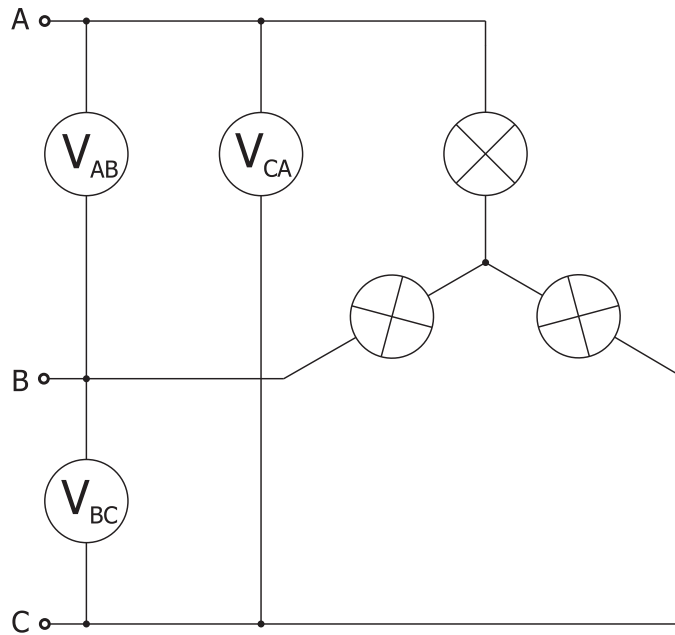
Doporučený postup:

Žárovky nahradíme odpory na přípravcích. Postupuje se přesně podle části 19.5.3 s výjimkou, že se nesimuluje vypadávání fází. Mělo by se změřit, kromě fázového, i sdružené napětí podle schématu na obr. 19.9.

19.5.5 Měření na souměrné zátěži zapojené do hvězdy s nepřipojeným středem, třívodičová soustava

Úkol:

Změřit všechny proudy v souměrné zátěži zapojené do hvězdy a nepřipojené k nulovému uzlu zdroje. Simulovat vypínání spotřebičů a výpadky jednotlivých fází.



Obrázek 19.9: Měření sdružených napětí ve hvězdě

Doporučený postup:

Tato úloha by se měla měřit bezprostředně po úloze 19.5.3. Na soustavu třívodičovou se přejde velice snadno odpojením vodiče spojujícího uzel zdroje a zátěže. Pokud to provedeme u zátěže tvořené stejnými žárovkami, nic se nezmění. Pokud se však žárovky liší výkonem, jas některé klesne, jiné se zvýší.

Úplně od začátku postupujeme takto. Svorky trojfázového zdroje zapojíme podle obr. 19.5. Nulový vodič připojíme na uzel pod zdrojem. Při zapojení spotřebičů postupujeme podle schématu na obr. 19.10. Spotřebiče tvoří tři žárovky na 12 V. Zapojíme je do hvězdy tak, že jednu svorku připojíme ke zvolené fázi zdroje, druhou pak do druhého společného uzlu na stole. Oba uzly však nyní **nespojíme** vodičem, ale mezi uzly zapojíme voltmetr podle obr. 19.10. Po zapnutí zdroje by měly žárovky svítit.

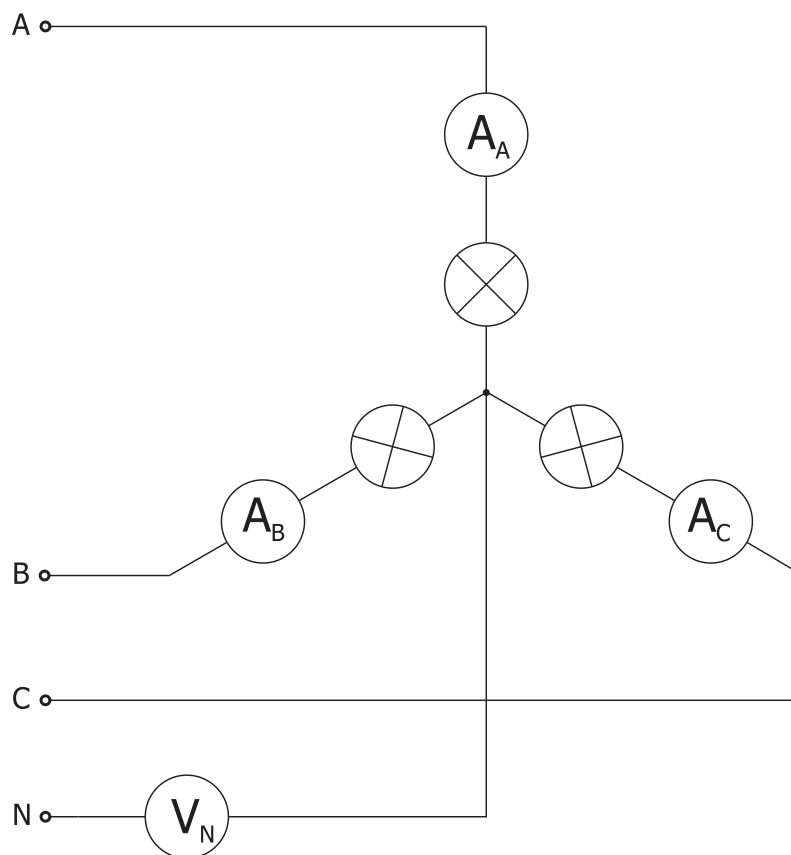
Pokud navazujeme na měření ve čtyřvodičové soustavě, ať již se žárovkami nebo odpory, je změna zapojení velmi jednoduchá. Mezi uzly zdroje a zátěže přerušíme spoj a pak vložíme voltmetr měřící napětí uzlu zátěže vůči nulovému uzlu zdroje. Srovnej též obr. 19.7 a obr. 19.10. Pokud je mezi uzly ampérmetr, stačí jej zapojit jako voltmetr.

Při měření odečítáme fázové proudy a napětí mezi uzly. Nyní vypínáme spotřebiče nebo rušíme fáze tak, že povolíme jednu nebo dvě žárovky. Posoudíme, zda se mění svítivost ostatních a odečteme všechny proudy a napětí, zejména napětí mezi uzly. Při systematickém postupu by mělo být šest (nebo sedm) měření.

V tomto případě je nutno též změřit napětí na jednotlivých žárovkách, a to ve všech případech. To lze snadno, pro úplnost je zapojení na obr. 19.11. Toto měření se provede až po dokončení měření s vypínáním fází v předchozím odstavci.

19.5.6 Měření na nesouměrné zátěži zapojené do hvězdy s nepřípojeným středem, třívodičová soustava**Úkol:**

Změřit všechny proudy v nesouměrné zátěži zapojené do hvězdy a nepřípojené k nulovému uzlu zdroje.



Obrázek 19.10: Měření proudu ve třívodičovém zapojení do hvězdy

Doporučený postup:

Tato úloha by se měla měřit bezprostředně po úloze 19.5.4. Odpojením vodiče mezi společnými uzly se změní údaje všech přístrojů a v případě žárovek s rozdílným výkonem se změní i jejich svítivost.

Pokud navazujeme na měření proudů v třívodičové soustavě se žárovkami, žárovky nahradíme odpory na přípravcích. Dále se postupuje přesně podle části 19.5.5 s výjimkou, že se nesimuluje vypadávání fází. Naproti tomu by se mělo změřit, kromě fázového, i sdružené napětí podle schématu na obr. 19.9

19.5.7 Měření na souměrné zátěži zapojené do trojúhelníku**Úkol:**

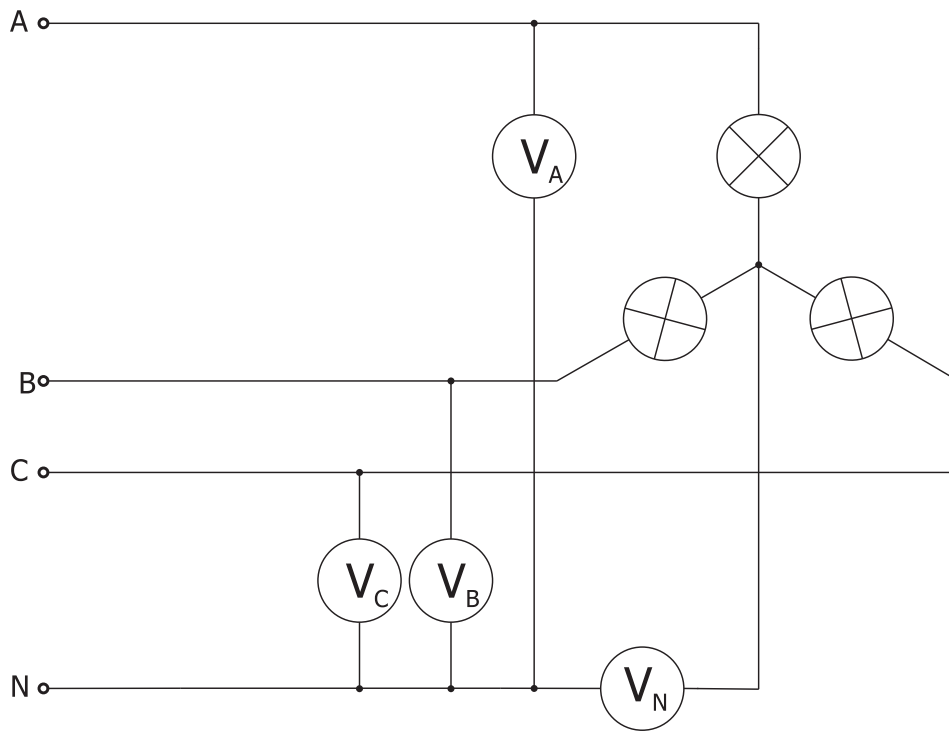
Změřit všechny proudy v souměrné zátěži zapojené do trojúhelníku. Simulovat vypínání spotřebičů a výpadky jednotlivých fází.

Doporučený postup:

Zdroj lze v tomto případě zapojit dvěma způsoby:

- Do trojúhelníku, pak ale síťové napětí bude nominálně jen 12 V, jak jsme se mohli přesvědčit v části 19.4.1. To odporuje běžné zkušenosti, ale je šetrné k 12 V žárovkám.
- Do hvězdy s nepřipojeným středem, pak bude síťové napětí 20 V, tedy takové, jaké je v praxi. Životnost žárovek na 12 V nominálních klesne.

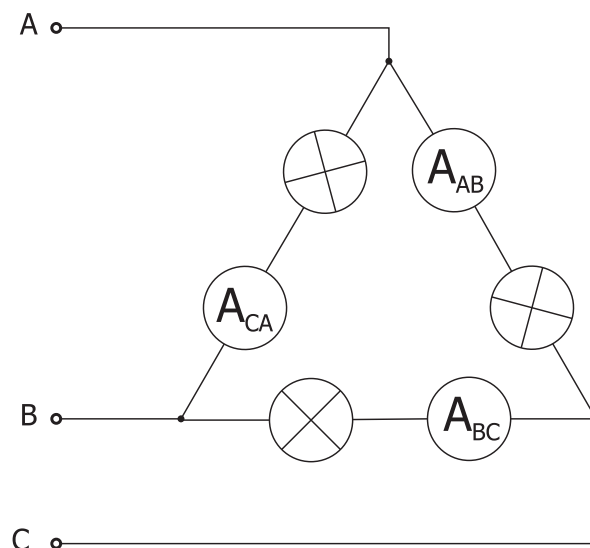
Dáme přednost běžné praxi a zdroj zapojíme do hvězdy s nepřipojeným středem podle obr. 19.5. Žárovky však necháme svítit jen nezbytně nutnou dobu.



Obrázek 19.11: Měření napětí ve třívodičovém zapojení do hvězdy

Zapojení se velmi zjednoduší, když všechny tři fáze zdroje připojíme k uzlům. Jako dva uzly použijeme uzly laboratorního stolu v blízkosti zdroje, třetí uzel bude pomocný, ve formě přípravku. Umístíme je tak, aby všechny tvořily přibližně trojúhelník a daly se mezi ně připojit spotřebiče.

Při zapojení spotřebičů postupujeme podle schématu na obr. 19.12. Spotřebiče tvoří tři žárovky na 12 V. Zatím nezapojujeme ampérmetry. Po zapnutí zdroje by měly žárovky svítit.

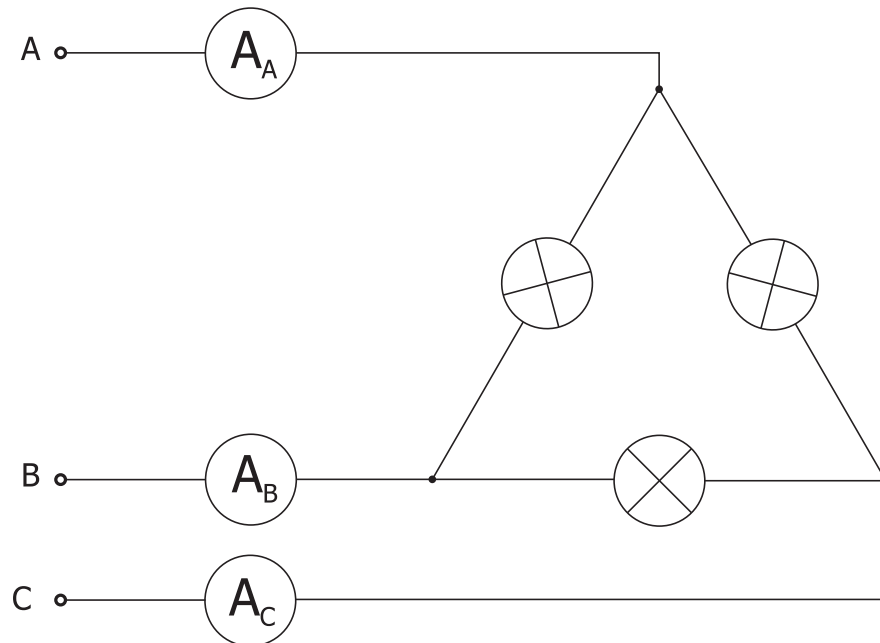


Obrázek 19.12: Měření fázového proudu v zapojení do trojúhelníku

Poněvadž máme za úkol měřit oba typy proudů, nejdříve do každé fáze vložíme ampérmetr podle obr. 19.12. Odečteme všechny proudy. V tomto zapojení můžeme simulovat dvě praktické události:

- Vypínání spotřebičů. Spotřebiče vypínáme tak, že povolíme jednu nebo dvě žárovky. Měříme fázové proudy, celkem se jedná o 6 (nebo 7) kombinací.
- Vypadávání fází. Fáze vypneme tak, že odpojíme vodič od zdroje. Abychom jej snadno našli, dáme jej do volného uzlu na přípravku. Sledujeme svítivost žárovek, čteme a zapisujeme fázové proudy. Celkem by se při systematickém postupu mělo jednat o šest měření.

Obě předchozí měření opakujeme pro síťové proudy. V tom případě vložíme ampérmetr do každého síťového přívodu podle obr. 19.13.



Obrázek 19.13: Měření síťového proudu v zapojení do trojúhelníku

Pro úplnost změříme skutečná síťová napětí v zapojení podle obr. 19.14.

19.5.8 Měření na nesouměrné zátěži zapojené do trojúhelníku

Úkol:

Změřit všechny proudy v nesouměrné zátěži zapojené do trojúhelníku.

Doporučený postup:

Žárovky nahradíme odpory s paralelně připojenými LED na přípravcích. Postupujeme podle části 19.5.7. Nesimulujeme vypínání spotřebičů a vypadávání fází.

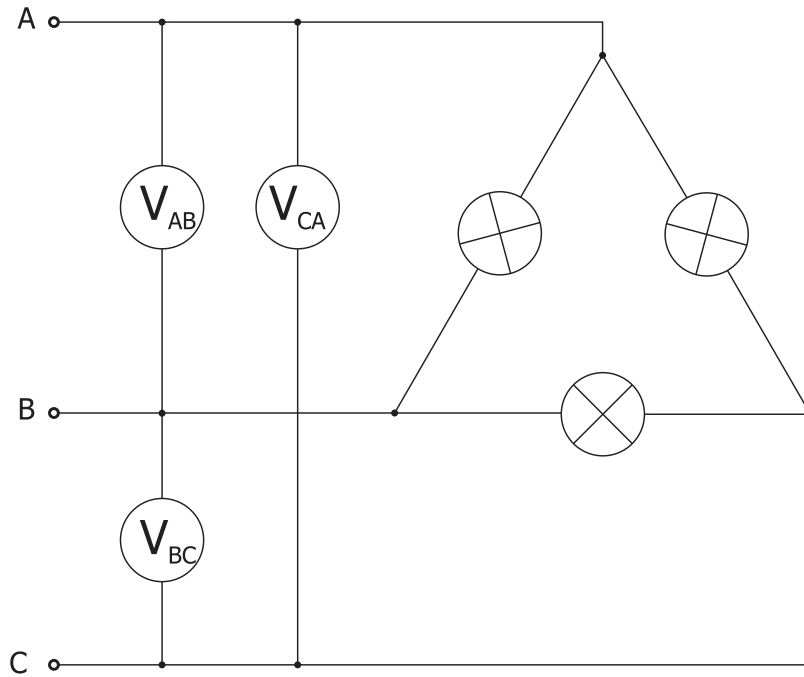
19.6 Zpracování dat

Na rozdíl od předchozích úloh se zde data zpracovávají pouze numericky. Některé výpočty jsou trochu více náročné. Návrhy na zpracování dat opět provedeme podle logického pořadí měření, ačkoliv praktické pořadí je poněkud jiné.

1. Určení odporu zátěže

Odpor zátěže můžeme určovat třemi způsoby:

- (a) Změřením na multimetru. Zde získáme přímo hodnotu.



Obrázek 19.14: Měření síťových napětí v zapojení do trojúhelníku

- (b) Z voltampérové charakteristiky, přesněji jejího lineárního průběhu pro vyšší napětí. Tuto část charakteristiky nahradíme přímkou a odpor určíme z její směrnice, jak jsme to již několikrát dělali u charakteristik.
- (c) Výpočtem ze jmenovitých hodnot odporů. K hlavnímu odporu 68Ω , 100Ω a 150Ω je paralelně připojena sériová kombinace srážecího odporu $1 \text{ k}\Omega$ a LED, kterou však při svícení můžeme nahradit odporem kolem 100Ω . Tedy paralelně k hlavnímu odporu je připojen odpor $1,1 \text{ k}\Omega$.

Odpor zátěže určíme všemi třemi metodami. Praktickému použití však nejlépe odpovídá druhá možnost, proto její výsledek použijeme v dalších výpočtech.

2. Fázové, sdružené a síťové napětí zdroje naprázdno

Určíme střední hodnotu a odchylky pro jednotlivá napětí od ní v procentech.

3. Souměrná zátěž v zapojení do čtyřvodičové hvězdy

Při přesně souměrné zátěži je proud tekoucí nulovým vodičem nulový a všechny fázové proudy tekoucí žárovkami stejné. Pokud se hodnoty poněkud liší, můžeme určit střední hodnotu fázových proudů a jejich odchylky pro reálnou symetrickou zátěž.

Numericky můžeme ověřit naměřenou hodnotu proudu nulovým vodičem I_N pomocí změřených fázových proudů I_A , I_B a I_C . Použijeme poslední část vztahu (19.7), tj.

$$\hat{I}_N = -I_A - I_B \left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - I_C \left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (19.19)$$

Postupujeme takto:

- (a) Do vztahu (19.19) dosadíme hodnoty fázových proudů I_A , I_B a I_C .
- (b) Vypočteme reálnou a imaginární část \hat{I}_N .

- (c) Vypočteme absolutní hodnotu $I_N = |\hat{I}_N|$, což je měřený proud tekoucí nulovým vodičem.

Předposlední část vztahu (19.7) nelze použít, poněvadž žárovka je nelineární prvek, její odpor není konstantní.

Tento postup by se měl aplikovat zejména pro případ, kdy nesvítí jedna žárovka. Pak je totiž zátěž silně nesymetrická a vztahuje se vlastně již k dalšímu bodu 4. Pro dvě odpojené žárovky je ověření triviální.

4. Nesouměrná zátěž v zapojení do čtyřvodičové hvězdy

Poněvadž zátěž je v tomto případě lineární, proud tekoucí nulovým vodičem I_N ověříme dvěma způsoby, jednak z fázových proudů podle předchozího bodu 3, jednak podle předposlední část vztahu (19.7), tj.

$$\hat{I}_N = U \left[\left(-\frac{1}{R_A} + \frac{1}{2R_B} + \frac{1}{2R_C} \right) + j \left(\frac{\sqrt{3}}{2R_C} - \frac{\sqrt{3}}{2R_B} \right) \right] \quad (19.20)$$

V tomto případě potřebujeme znát fázové napětí U změřené pro tuto zátěž a změřené hodnoty odporů R_A , R_B a R_C . Postupujeme takto:

- Do vztahu (19.20) dosadíme fázové napětí U a hodnoty odporů R_A , R_B a R_C .
- Vypočteme reálnou a imaginární část proudu nulovým vodičem \hat{I}_N ale i jeho modul a fázový úhel.
- Vypočteme absolutní hodnotu $I_N = |\hat{I}_N|$, což je měřený proud tekoucí nulovým vodičem.

Poněvadž je zátěž odporová, fázory fázových proudů mají směr fázových napětí, viz (19.1). Dále jsme v předchozí části určili fázor proudu nulovým vodičem, tj. jeho modul a úhel. Proto můžeme nakreslit ve vhodném měřítku proudový fázorový diagram pro tuto zátěž.

5. Souměrná zátěž v zapojení do třívodičové hvězdy

Při přesně souměrné zátěži je napětí uzlu nulové a napětí na všech žárovkách jsou stejná. Z naměřených hodnot, pokud se liší, můžeme tedy určit střední hodnotu napětí na žárovkách a jeho odchylky pro reálnou symetrickou zátěž. Poněvadž odpor žárovek není konstantní, nelze použít vztah (19.11) pro výpočet napětí mezi uzly a pak vztah (19.12) pro určení napětí na žárovkách. Jednoduchý vztah pro výpočet napětí na žárovkách ze změřených efektivních hodnot fázových napětí a napětí uzlu neexistuje.

6. Nesouměrná zátěž v zapojení do třívodičové hvězdy

Naměřené fázové napětí U a změřené hodnoty odporů R_A , R_B a R_C použijeme pro výpočet napětí mezi uzly podle vztahu (19.11), tj.

$$\hat{U}_N = \frac{U}{R_{ABC}} \left[\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{2R_B} - \frac{1}{2R_C} \right) + j \left(\frac{\sqrt{3}}{2R_B} - \frac{\sqrt{3}}{2R_C} \right) \right] \quad (19.21)$$

$$R_{ABC} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}$$

Pak můžeme použít vztahu (19.12), tj

$$\begin{aligned} \hat{U}_{RA} &= \hat{U}_A - \hat{U}_N & \hat{U}_A &= U \\ \hat{U}_{RB} &= \hat{U}_B - \hat{U}_N & \hat{U}_B &= U \left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \hat{U}_{RC} &= \hat{U}_C - \hat{U}_N & \hat{U}_C &= U \left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned} \quad (19.22)$$

pro určení fázorů napětí na žárovkách. Ve vztazích (19.22) jsou též uvedeny fázory fázových napětí.

Při výpočtu fázorů a efektivních hodnot všech napětí postupujeme takto:

- Do vztahu (19.21) dosadíme fázové napětí U a hodnoty odporů R_A , R_B a R_C .
- Vypočteme napětí uzlu \hat{U}_N v komplexním tvaru, a to jak složkovém, tak exponenciálním.
- Z druhých vztahů v (19.22) (viz též (19.1)), vypočteme fázová napětí \hat{U}_A , \hat{U}_B a \hat{U}_C v komplexním tvaru, zejména uvedeme složkový tvar.
- Komplexní hodnoty napětí uzlu \hat{U}_N a napětí fází \hat{U}_A , \hat{U}_B a \hat{U}_C postupně dosazujeme do prvních částí vztahů (19.22). Tak získáme komplexní napětí na odporech \hat{U}_{RA} , \hat{U}_{RB} a \hat{U}_{RC} . Vyjádříme je složkově i exponenciálně.
- Uurčíme absolutní hodnoty (moduly) napětí uzlu $U_N = |\hat{U}_N|$ a napětí na odporech $U_{RA} = |\hat{U}_{RA}|$, $U_{RB} = |\hat{U}_{RB}|$ a $U_{RC} = |\hat{U}_{RC}|$. To jsou napětí, která jsme skutečně měřili.

Poněvadž známe fázory (absolutní hodnoty a fázové úhly) napětí uzlu, fázových napětí a napětí na odporech, sestavíme z nich ve vhodném měřítku fázorový diagram pro všechna napětí této soustavy. Poněvadž fázové proudy mají směr napětí na spotřebičích, můžeme též sestavit proudový fázorový diagram, obsahující fázová napětí a fázové proudy ve třívodičové soustavě.

7. Souměrná zátěž v zapojení do trojúhelníku

Pro přesně souměrnou zátěž jsou všechny síťové a fázové proudy stejné a měl by mezi nimi platit vztah (19.18). Pokud se skutečné proudy liší, můžeme zjistit jejich střední hodnotu, odchylky od ní a posoudit platnost vztahu (19.18) pro střední hodnoty.

V zapojení do trojúhelníku nemůžeme určit fázové proudy se síťových (které jediné lze v praxi měřit), poněvadž soustava rovnic pro jejich určení (19.16) je závislá, což potvrzuje vztah (19.17). Opačný převod je však možný. Poněvadž jsme změřili fázové proudy, použijeme poslední části vztahů (19.16), které zde přepíšeme

$$\begin{aligned} \hat{I}_A &= I_{AB} + \frac{I_{CA}}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} I_{CA} \\ \hat{I}_B &= -I_{AB} - \frac{I_{BC}}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} I_{BC} \\ \hat{I}_C &= \frac{I_{BC}}{2} - \frac{I_{CA}}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} (I_{CA} + I_{BC}) \end{aligned} \quad (19.23)$$

Postupujeme takto:

- Do vztahu (19.23) dosadíme hodnoty fázových proudů I_{AB} , I_{BC} a I_{CA} .
- Vypočteme komplexní hodnotu síťových proudů \hat{I}_A , \hat{I}_B a \hat{I}_C , jednak ve formě reálné a imaginární části, jednak jako absolutní hodnotu a fázový úhel.
- Vypočteme absolutní hodnoty síťových proudů u $I_A = |\hat{I}_A|$ atd. To jsou již hodnoty, které lze měřit.

Poněvadž je zátěž odporová, fázory fázových proudů mají směr fázových napětí, viz (19.13). Dále jsme v předchozí části určili fázory síťových proudů, tj. jejich modul a úhel. Proto můžeme nakreslit ve vhodném měřítku proudový fázorový diagram pro tuto zátěž.

Tento postup by se měl aplikovat zejména pro případ, kdy nesvítí jedna žárovka nebo vypadla jedna fáze. Pak je totiž zátěž silně nesymetrická a vztahuje se vlastně již k dalšímu bodu 8. Pro dvě odpojené žárovky nebo vypadlé fáze je ověření mnohem jednodušší.

8. Nesouměrná zátěž v zapojení do trojúhelníku

Již v předchozím bodu 7 jsme ukázali, že můžeme vypočítat pouze síťové proudy z fázových. V případě lineární odporové zátěže máme dvě možnosti: použít poslední vztahy v (19.16) a dosadit fázové proudy I_{AB} , I_{BC} a I_{CA} , nebo použít předposlední vztahy v (19.16) a dosadit síťové napětí U a hodnoty odporů ve fázích, tj. R_{AB} , R_{BC} a R_{CA} . První postup nebudeme opakovat, je v předchozím bodu 7. Druhý přístup vychází z předposledních vztahů v (19.16), které zde opíšeme

$$\begin{aligned}\hat{I}_A &= U \left[\left(\frac{1}{R_{AB}} + \frac{1}{2R_{CA}} \right) + j \frac{\sqrt{3}}{2R_{CA}} \right] \\ \hat{I}_B &= U \left[- \left(\frac{1}{R_{AB}} + \frac{1}{2R_{BC}} \right) + j \frac{\sqrt{3}}{2R_{BC}} \right] \\ \hat{I}_C &= U \left[\left(\frac{1}{2R_{BC}} - \frac{1}{2R_{CA}} \right) - j \left(\frac{\sqrt{3}}{2R_{CA}} + \frac{\sqrt{3}}{2R_{BC}} \right) \right]\end{aligned}\quad (19.24)$$

Při výpočtu síťových proudů postupujeme takto:

- Do vztahu (19.24) dosadíme síťové napětí U a hodnoty odporů R_{AB} , R_{BC} a R_{CA} .
- Vypočteme komplexní hodnotu síťových proudů \hat{I}_A , \hat{I}_B a \hat{I}_C ve složkovém i exponenciálním tvaru.
- Vypočteme absolutní hodnotu síťových proudů, tj. $I_A = |\hat{I}_A|$ atd.

Můžeme sestavit fázorový diagram pro oba typy proudů a síťová napětí ve vhodném měřítku, viz též závěr předchozího bodu 7. Síťová napětí, která jsou zde navíc, mají směr fázových proudů. Správně je tomu právě naopak, síťová napětí budí fázové proudy.

19.7 Diskuse

Před čtením této části by studenti měli být schopni odpovědět tyto otázky:

1. Čtyřvodičovou a třívodičovou trojfázovou soustavu lze považovat v některých případech za duální. Které to jsou případy?
2. Vztahy pro fázory napětí v trojfázové soustavě jsme vyjadřovali ve složkovém tvaru. Jaký je jejich exponenciální tvar?
3. Jaký je vztah mezi efektivními hodnotami sdružených a fázových napětí v zapojení do hvězdy?
4. Jaký je vztah mezi efektivními hodnotami síťových a fázových proudů v zapojení do trojúhelníku?
5. Jak spolu souvisí sdružená a síťová napětí?
6. Proč není možné obecně v zapojení do trojúhelníku určit fázové proudy ze síťových?
7. Proč měříme odpor zátěže několika způsoby? Proč mohou vyjít odlišné hodnoty?
8. Lze zpochybnit údaj měřících přístrojů?
9. Proč u žárovek neměříme a při výpočtech nepoužíváme jejich odpor?
10. Proč se může změnit intenzita světla u žárovek v zapojení do hvězdy při odpojení nulového vodiče?
11. Proč ve čtyřvodičovém zapojení do hvězdy může svítit jedna žárovka a ve třívodičovém nemůže?
12. Je v námi měřeném zaponení do hvězdy rozdíl mezi vypadáváním fáze a vypnutím spotřebiče? Jak je tomu v zapojení do trojúhelníku?

První bod diskuse je zaměřen všeobecně (není očíslován), další očíslované body se již vztahují k jednotlivým měřením.

Elektromagnetická kompatibilita - EMC

V důsledku nelinearit, rušení a dalších negativních jevů není síťové napětí přísně harmonické. Kromě základní harmonické o frekvenci 50 Hz, kterou uvažujeme při použití teorie obvodů, existují vyšší harmonické, které způsobují zkreslení. Toto zkreslení může dosahovat poměrně vysoké hodnoty, v naší síti je až 5 %. Důsledky vyvolanými odchylkami od harmonického průběhu se zabývá obor elektromagnetická kompatibilita.

Poněvadž průběh napětí a proudu není harmonický, je otázkou, jaká je jeho efektivní hodnota. Drahé měřicí přístroje označené TRUE RMS měří efektivní hodnotu podle definice, takže o údajích není pochyb. Levné měřicí přístroje, jaké v laboratoři používáme, však měří efektivní hodnotu správně jen pro harmonický průběh. Při zkresleném průběhu není jasné, co údaj vlastně znamená. Tato skutečnost může být jednou z příčin odchylek mezi měřením a výpočtem.

1. Nelineární spotřebič

Žárovka je bezesporu mírně nelineární spotřebič, její odpor není přesně definován, a proto nepoužíváme vztahy, kde vystupují odpory spotřebičů. Odporová zátěž tvořená výkonovým odporem je prakticky lineární, její linearitu však narušuje indikační LED. Proto se měří voltampérová charakteristika zátěže. Pro malá napětí, do 3 V, by se na ní měla projevit nelinearita, dále by měla být lineární. Tato charakteristika tedy umožní posoudit, jak je odporová zátěž lineární. Je nutno si např.

uvědomit, že napětí kmitá mezi -20 V a 20 V nebo více, tedy střední nelineární úsek se projeví málo.

Pokud jde o určení odporu této zátěže, jednotlivé metody lze porovnat takto:

- (a) Změření na multimetru. Nevíme jakou metodou multimetr měří, tedy těžko můžeme posoudit, jak se projeví nelinearita měřeného prvku. Pokud měří odpor pomocí Ohmova zákona při stejnosměrném napětí asi 1 V, dioda je uzavřena, srážecí odpor odpojen, změří se tedy jen hlavní odpor.
- (b) Z lineárního průběhu voltampérové charakteristiky se určí odpor spolehlivěji. V tomto úseku je pracovní bod převážnou dobou.
- (c) Výpočet ze jmenovitých hodnot všech odporů je zatížen neurčitostí odporu LED. Dále se neberou v úvahu tolerance.

Je zřejmé, že nejpřesnější a nejhodnověrnější metodou určení odporu je voltampérová charakteristika. Na druhé straně je zajímavé porovnat všechny tři výsledky.

2. Měření fázových, síťových a sdružených napětí naprázdno

Zde můžeme porovnat relativní odchylky od střední hodnoty a posoudit, jak je používána trojfázová soustava souměrná, tedy kolik procent činí její nesouměrnost.

3. Souměrná zátěž ve čtyřvodičovém zapojení do hvězdy

- (a) Kvantitativně lze posoudit jak klesnou napětí po připojení zátěže v porovnání s napětími naprázdno.
- (b) Lze zjistit nesouměrnost zátěže a porovnat ji s nesouměrností zdroje.
- (c) Kvalitativně by se mělo posoudit, jak se projeví vypínání jednotlivých spotřebičů v hodnotách proudů a napětí, např. pomocí schématu a načrtnutého fázorového diagramu.
- (d) Pro nesymerickou zátěž získanou vyšroubováním jedné žárovky by měl být k dispozici vypočítaný proud nulovým vodičem. Ten se porovná s naměřenou hodnotou a případný rozdíl se vysvětlí. Pro všechny proudy by měl být k dispozici fázorový diagram, kde by pro názornost měla být i fázová napětí. Z něho lze ověřit, zda je proud nulovým vodičem orientován v souladu s fyzikálním názorem.

4. Nesouměrná zátěž ve čtyřvodičovém zapojení do hvězdy

Především lze porovnat proud nulovým vodičem vypočteným oběma způsoby s naměřenou hodnotou. Případný rozdíl by se měl vysvětlit. Dále lze určit jeho posuv vůči fázovým proudům a napětím na základě fázorového diagramu. Lze diskutovat přesnost a vhodnost obou výpočtů, zejména z hlediska vstupních hodnot.

5. Souměrná zátěž v třívodičovém zapojení do hvězdy

- (a) Kvalitativně popsat a vysvětlit, co se stane po odpojení nulového vodiče a jak to souvisí s pozorováním.
- (b) Kvantitativně posoudit, jak klesnou oba typy napětí po připojení zátěže v porovnání s napětími naprázdno.
- (c) Kvalitativně by se mělo posoudit, jak se projeví vypínání jednotlivých spotřebičů v hodnotách proudů a napětí, např. pomocí schématu a načrtnutého fázorového diagramu.

6. Nesouměrná zátěž v třívodičovém zapojení do hvězdy

V tomto případě lze porovnat vypočítané napětí uzlu s naměřenou hodnotou a pokusit se vysvětlit případný rozdíl. Totéž lze udělat pro vypočtená a naměřená napětí na odporech. Pomocí fázorového diagramu by se mělo zdůraznit, že tato napětí nejsou ve fázi s fázovými napětími a vysvětlit, proč tomu tak je.

7. Souměrná zátěž v zapojení do trojúhelníku

- (a) Kvantitativně posoudit jak klesnou síťová napětí po připojení zátěže v porovnání s napětími naprázdno.
- (b) Kvalitativně vysvětlit, co se děje při vypínání jednotlivých spotřebičů nebo výpadku fází pomocí elektrického schématu. Pomocí načrtnutého fázorového diagramu ukázat, jak se to projeví ve velikosti proudů a tudíž i svítivosti žárovek. Posoudit, jak je vysvětlení v souladu s pozorováním.
- (c) Měl by se vysvětlit rozdíl mezi vypínáním spotřebičů a vypadáváním fází.
- (d) Pro všechny zapojené žárovky diskutovat nesymetrii a platnost vztahu mezi síťovými a fázovými proudy.
- (e) Porovnat vypočtené a naměřené hodnoty síťových proudů pro jednu odpojenou žárovku.

8. Nesouměrná zátěž v zapojení do trojúhelníku

Porovnat naměřené a vypočtené hodnoty síťových proudů. Vypočtené hodnoty by měly být získány dvěma způsoby. Jeden používá změřených proudů, druhý síťová napětí a hodnoty odporů. Lze diskutovat věrohodnost každého z nich, přesnost měření proudů, přesnost určení odporů, apod. Dále by se mělo ukázat, zda fázorový diagram je ve shodě s fyzikální představou.

19.8 Závěr

V závěru by se měly shrnout dosažené výsledky, nové poznatky, jejich význam, použití, apod. Závěr by se mohl soustředit na tyto body:

1. Která metoda je nejvhodnější k určení celkového odporu zátěže s LED.
2. Zda pozorování souhlasí s kvalitativním zdůvodněním.
3. Jaké praktické situace se podařilo v zapojení simulovat.
4. Jaká byla shoda mezi naměřenými a vypočtenými hodnotami.
5. K čemu slouží fázorové diagramy a co se z nich vyčetlo.
6. Zda se podařilo všechny jevy kvantitativně či alespoň kvalitativně popsat a fyzikálně vysvětlit.
7. Jak ovlivňuje výsledky rušení a nízká kvalita sítě.

V případě, že při některém měření byly problémy, připomeneme je zde. Též uvedeme příčiny, proč se případně některé měření nepodařilo realizovat.

Literatura

- [1] MIKULEC, Milan; HAVLÍČEK, Václav. *Základy teorie elektrických obvodů 1*. Praha : ČVUT, 2004. 252 s. ISBN 80-01-02519-5
- [2] MIKULEC, Milan; HAVLÍČEK, Václav. *Základy teorie elektrických obvodů 2*. Praha : ČVUT, 2005. 160 s. ISBN 80-01-02462-8
- [3] ČMEJLA, Roman; HAVLÍČEK, Václav; ZEMÁNEK, Ivan. *Základy teorie elektrických obvodů 1, cvičení*. Praha : ČVUT, 2000. 134 s. ISBN 80-01-02150-5
- [4] ČMEJLA, Roman; HAVLÍČEK, Václav; ZEMÁNEK, Ivan. *Základy teorie elektrických obvodů 2, cvičení*. Praha : ČVUT, 1999. 191 s. ISBN 80-01-02060-6
- [5] BIOLEK, Dalibor. *Řešíme elektrické obvody*. Praha : BEN - technická literatura, 2004. 520 s. ISBN 80-7300-125-X
- [6] MYSLÍK, Jiří. *Elektrické obvody (Příručka pro praxi a učebnice pro střední a vysoké školy)*. 2. vyd. Praha : BEN - technická literatura, 1998. 256 s. ISBN 80-86056-19-8

