

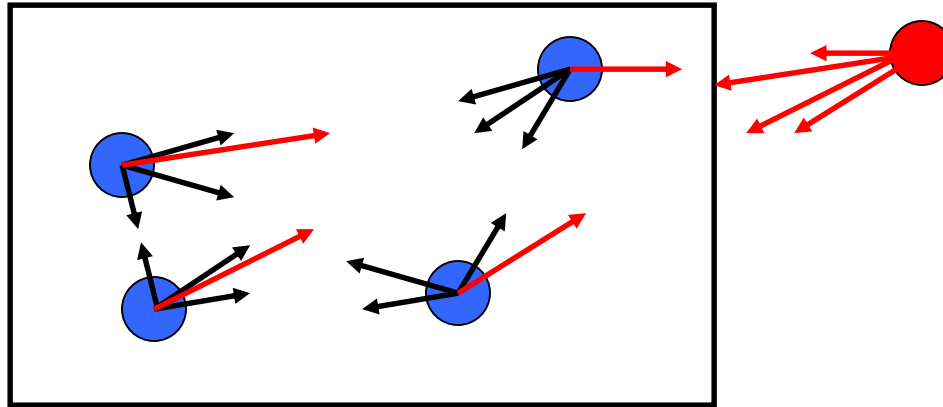
# Tělesa s rozloženou hmotou

Aproximace rozložené hmoty těles pomocí

- Soustava hmotných bodů
- Tuhé těleso
- Kontinuum
- Kvantová částice
- ...

# Vnitřní a vnější síly

Soustava hmotných bodů



$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i^{\text{vnitřní}} + \sum_i \vec{F}_i^{\text{vnější}}$$

$$\sum_i \vec{F}_i^{\text{vnitřní}} = \vec{0}$$

# Soustava hmotných bodů

Izolovaná soustava HB – nepůsobí vnější síly

$$\vec{F}_i^{\text{vnější}} = \vec{0}$$

V izolované soustavě HB se zachovává  
hybnost soustavy

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$$

# Hmotný střed - těžiště

Nahrazuje SHB jedním bodem se soustředěnou hmotností a silou

Pohybová rovnice pro SHB

$$\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\sum_i m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} (\sum_i m_i \vec{r}_i) = (\sum_i m_i) \frac{d^2 \vec{r}_S}{dt^2}$$

Hmotný střed

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

# Moment hybnosti, moment síly

Moment hybnosti  $\vec{b} = \vec{r} \times \vec{p}$

Moment síly  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Druhá věta impulsová

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{M}$$

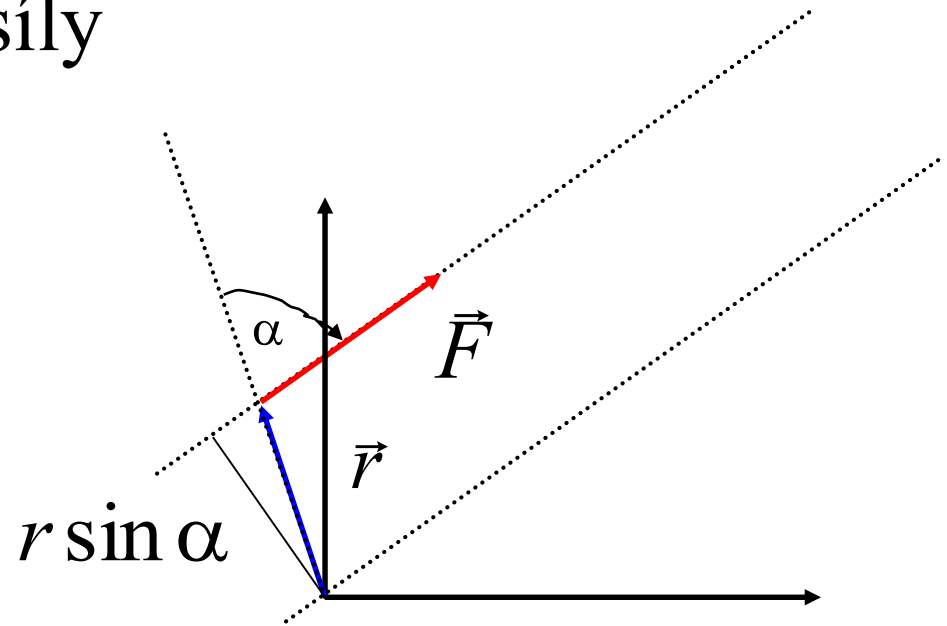
# Moment síly

Rameno síly

Vektorová přímka síly

Velikost momentu síly

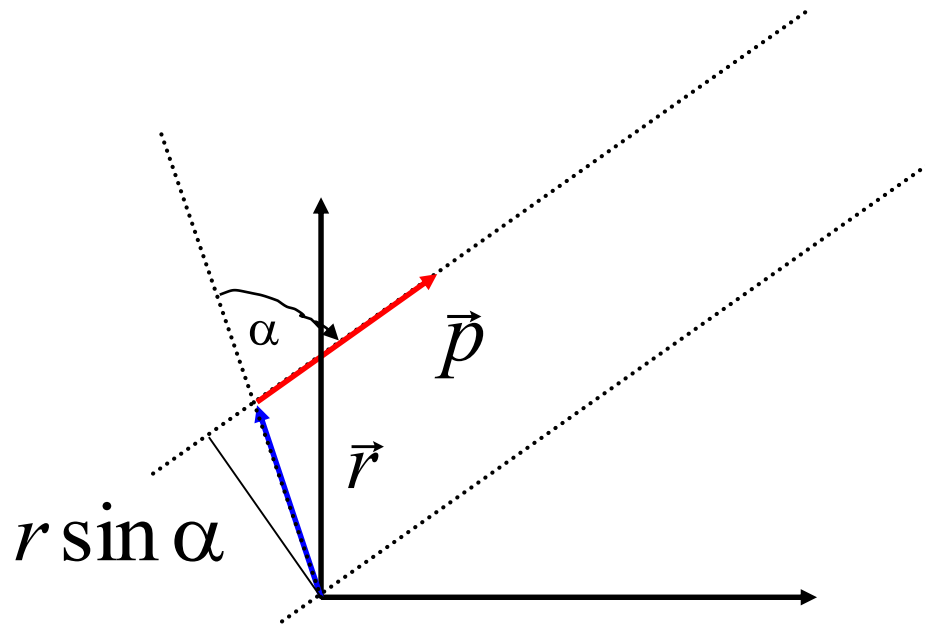
$$M = rF \sin \alpha$$



# Moment hybnosti

Velikost momentu hybnosti

$$b = rp \sin \alpha$$



# Moment hybnosti soustavy

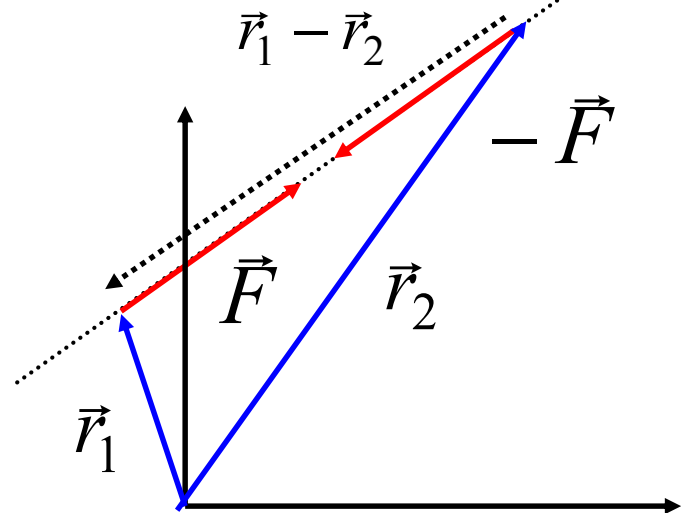
Druhá věta impulspvá pro SHB - vnější a  
vnitřní síly

$$\sum \frac{d\vec{b}}{dt} = \sum (\vec{r} \times \vec{F}^{\text{vnější}} + \vec{r} \times \vec{F}^{\text{vnitřní}}) = \sum (\vec{r} \times \vec{F}^{\text{vnější}})$$

Moment vnitřních sil

$$\vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 \parallel \vec{F}$$





# Tuhé těleso

Těleso, které se ani největší silou nijak nedeformuje, má své nenulové rozměry

Síly mohou působit v různých bodech tělesa!

# Hmotný střed tuhého tělesa

Bod kde si lze představit soustředěnou veškerou hmotu tělesa

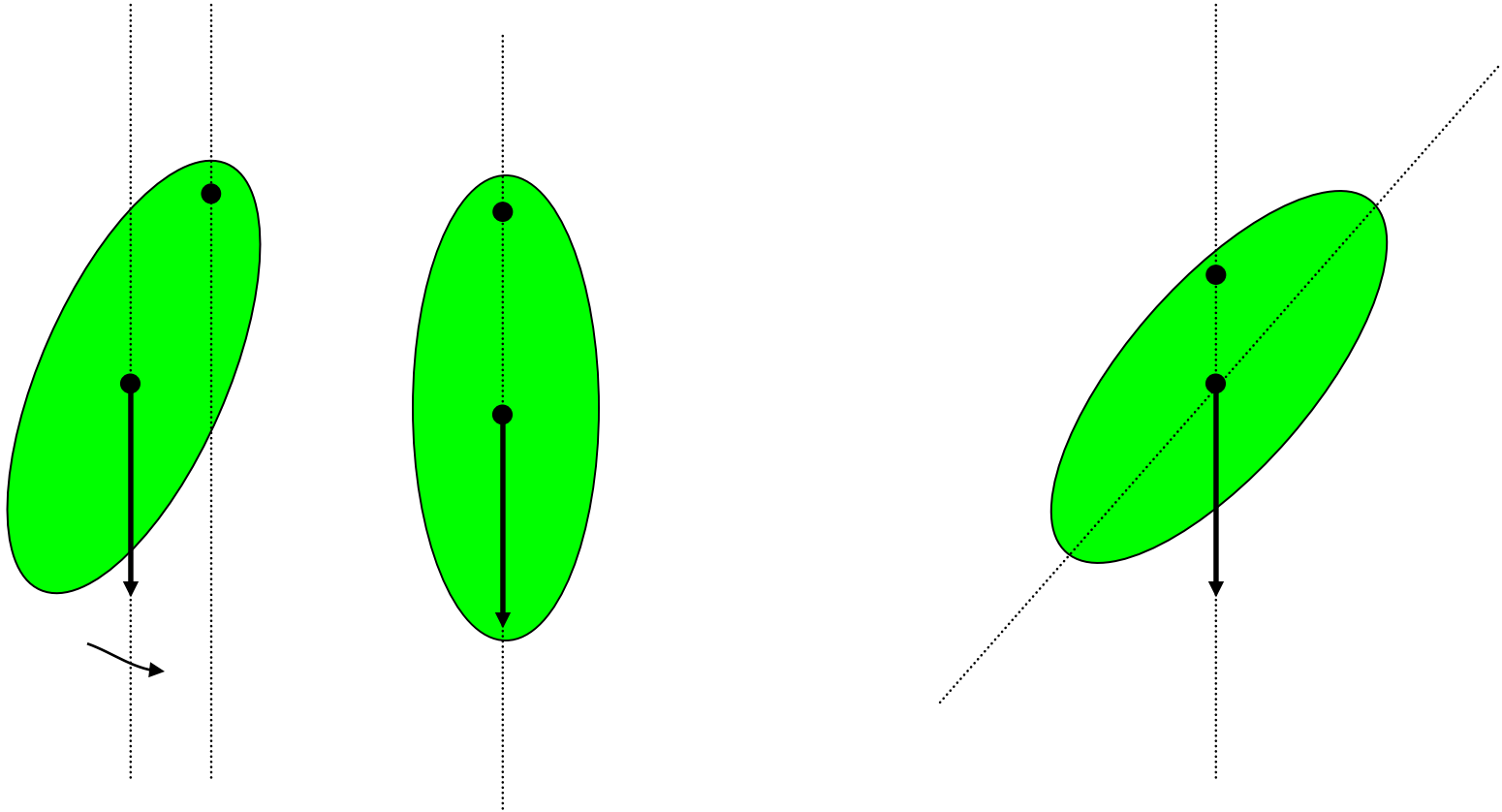
Hustota tělesa  $\rho = \frac{m}{V}$

Souřadnice hmotného středu

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \rightarrow \frac{\int_{(m)} \vec{r} dm}{\int_{(m)} dm}$$

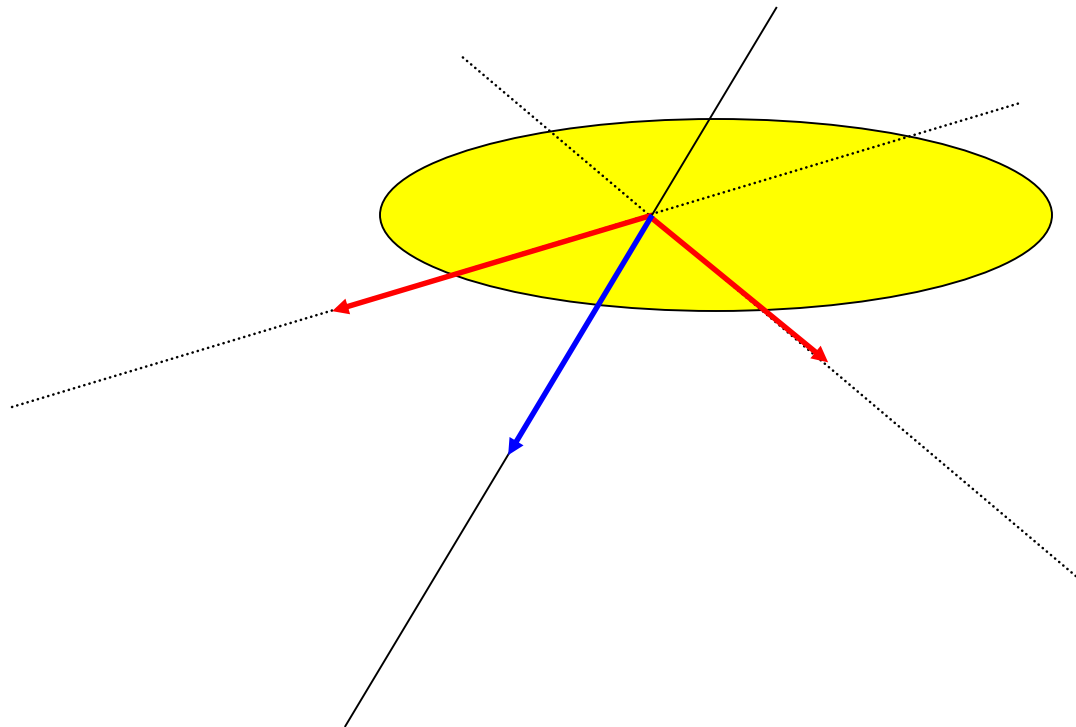
# Těžiště

- Tíže v gravitačním poli Země



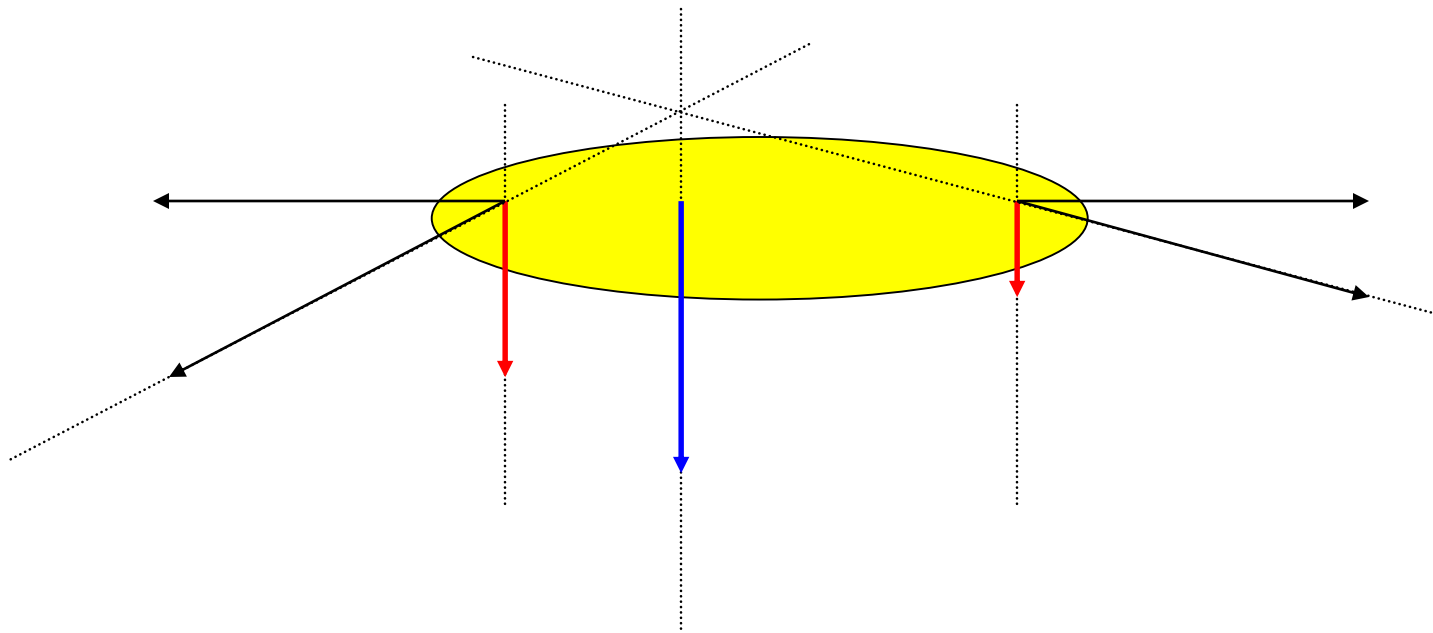
# Působení síly na tuhé těleso

- Síly mohou působit v různých bodech tělesa



# Rovnoběžné síly na tuhé těleso

- Vektorové přímky se neprotínou



# Posuvný pohyb tuhého tělesa

Zákon síly (1. věta impulsová) pro jednotlivé HB tělesa

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i$$

Úpravou a zavedením HS pro posuvný pohyb

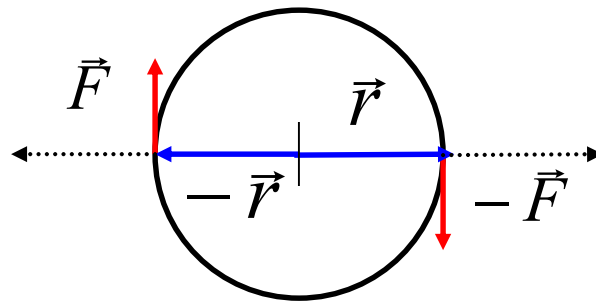
$$\sum_i m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_i m_i \vec{r}_i \right) = m \frac{d^2 \vec{r}_S}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}$$

# Otáčivý pohyb tuhého tělesa

## 2. věta impulsová pro jednotlivé HB tělesa

$$\frac{d\vec{b}_i}{dt} = \vec{M}_i$$

Úpravou  $\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{d}{dt}(\sum_i \vec{b}_i) = \sum_i \vec{M}_i = \vec{M}$



$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M} \neq \vec{0}$$

# Rovnováha tuhého tělesa

- Rovnováha vzhledem k posuvnému pohybu

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

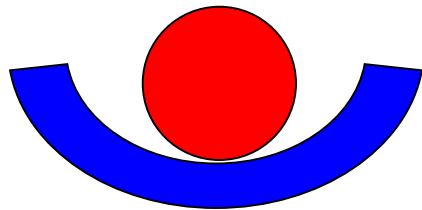
- Rovnováha vzhledem k otáčivému pohybu

$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{0}$$

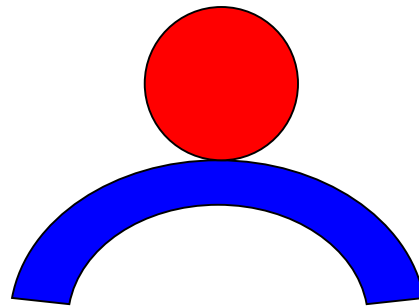


# Rovnováha - stabilita

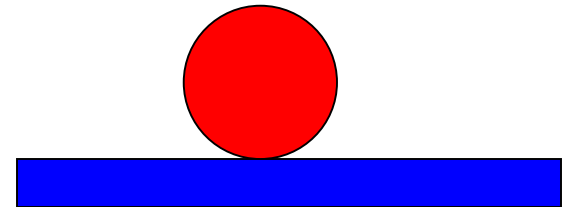
- Stabilní



Labilní



Indiferentní



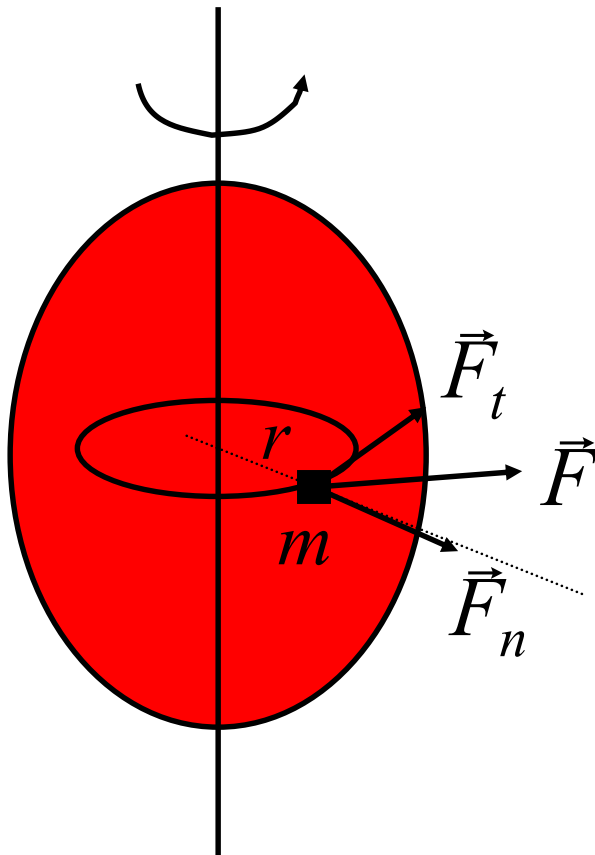
# Osa pro otáčivý pohyb

- Pevná (v tělese, prostoru)
- Okamžitá

Obecně není pohyb tuhého tělesa vyřešen v jednoduchých vzorcích – numerické řešení

# Otáčení kolem pevné osy

- Osa pevná vzhledem k tělesu



$$a_t = r\varepsilon = r \frac{d\omega}{dt}$$

$$ma_t = F_t$$

$$J\varepsilon = mr^2\varepsilon = F_t r = M$$

Moment setrvačnosti HB

$$J = mr^2$$

# Pohybová rovnice pro rotaci

- Pohybová rovnice

$$J\varepsilon = M$$

- Moment hybnosti rotujícího tělesa

$$b = r \cdot mv = mr^2 \omega = J\omega$$

# Moment setrvačnosti

- Pro HB  $J = mr^2$

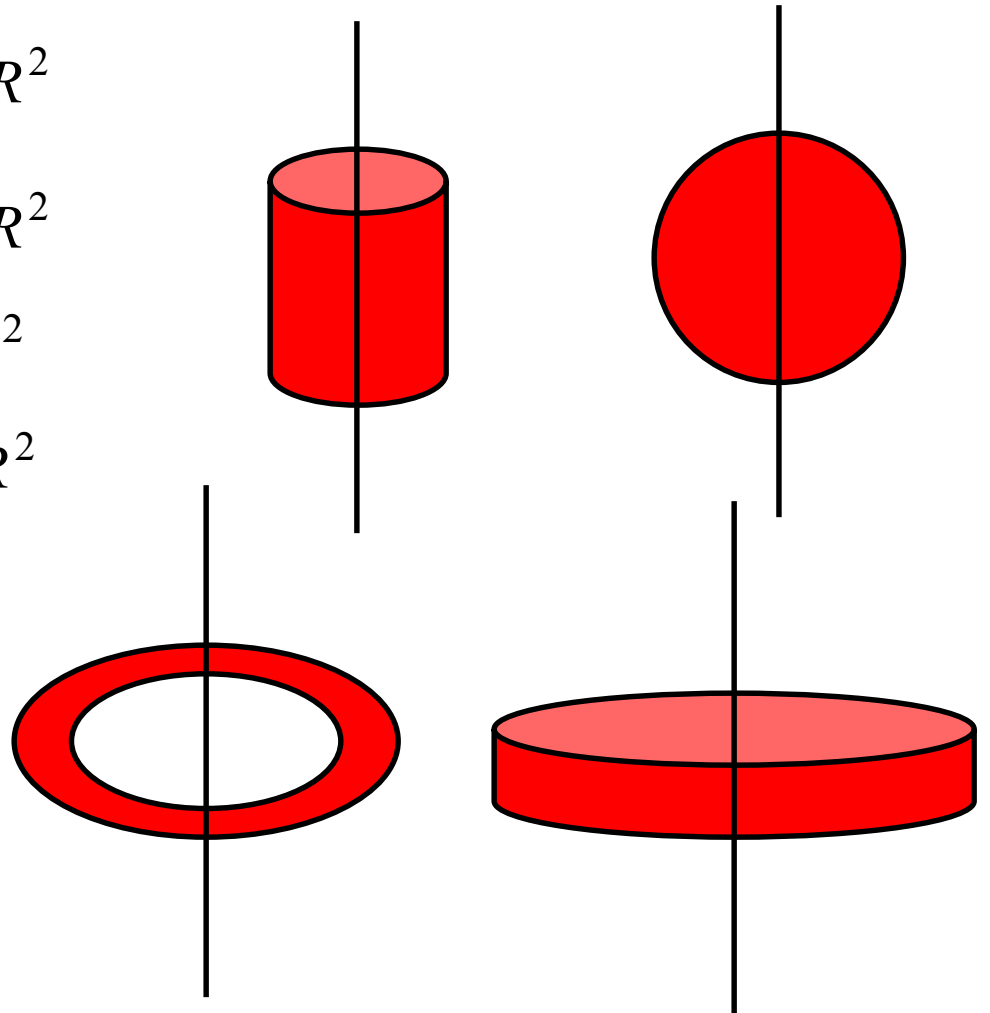
- Pro TT

$$J = \sum_i m_i r_i^2 \rightarrow \int_{(m)} r^2 dm$$

Vždy charakteristický pro určitou osu rotace

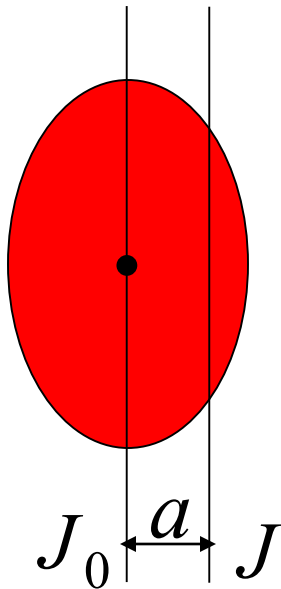
# Momenty setrvačnosti symetrických těles

- Válec  $J = \frac{1}{2}MR^2$
- Koule  $J = \frac{2}{5}MR^2$
- Prstenec  $J = MR^2$
- Disk  $J = \frac{1}{2}MR^2$



# Steinerova věta

Moment setrvačnosti vzhledem k ose  
neprocházející těžištěm, rovnoběžné s  
původní osou

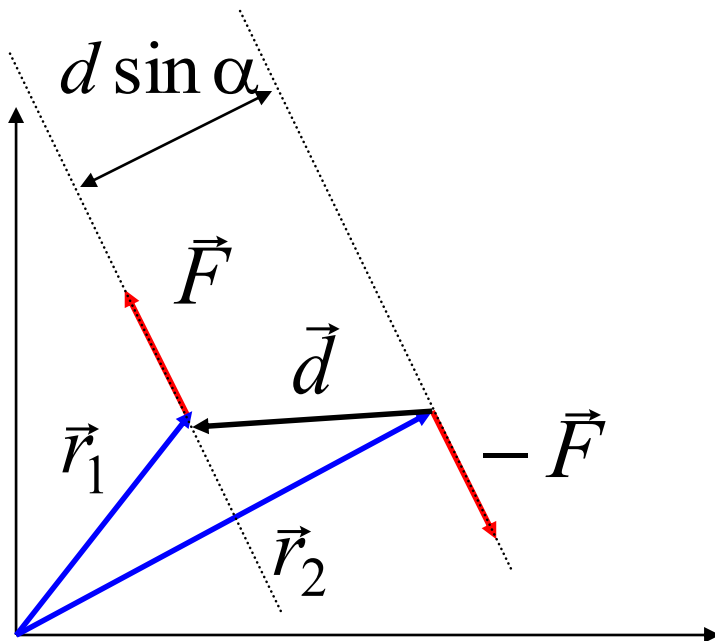


$$J = J_0 + Ma^2$$

# Dvojice sil

Dvě síly stejně velké a opačně orientované

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = \vec{d} \times \vec{F}$$



moment dvojice sil

$$M = Fd \sin \alpha$$