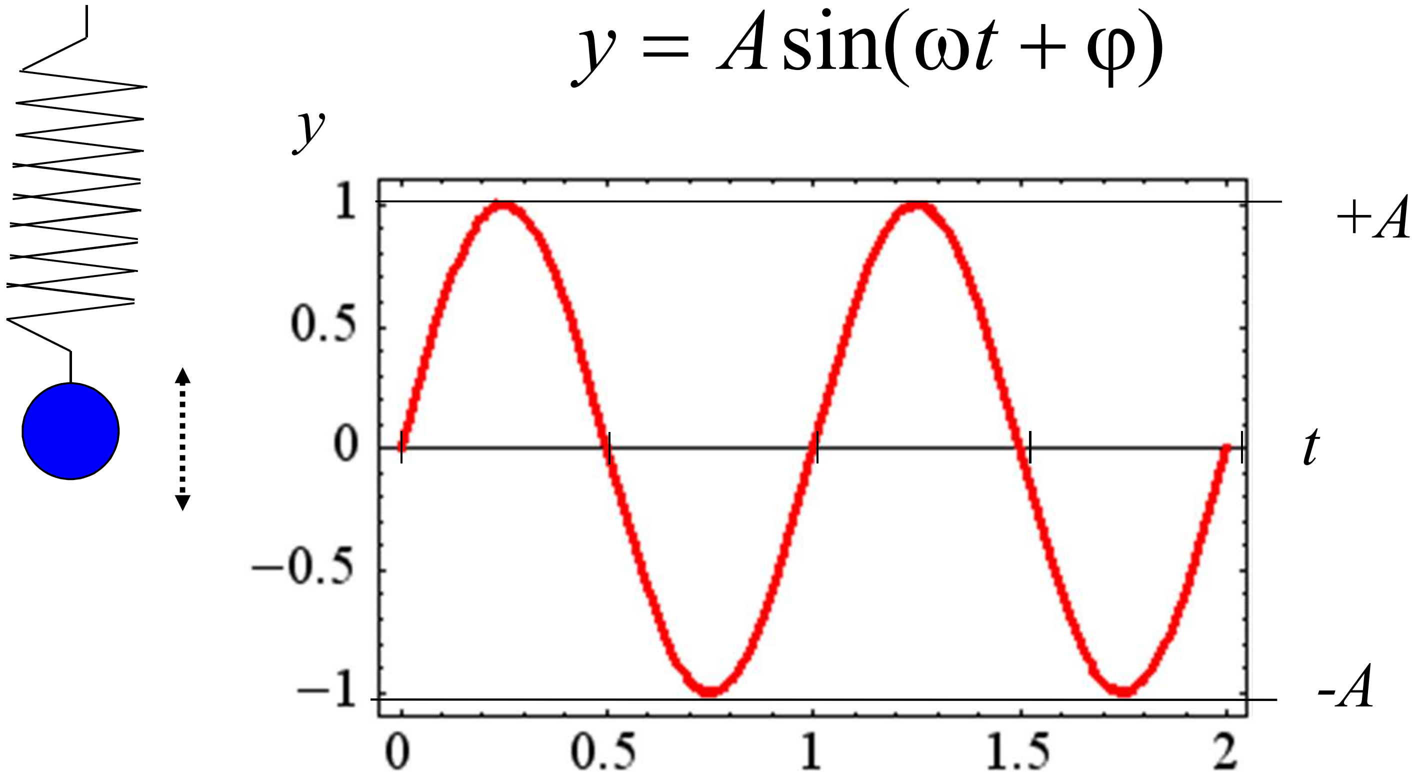
Kmitání

Volné netlumené kmity. Skládání kmitů, rázy. Volné tlumené kmity. Rezonance.

Kmitání

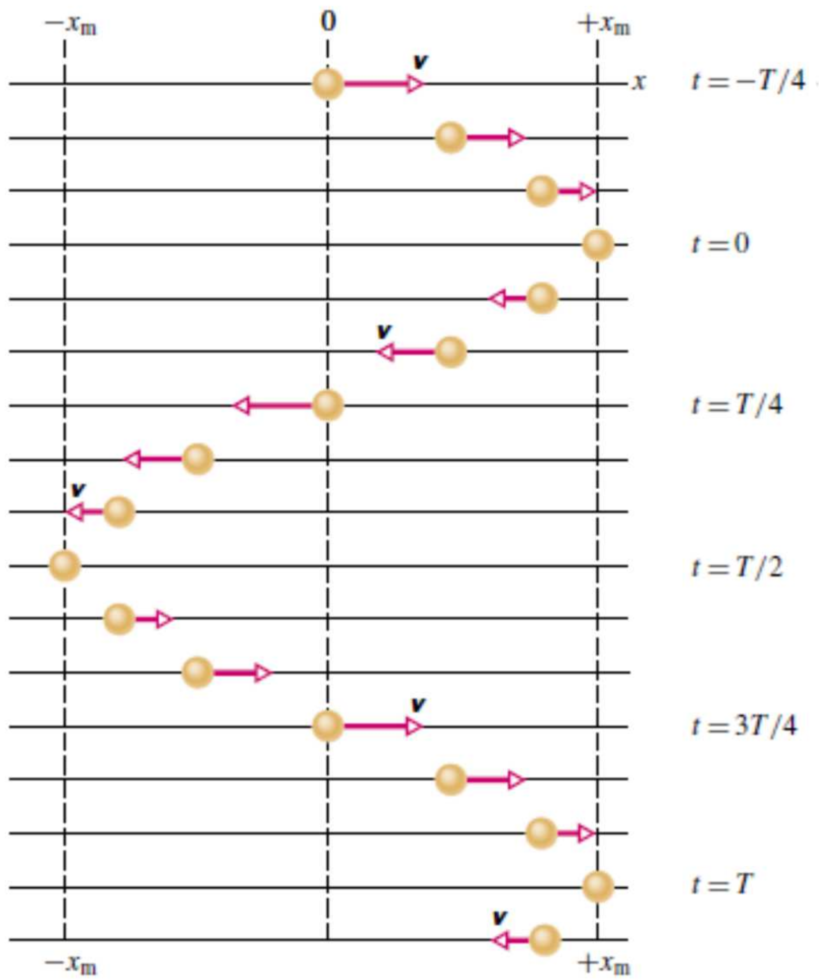
- Periodický, prostorově omezený pohyb

$$y = A\sin(\omega t + \varphi)$$



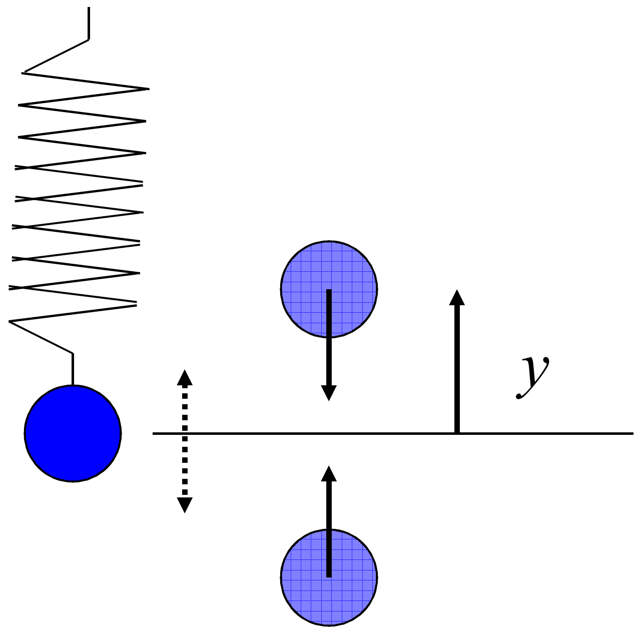
Kmitavý pohyb

výchylka i rychlost
mění velikost i směr



(Lineární) harmonické kmity

(Lineární) harmonická síla



$$F = -ky$$

k … tuhost pružiny

y … výchylka

Typy kmitů

- Periodické
- Neperiodické

- Volné
- Nucené

- Tlumené
- Netlumené

- Lineární
- Nelineární

atd.

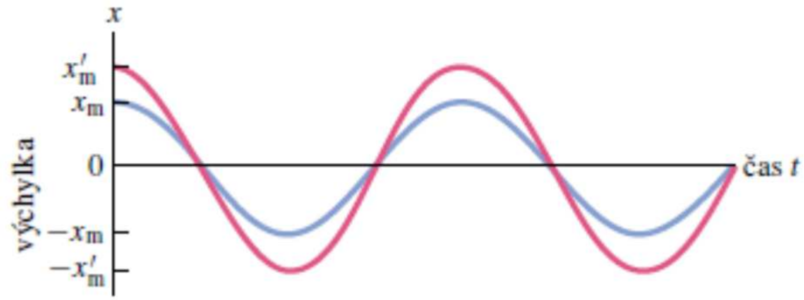
Parametry netlumených kmitů

Řešení rovnice kmitů $y = A\sin(\omega t + \varphi)$

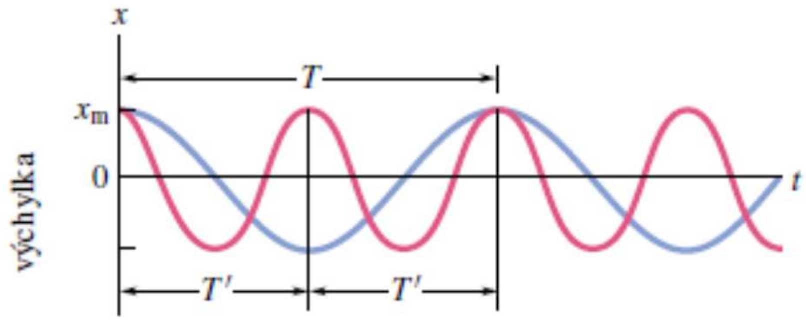
- Okamžitá výchylka - y
- Amplituda - A
- Úhlová frekvence – ω, frekvence - f
- Perioda – $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$
- Počáteční fáze - φ

Parametry kmitů

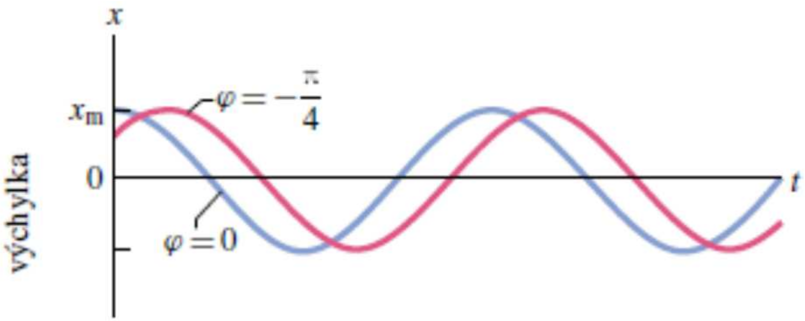
Amplituda



Perioda



Počáteční fáze



Rovnice volných netlumených harmonických kmitů

Pohybová rovnice pro harmonickou sílu

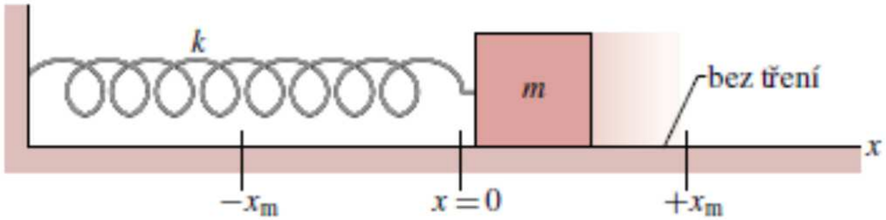
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0$$

Obyčejná diferenciální rovnice 2.řádu

Úhlová frekvence $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

Úhlová frekvence a perioda kmitů



- Úhlová frekvence

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Perioda

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Obecné řešení rovnice kmitů

Řešení rovnice kmitů obecně $y = A\sin(\omega t + \varphi)$

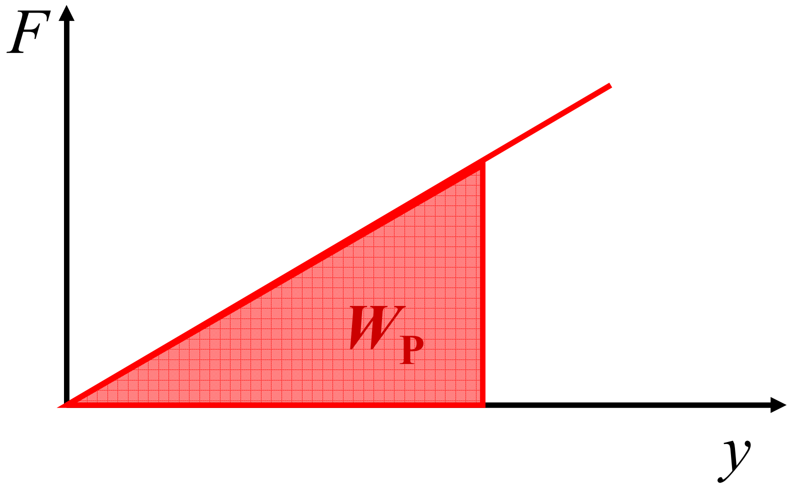
Dva neurčené parametry – A, φ

Nutné dvě počáteční podmínky, např.
maximální výchylka a nulová rychlost

$$y(0) = A \qquad y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = A\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = A\cos(\omega t)$$

Potenciální energie napnuté pružiny

Působí harmonická síla $F = -ky$



$$W_P = -\int_0^{y_0} F dy = \int_0^{y_0} k y dy = \frac{1}{2} k y_0^2$$

Odvození rovnice kmitů z kinetické a potenciální energie

- Kinetická energie kuličky

$$W_K = \frac{1}{2} m v^2$$

- Potenciální energie napnuté pružiny

$$W_P = \frac{1}{2} k y^2$$

Zákon zachování energie – izolovaná soustava těleso + pružina

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k y^2 = konst.$$

Rychlost a zrychlení kmitavého pohybu

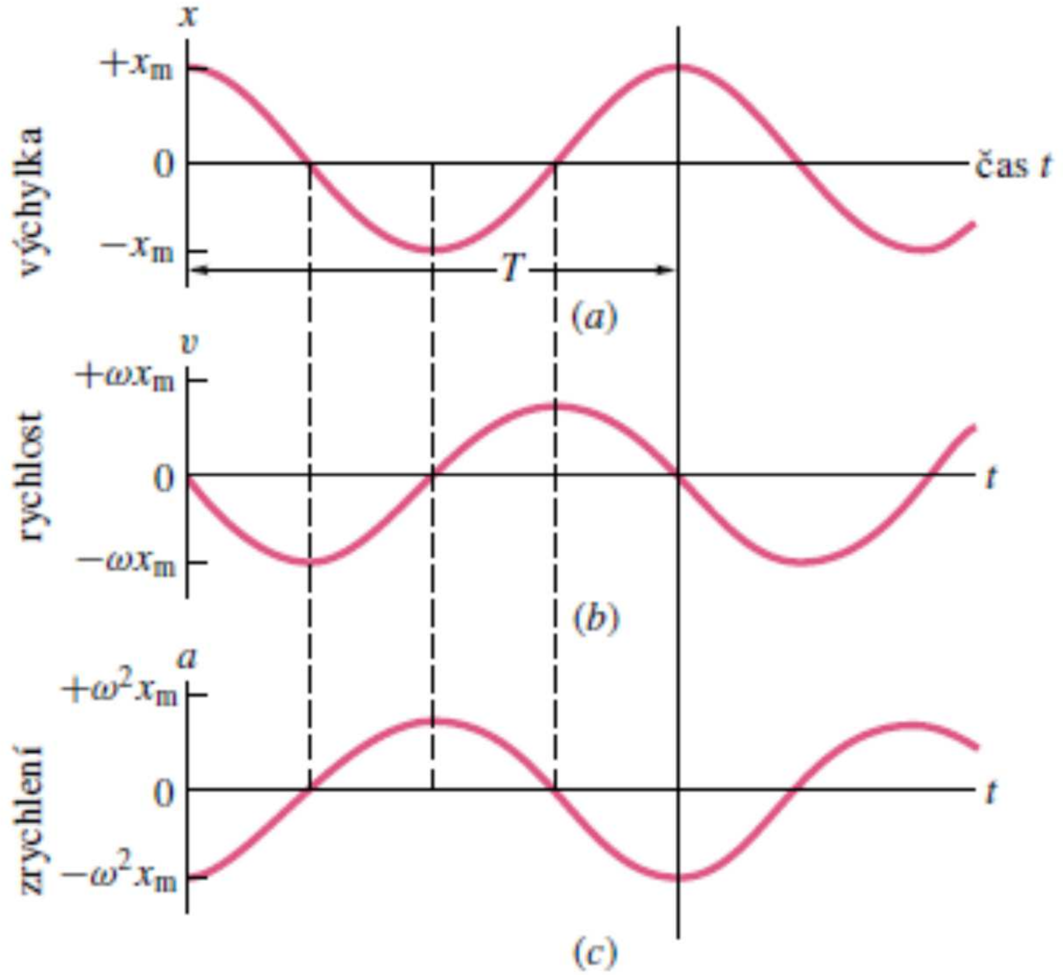
- Výchylka $y = A\sin(\omega t + \varphi)$
- Rychlost

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi) = A\omega\sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

- Zrychlení $a = -\omega^2 y$

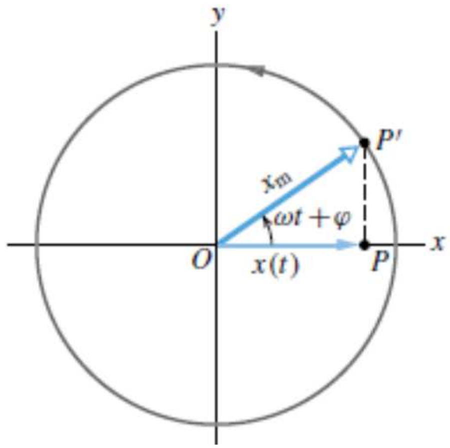
$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = A\omega^2\sin(\omega t + \varphi + \pi)$$

Poloha, rychlost a zrychlení

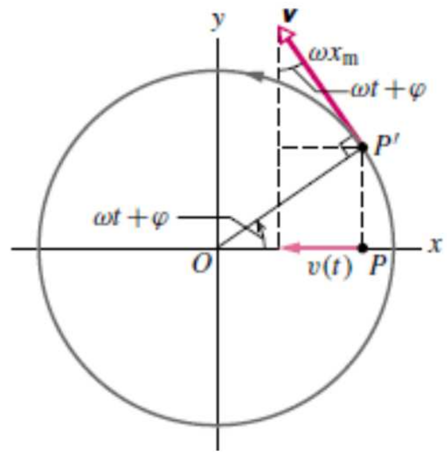


Analogie s pohybem po kružnici

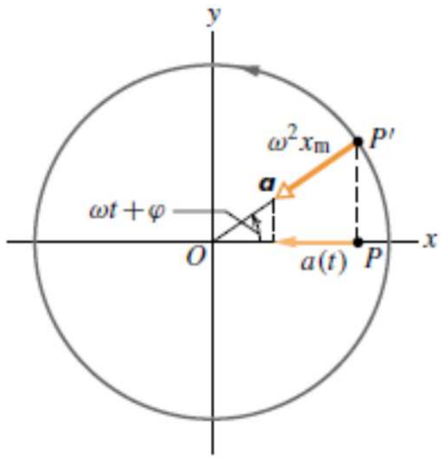
Poloha



Rychlost



Zrychlení



Energie kmitavého pohybu

Dvojnásobná frekvence!

- Kinetická

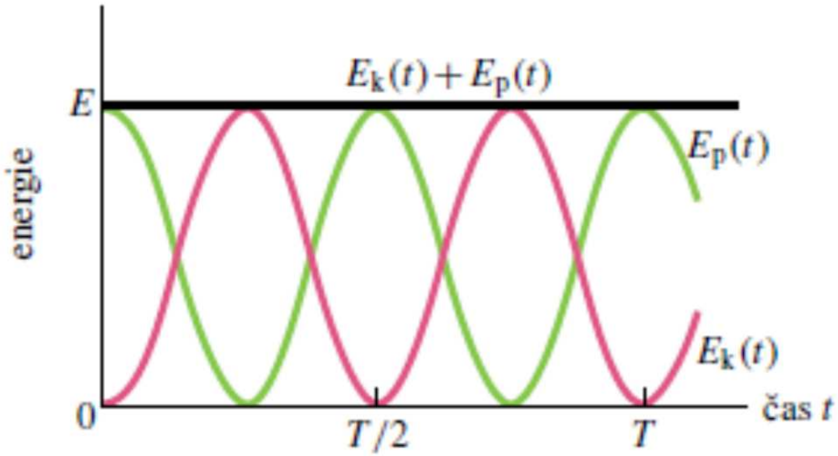
$$W_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{4}m\omega^2 A^2 (1-\cos(2\omega t))$$

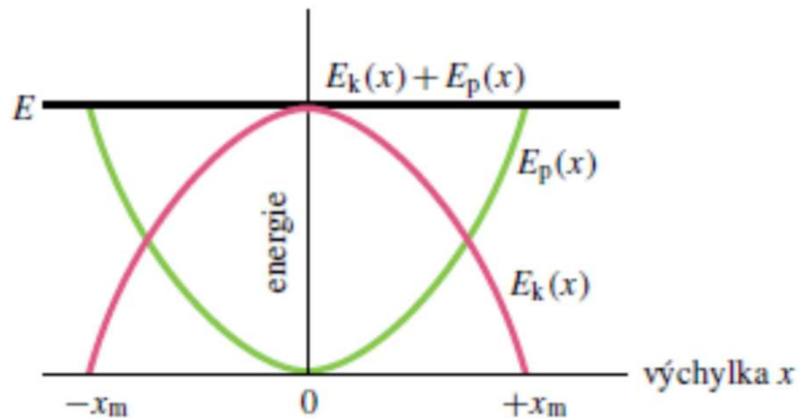
- Potenciální

$$W_P = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t) = \frac{1}{4}kA^2 (1+\cos(2\omega t))$$

Výchylka (pro jednoduchost) $y = A\cos(\omega t)$

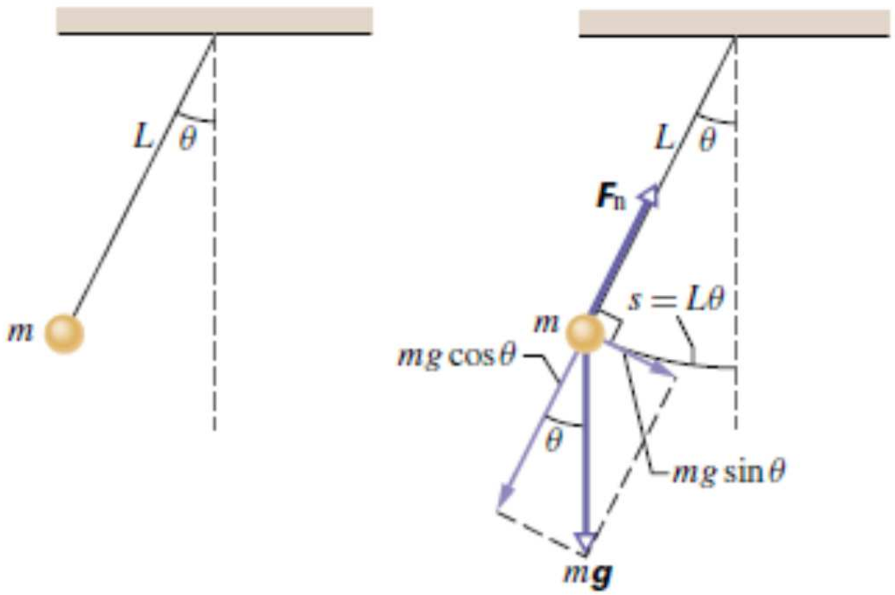
Energie kmitavého pohybu





Matematické kyvadlo

Hmotný bod na nehmotném závěsu

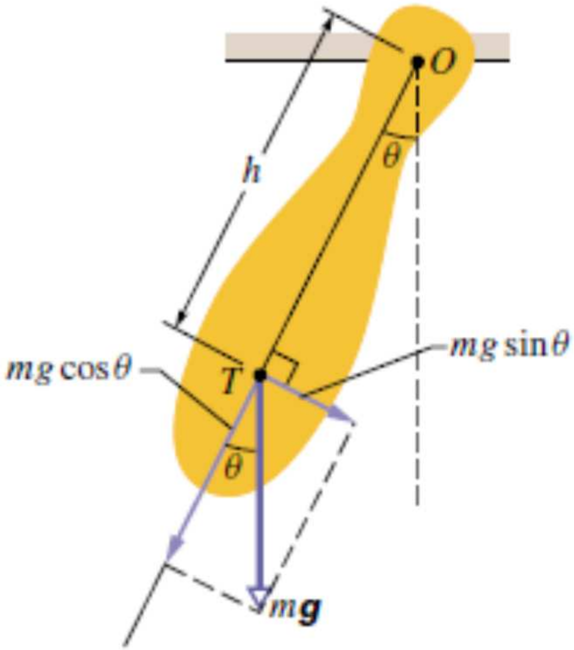


Perioda kmitu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Fyzické kyvadlo

Tuhé těleso zavěšené mimo těžiště



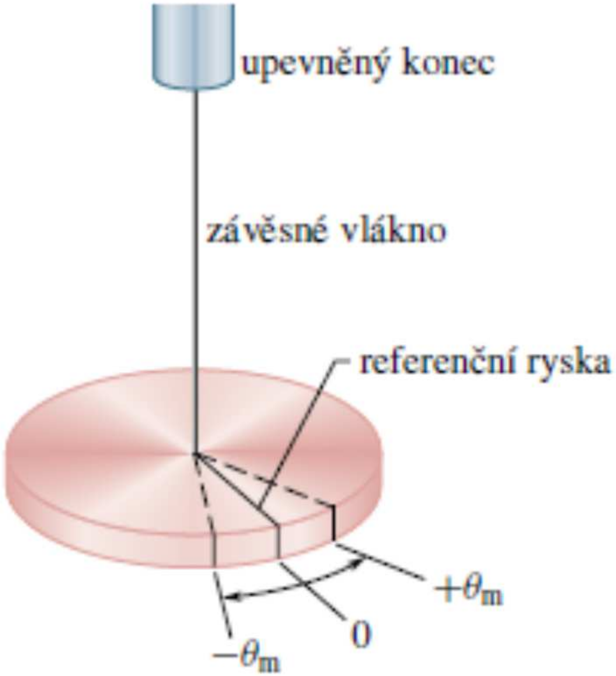
Perioda kmitu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

moment setrvačnosti *I*

Torzní kyvadlo

Tuhé těleso na nehmotném závěsu



Perioda kmitu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\varkappa}}$$

moment setrvačnosti I

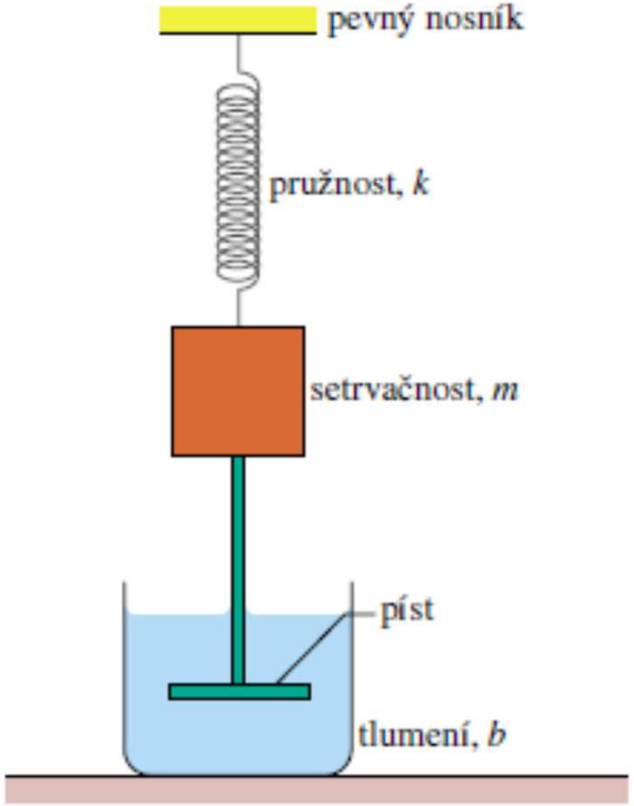
torzní tuhost κ

moment síly

$$M = -\varkappa\theta$$

Tlumené kmitání

Tlumící síla $F_v = -kx - bv$ Pohybová rovnice



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$x(t) = x_m e^{-bt/(2m)} \cos(\omega' t + \varphi)$$

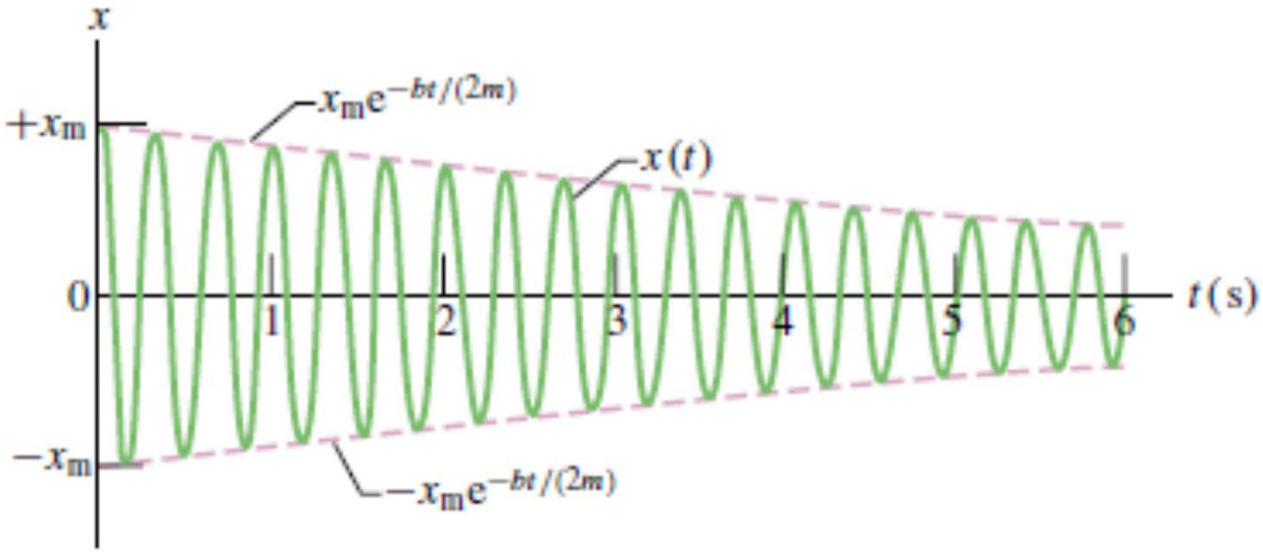
$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}.$$

Časový průběh tlumeného kmitu

obalová křivka

$$x(t) = x_m e^{-bt/(2m)} \cos(\omega' t + \varphi)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}.$$



Útlum a logaritmický dekrement

Amplituda kmitu klesá po každé periodě

Útlum

$$\frac{x_m e^{-\frac{bt}{2m}}}{x_m e^{-\frac{b(t+T)}{2m}}} = e^{\frac{bT}{2m}}$$

Logaritmický dekrement [Bell, dB]

$$\log \frac{x(t)}{x(t+T)} = \frac{bT}{2m} \log e$$

Příklad

Logaritmický dekrement 1dB (0.1B) je pokles amplitudy kmitů za jednu periodu rovný

$$\frac{x(t)}{x(t+T)} = 10^{0.1} = 1.259$$

3dB odpovídají poklesu amplitudy zhruba na polovinu

$$\frac{x(t)}{x(t+T)} = 10^{0.3} = 1.995$$

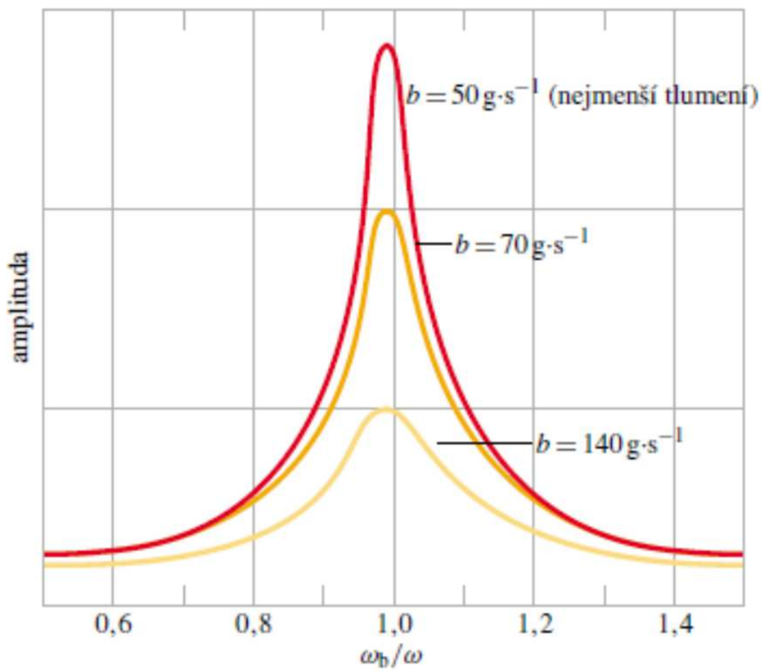
Nucené kmitání

Kmit je nucen periodickou silou o frekvenci ω_b

Výsledkem je kmit $$x(t) = x_m \cos(\omega_b t + \varphi)$$

Jehož amplituda

závisí na frekvenci

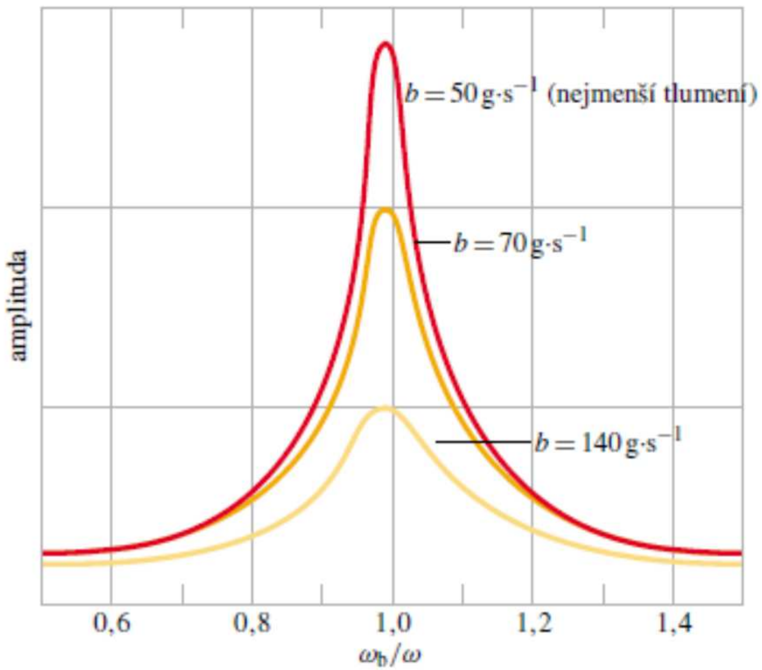


Rezonance

Nucené kmitání má
v blízkosti frekvence ω_b
velmi „zesílenou“
amplitudu x_m
Rezonanční frekvence

$$\omega_r = \sqrt{\omega_b^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$x(t) = x_m \cos(\omega_b t + \varphi)$$



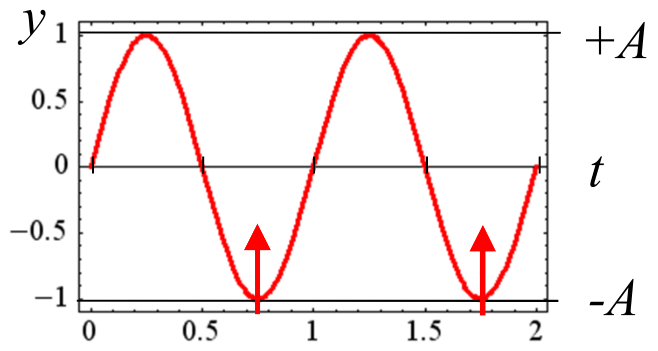
Parametrická rezonance

Jiný jev než rezonance, jde o změnu parametrů systému v určitém okamžiku kmitu

Např.:

Houpání na houpačce – změna rozložení hmoty v krajní poloze kmitu, vede k udržení rozkmitu

Jo-jo (Maxwellovo kyvadlo) – změna směru v dolní poloze se současným impulsem



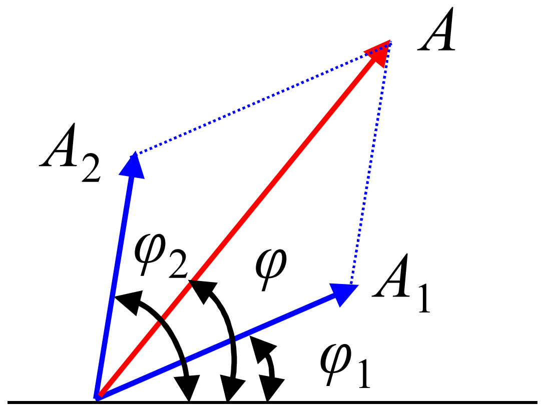
Skládání kmitů stejné frekvence

- Výpočtem

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

- Graficky pomocí fázorů



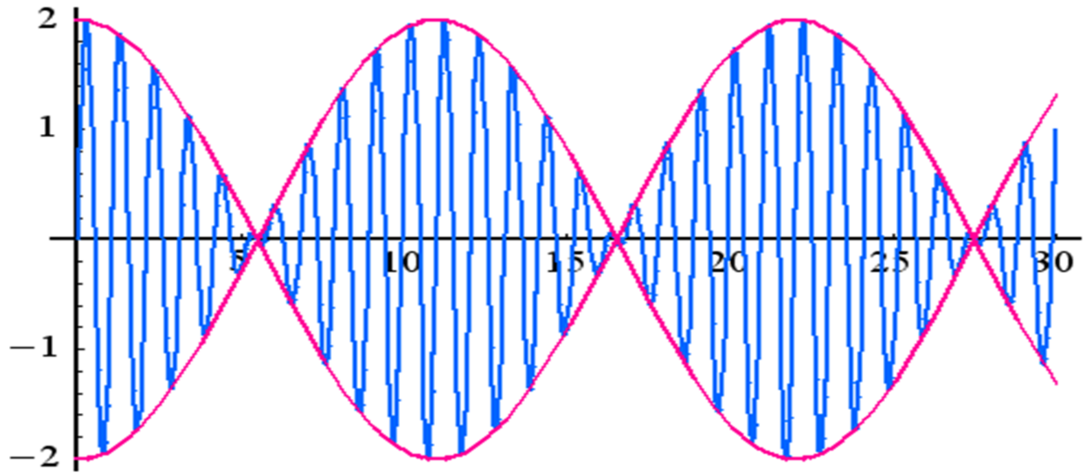
Rázy

Kmity stejné amplitudy (pro jednoduchost)

$$y_1 = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad y_2 = A\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

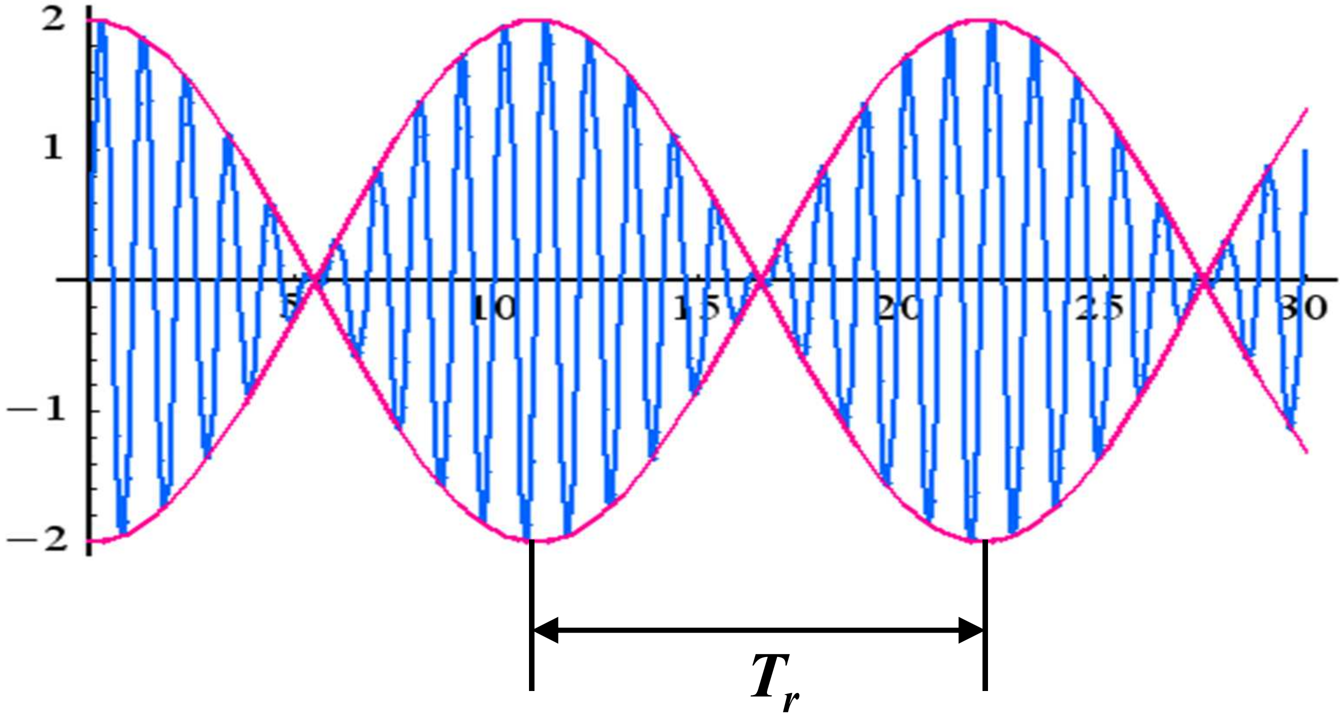
$$y = y_1 + y_2 =$$

$$= 2A\cos[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t + \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)]\sin[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t + \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)]$$



Rázy

Perioda rázů $\quad f_r = |f_1 - f_2|, \quad T_r = 1/f_r$



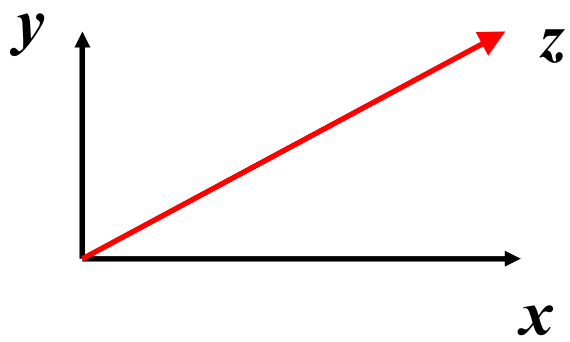
Lissajoussovy obrazce

Skládání kmitů různého směru

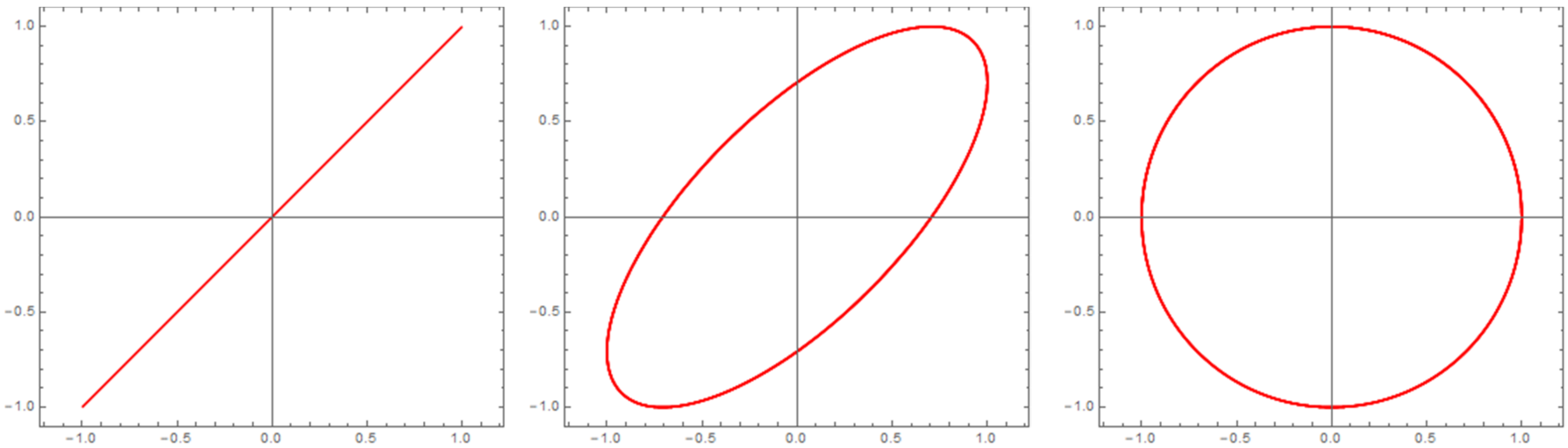
$$x = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1),\ y = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$\vec{z} = (x, y)$$



Lissajoussovy obrazce

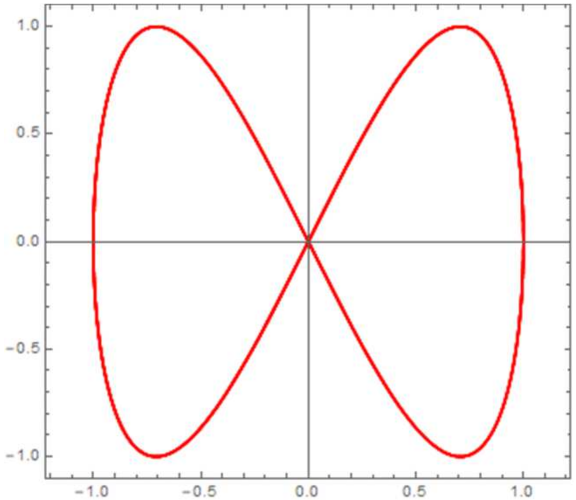


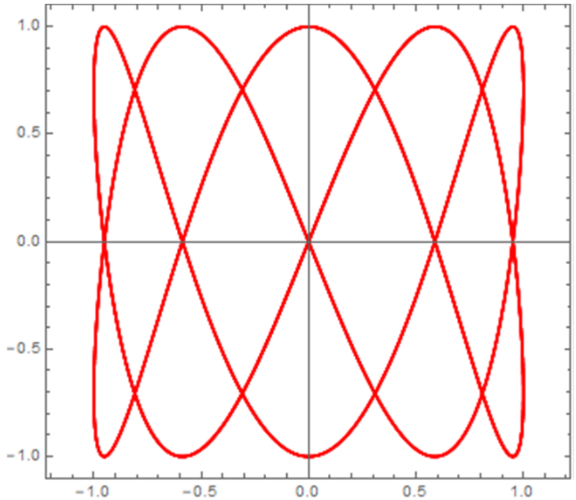
$f_1:f_2 = 1:1$
$\varphi_1 = 0^o,\ \varphi_2 = 0^o$

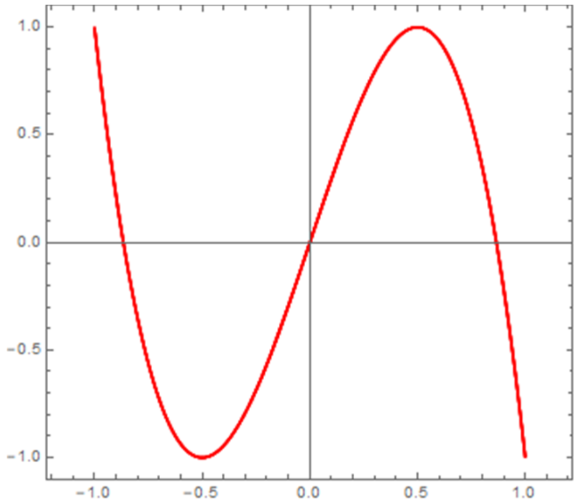
$f_1:f_2 = 1:1$
$\varphi_1 = 0^o,\ \varphi_2 = 45^o$

$f_1:f_2 = 1:1$
$\varphi_1 = 0^o,\ \varphi_2 = 90^o$

Lissajoussovy obrazce







f_1:f_2=1:2
φ_1=0°, φ_2=0°

f_1:f_2=2:5
φ_1=0°, φ_2=0°

f_1:f_2=1:3
φ_1=0°, φ_2=0°

Literatura

V prezentaci byly použity materiály z knihy:

HALLIDAY, D., R. RESNICK, J. WALKER *Fyzika*. Brno: VUTIUM, 2000. díl 2 Mechanika - Termodynamika