

Elastické vlastnosti izotropních a anizotropních látek

Deformace pevného tělesa, Hookův zákon, anizotropní prostředí, tenzory deformace a napětí. Rázy těles.

Elastické vlastnosti

Kontinuum – těleso mění svůj tvar i rozměry

Čisté deformace

- Tah, tlak
- Smyk

Složené deformace

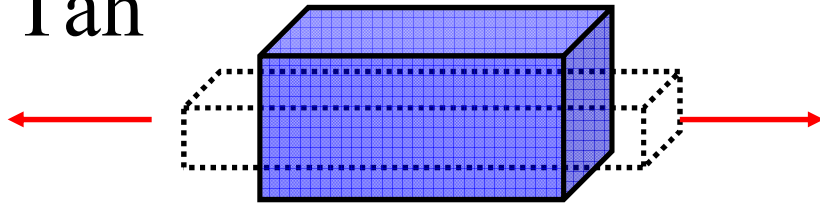
Ohyb

Krut (torze)

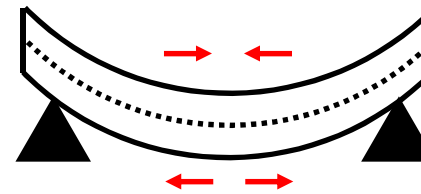
...další

Typy deformací

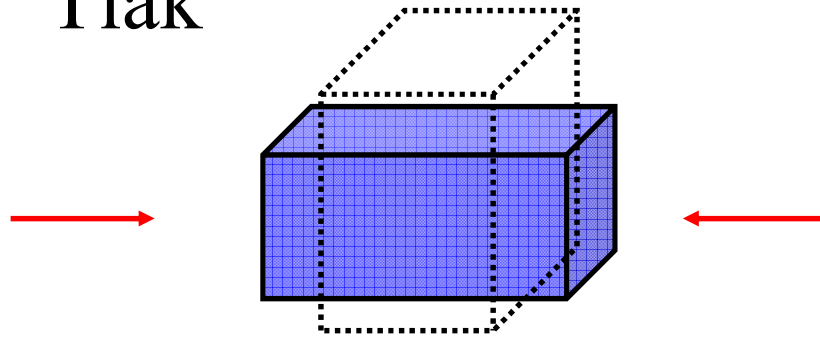
Tah



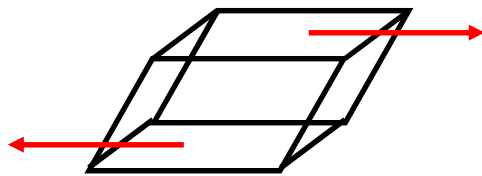
Ohyb



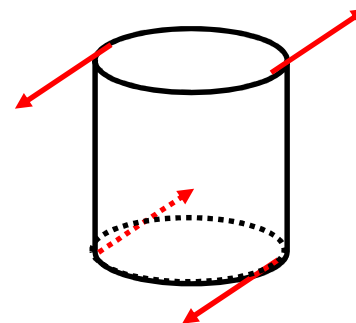
Tlak



Smyk



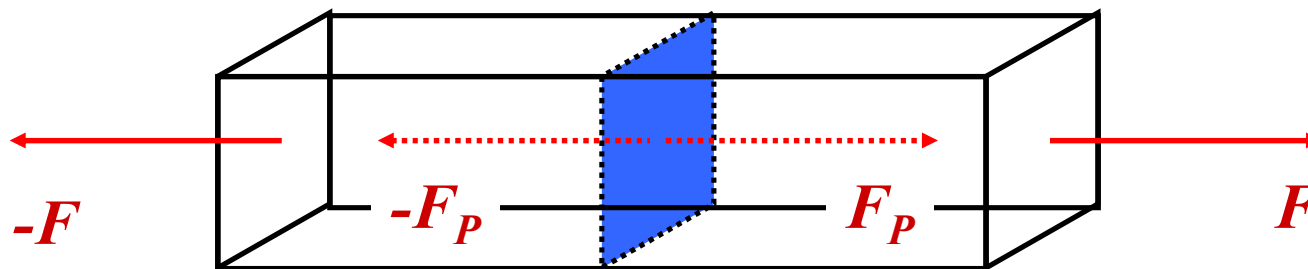
Krut (torze)



Síly pružnosti

Normálové napětí

$$\sigma = \frac{F_P}{S} \quad [Pa]$$

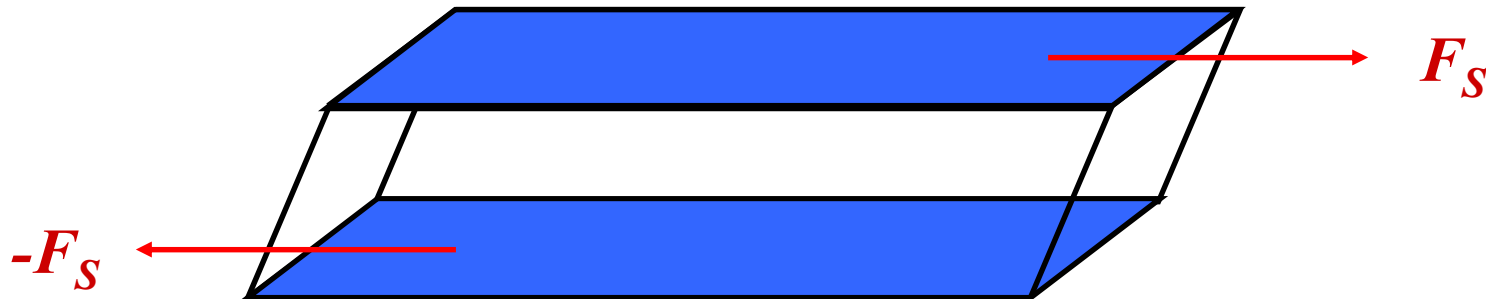


V rovnováze platí $F = F_P$

Síly pružnosti

Smykové napětí

$$\tau = \frac{F_S}{S} \quad [Pa]$$

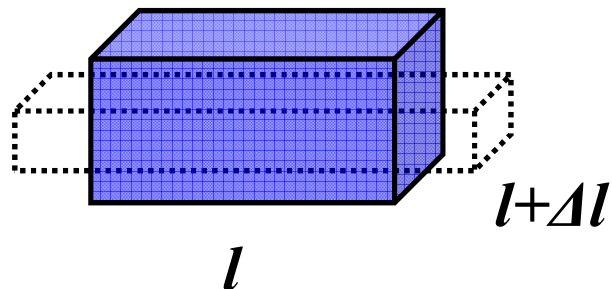


Deformace

Relativní deformace - jednosměrná

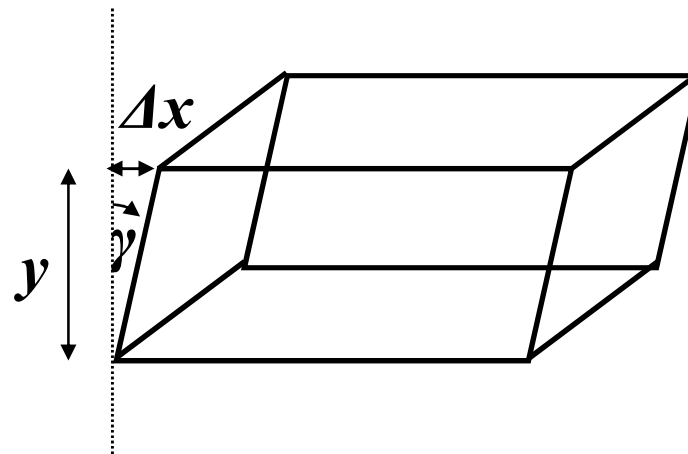
Podélná

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad [\%]$$



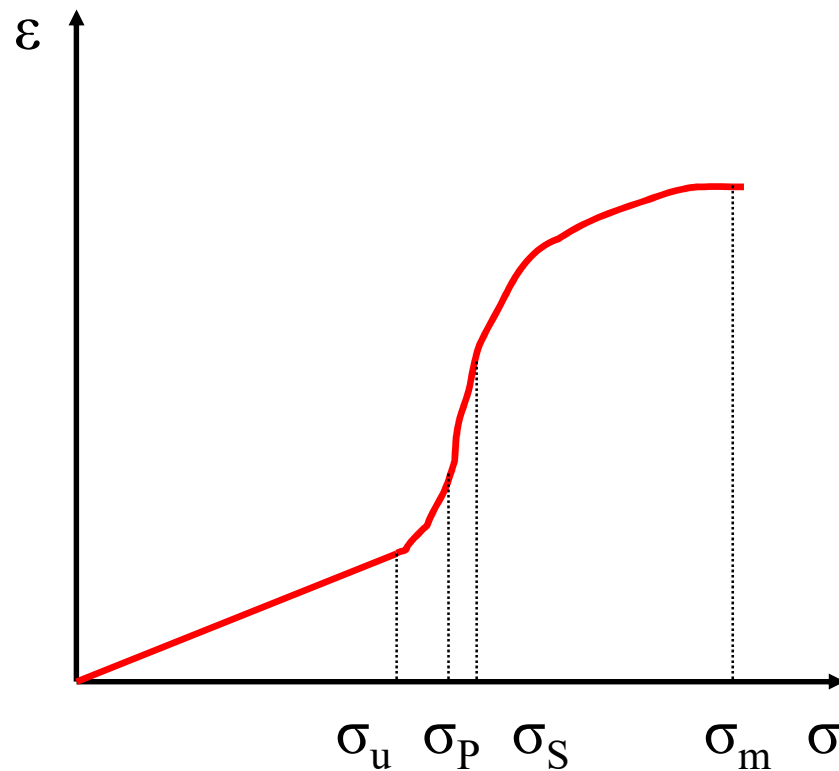
smyková

$$\gamma \approx \operatorname{tg}(\gamma) = \frac{\Delta x}{y} \quad [\%]$$



Křivka deformace

Vztah mezi napětím a deformací



Meze

úměrnosti σ_u

pružnosti σ_P

skluzu σ_S

pevnosti

$$\sigma_m \approx 1 - 100 \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

Hookův zákon

Podélná deformace

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma$$

Smyková deformace

$$\gamma = \frac{1}{G} \tau$$

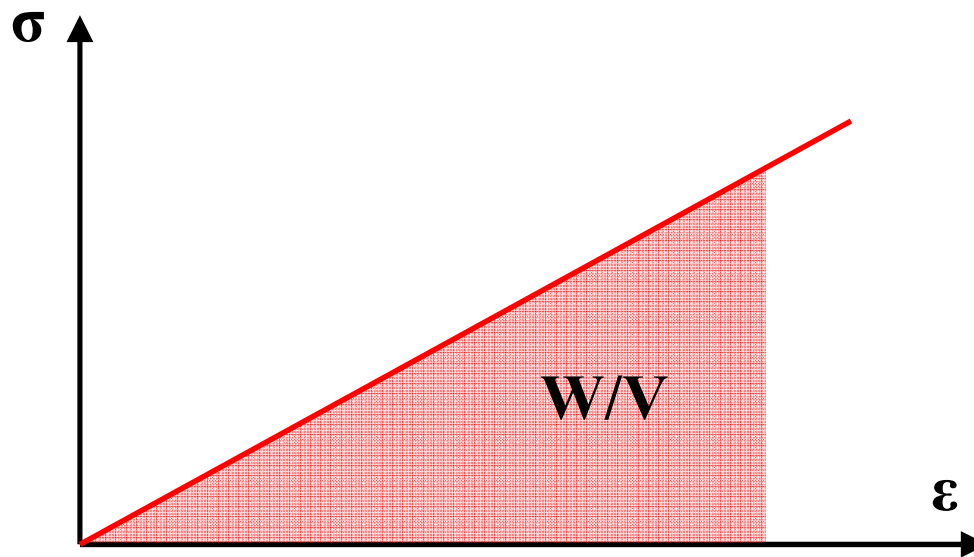
Modul pružnosti [Pa]

- V tahu - E
- Ve smyku - G

Energie deformovaného tělesa

Potenciální energie sil pružnosti

$$W = \int F dl = V \int \frac{F}{S} \frac{dl}{l} = V \int \sigma d\varepsilon = V \int E \varepsilon d\varepsilon = \left[\frac{1}{2} V E \varepsilon^2 \right] = \left[\frac{1}{2} V \sigma \varepsilon \right]$$



Vztahy mezi moduly pružnosti

Příčná deformace

$$\varepsilon_{\text{podélná}} = \frac{1}{E} \sigma \qquad \varepsilon_{\text{příčná}} = -\frac{\nu}{E} \sigma$$

Poissonův modul pružnosti

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\text{příčná}}}{\varepsilon_{\text{podélná}}}, \qquad 0 < \nu \leq \frac{1}{2}$$

Vztah mezi moduly

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Velikost elastických modulů

	$E[10^{10}\text{Pa}]$	$G[10^{10}\text{Pa}]$	$\nu [1]$
Fe	21	8	0.29
C, vlákna	112	52	0.1

Prostorová deformace

Napětí ve všech třech směrech

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} \sigma_3$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\nu}{E} \sigma_1 + \frac{1}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} \sigma_3$$

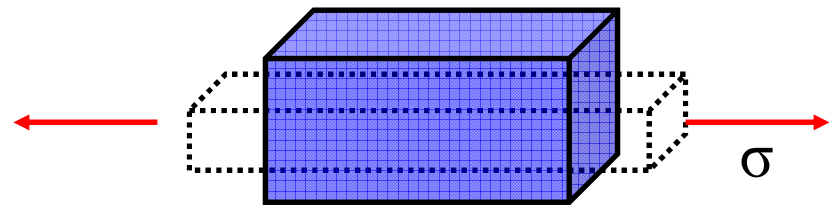
$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_2 + \frac{1}{E} \sigma_3$$

Změna objemu při jednosměrném tlaku/tahu

Kvádr deformovaný jednosměrným napětím σ

Objem před deformací

$$V_0 = abc$$



Objem po deformaci

$$V = a \left(1 + \frac{1}{E} \sigma \right) b \left(1 - \frac{\nu}{E} \sigma \right) c \left(1 - \frac{\nu}{E} \sigma \right) \approx V_0 + V_0 (1 - 2\nu) \frac{1}{E} \sigma$$

$$\frac{V - V_0}{V_0} = (1 - 2\nu) \frac{1}{E} \sigma$$

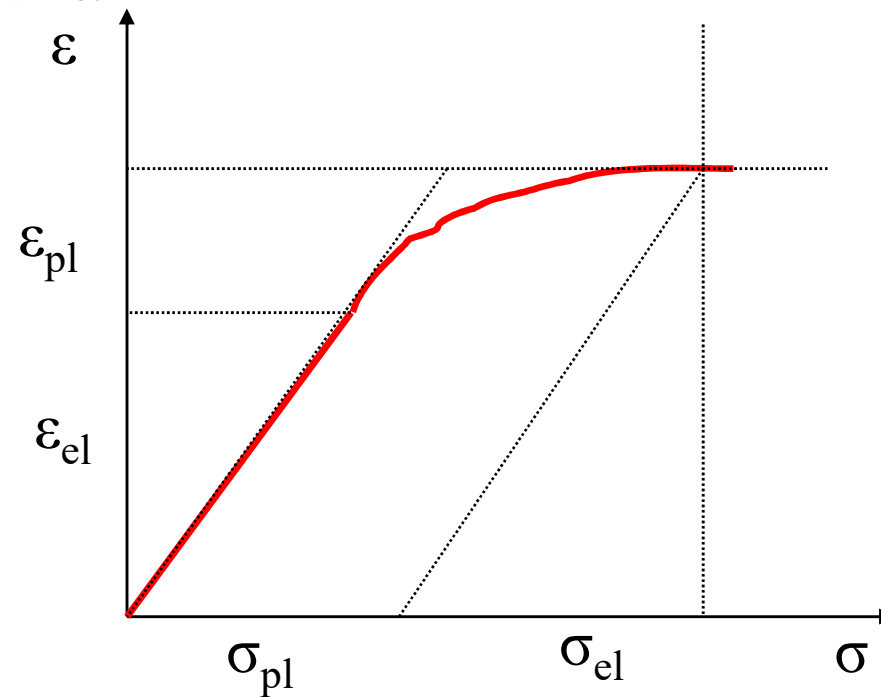
Všesměrový izotropní tlak

Stejný tlak ve všech směrech (např.
hydrostatický tlak)

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$$
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{1}{E}(1 - 2\nu)(-p)$$

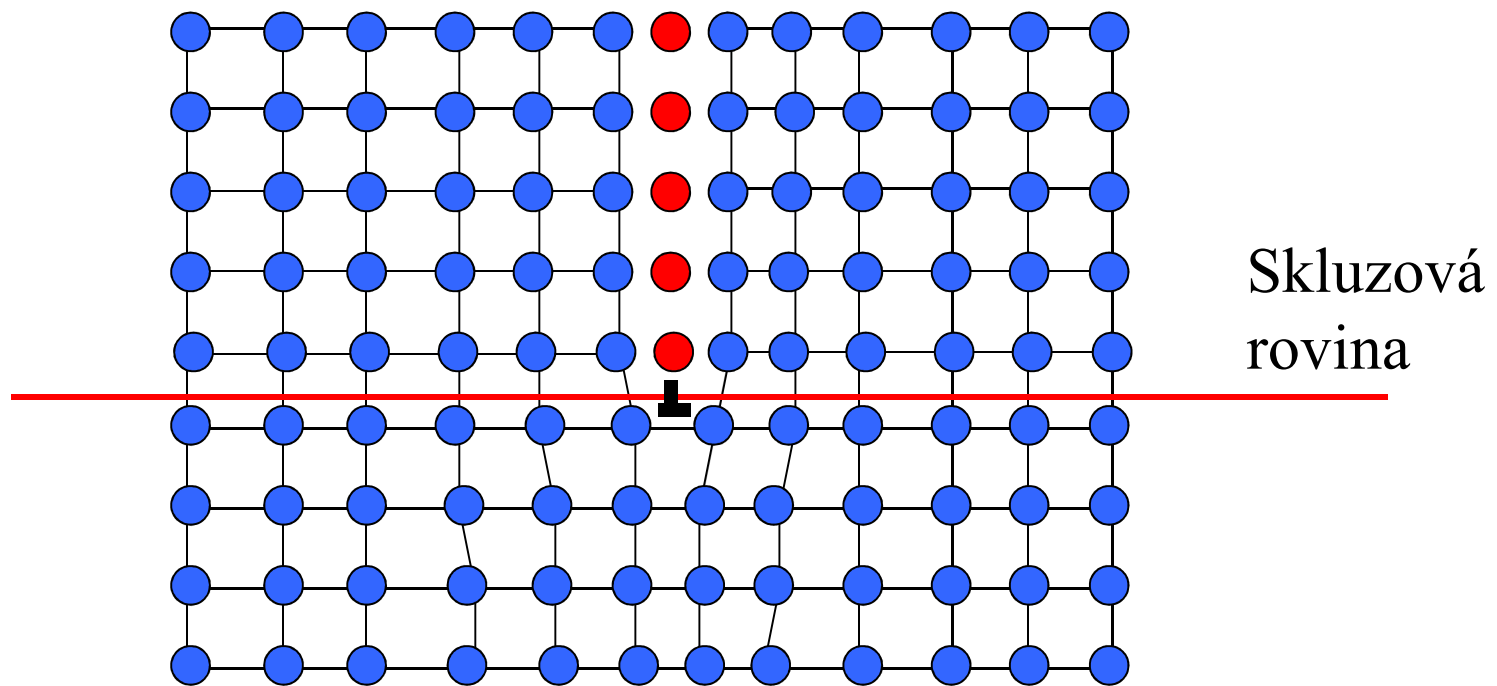
Elastická a plastická deformace

- Elastická – vratná
- Plastická – nevratná



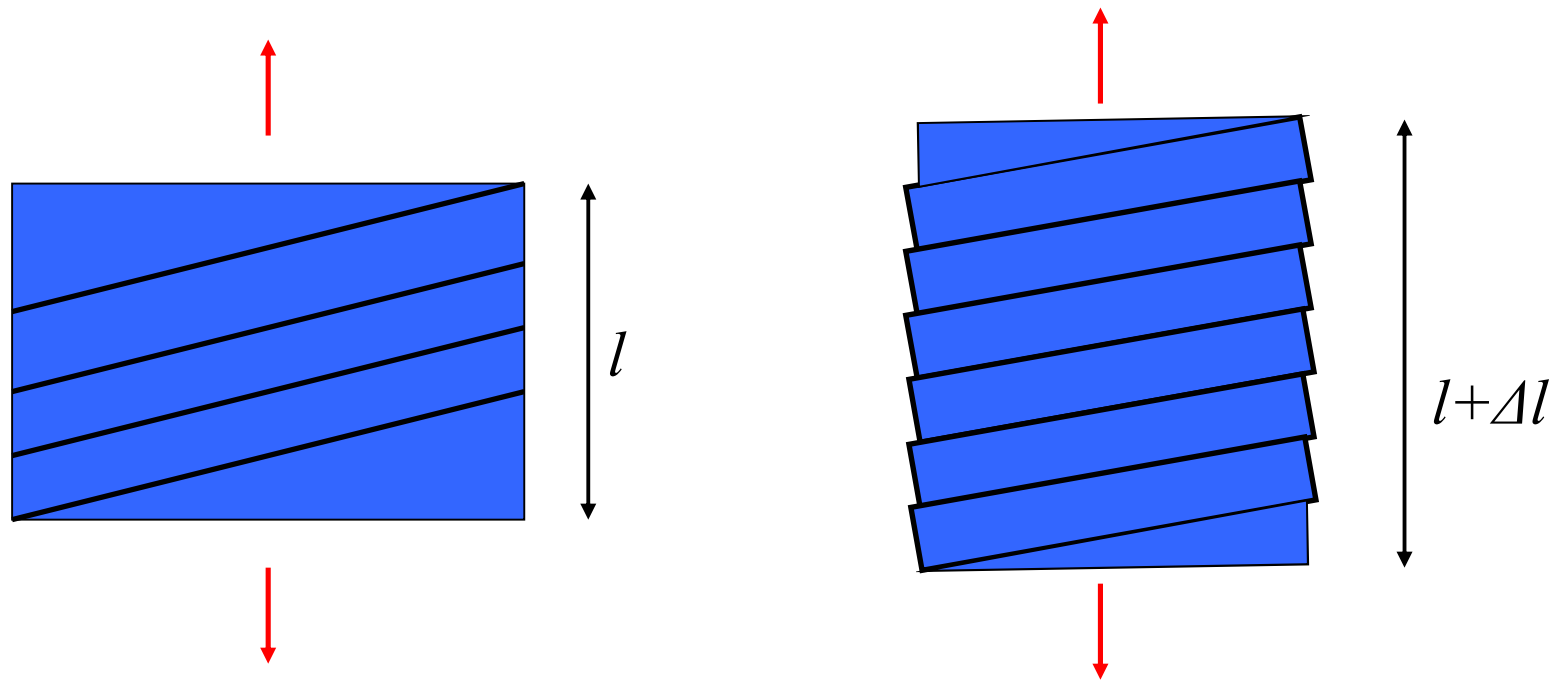
Dislokace

- Hranová
- Šroubová



Plastická deformace

Nevratný pohyb dislokací



Anizotropní prostředí

Vlastnosti různé v různých směrech

Materiály:

- Krystaly
- Kompozity (např. zpevněné vlákny - lamináty, dřevo - překližka,...)
- Plastové fólie, plechy (směr tažení fólie, válcování)
- Keramika (směr lisování)

Anizotropní deformace a napětí

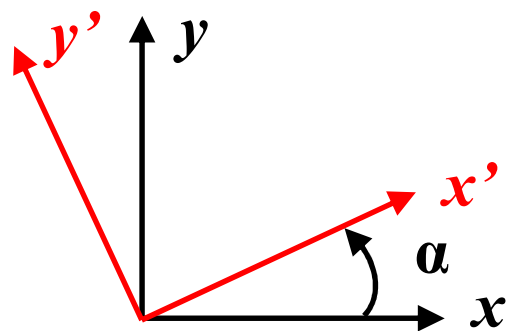
$$\text{Deformace} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{napětí} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

jsou tenzory 2.řádu

Transformace souřadnic tenzorů

Souřadnice v otočeném souřadném systému



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_{ik} a_{jl} \varepsilon_{kl}$$

Příklad transformace souřadnic

Jednosměrné napětí

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & 0 \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma'_{11} = a_{11}a_{11}\sigma = \sigma \cos^2 \alpha$$

$$\sigma'_{12} = a_{11}a_{21}\sigma = -\sigma \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sigma'_{13} = a_{11}a_{31}\sigma = 0$$

$$\sigma'_{22} = a_{21}a_{21}\sigma = \sigma \sin^2 \alpha$$

$$\sigma'_{23} = a_{21}a_{31}\sigma = 0$$

$$\sigma'_{33} = a_{31}a_{31}\sigma = 0$$

Hookův zákon v anizotropním prostředí

Elastické moduly jsou tenzorem 4.řádu

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 S_{ijkl} \sigma_{kl}$$

Elastický modul je symetrický vůči záměně indexů ve dvojicích a záměně dvojic indexů – redukce počtu nezávislých modulů na 21 (izotropní prostředí má jen dva nezávislé moduly)

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$$

Elastické moduly

Vzhledem k symetrii indexů lze použít zápis ve tvaru matice.

$$c_{\alpha\beta} = c_{ijkl} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6$$

$$s_{\alpha\beta} = \begin{cases} s_{ijkl} & \alpha, \beta = 1, 2, 3 \\ 2s_{ijkl} & \alpha = 1, 2, 3; \beta = 4, 5, 6 \\ 4s_{ijkl} & \alpha, \beta = 4, 5, 6 \end{cases}$$

Plošně ortotropní prostředí

Př.: Různé moduly ve dvou kolmých směrech
v rovině.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{pmatrix}$$

Transformace elastického modulu

Podobně jako tenzor 2. řádu

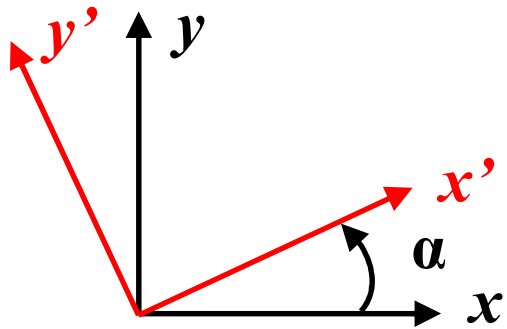
$$C'_{ijkl} = \sum_{m,n,p,q=1}^3 a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lq} C_{mnpq}$$

Př. Hodnota modulu pružnosti v rovině xy pro ortotropní prostředí

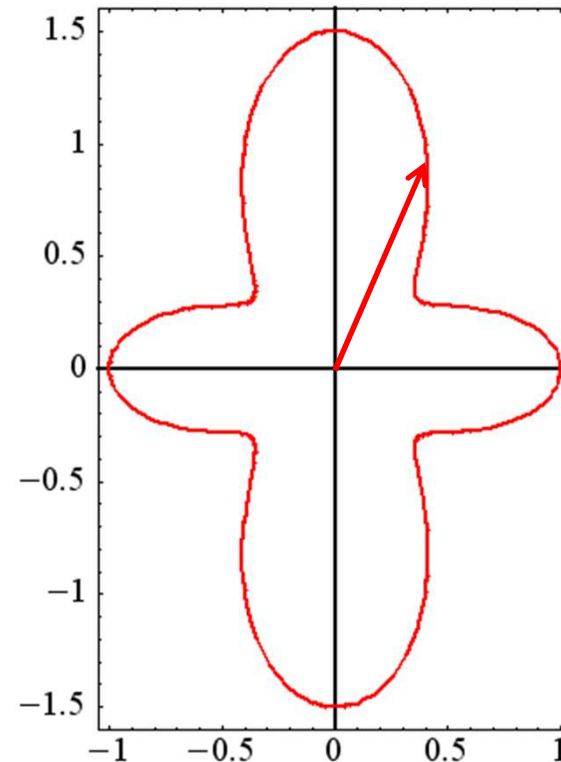
$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} C'_{1111} &= C_{1111} \cos^4 \alpha + 2C_{1122} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ &+ C_{2222} \sin^4 \alpha \end{aligned}$$

Plošně ortotropní prostředí

$$C'_{1111} = C_{1111} \cos^4 \alpha + 2C_{1122} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + C_{2222} \sin^4 \alpha$$



Př. $C_{1111} = E$,
 $C_{2222} = 1.5E$,
 $C_{1122} = -1/4E$



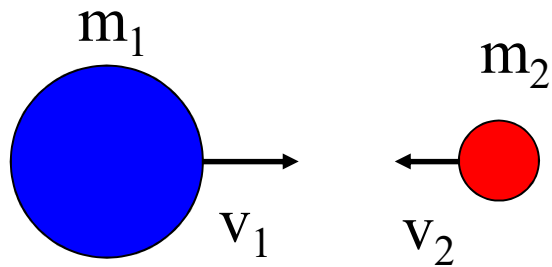
Rázy těles

Ztráta energie ΔW

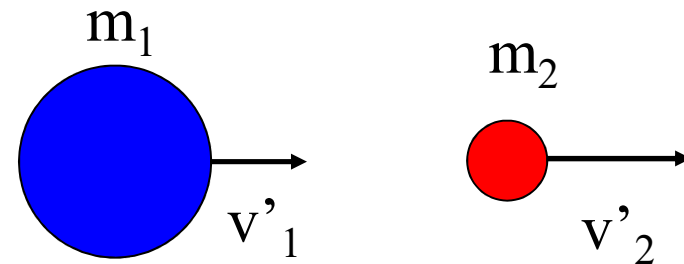
- Dokonale pružný ráz $\Delta W = 0$
- Dokonale nepružný ráz ΔW_{\max}
- Obecný ráz $0 < \Delta W < \Delta W_{\max}$

Dokonale pružný ráz

Před rázem



po rázu



$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Dokonale pružný ráz

Rychlosti těles po rázu

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 - 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

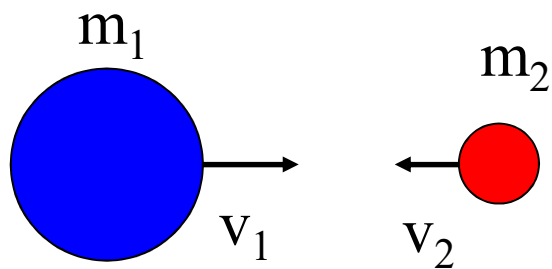
$$v_2' = \frac{(m_1 - m_2)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

Zvláštní případ

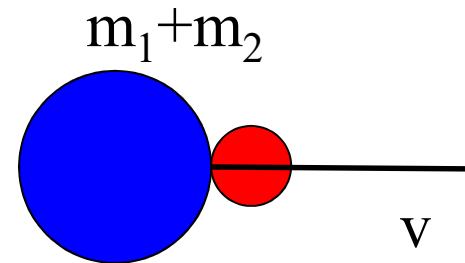
$$m_1 = m_2 = m, v_2 = 0 \Rightarrow v_1' = 0, v_2' = v_1$$

Dokonale nepružný ráz

Před rázem



po rázu



$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

$$v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Dokonale nepružný ráz

Ztráta energie

$$\begin{aligned}\Delta W &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} (v_1 + v_2)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Literatura

V prezentaci byly použity materiály
z knihy:

HALLIDAY, D., R. RESNICK, J. WALKER
Fyzika. Brno: VUTIUM, 2000. díl 2
Mechanika - Termodynamika