TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní
a pedagogická

Mechanika tuhého tělesa

FYZ1 – Přednáška 9
HRW – kapitoly 11, 12, 13

Tuhé těleso

Těleso, které se ani největší silou nijak nedeformuje, má své nenulové rozměry

Síly mohou působit v různých bodech tělesa!

Hmotný střed tuhého tělesa

Bod kde si lze představit soustředěnou veškerou hmotu tělesa

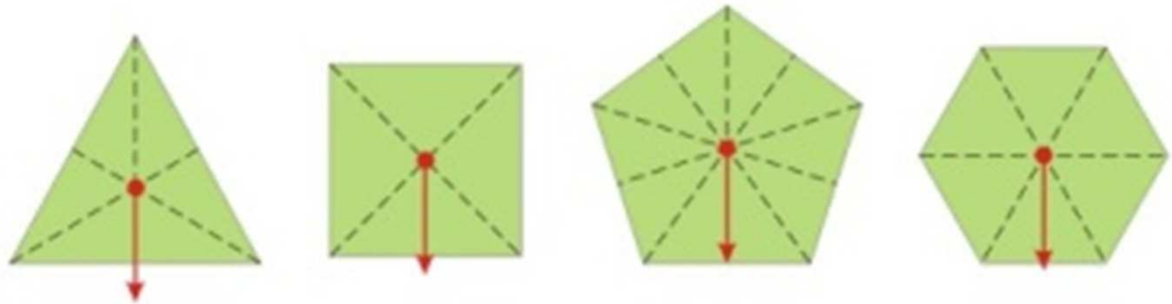
Hustota tělesa $\rho = \frac{m}{V}$

Souřadnice hmotného středu

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \rightarrow \frac{\int_{(m)} \vec{r}\, dm}{\int_{(m)} dm}$$

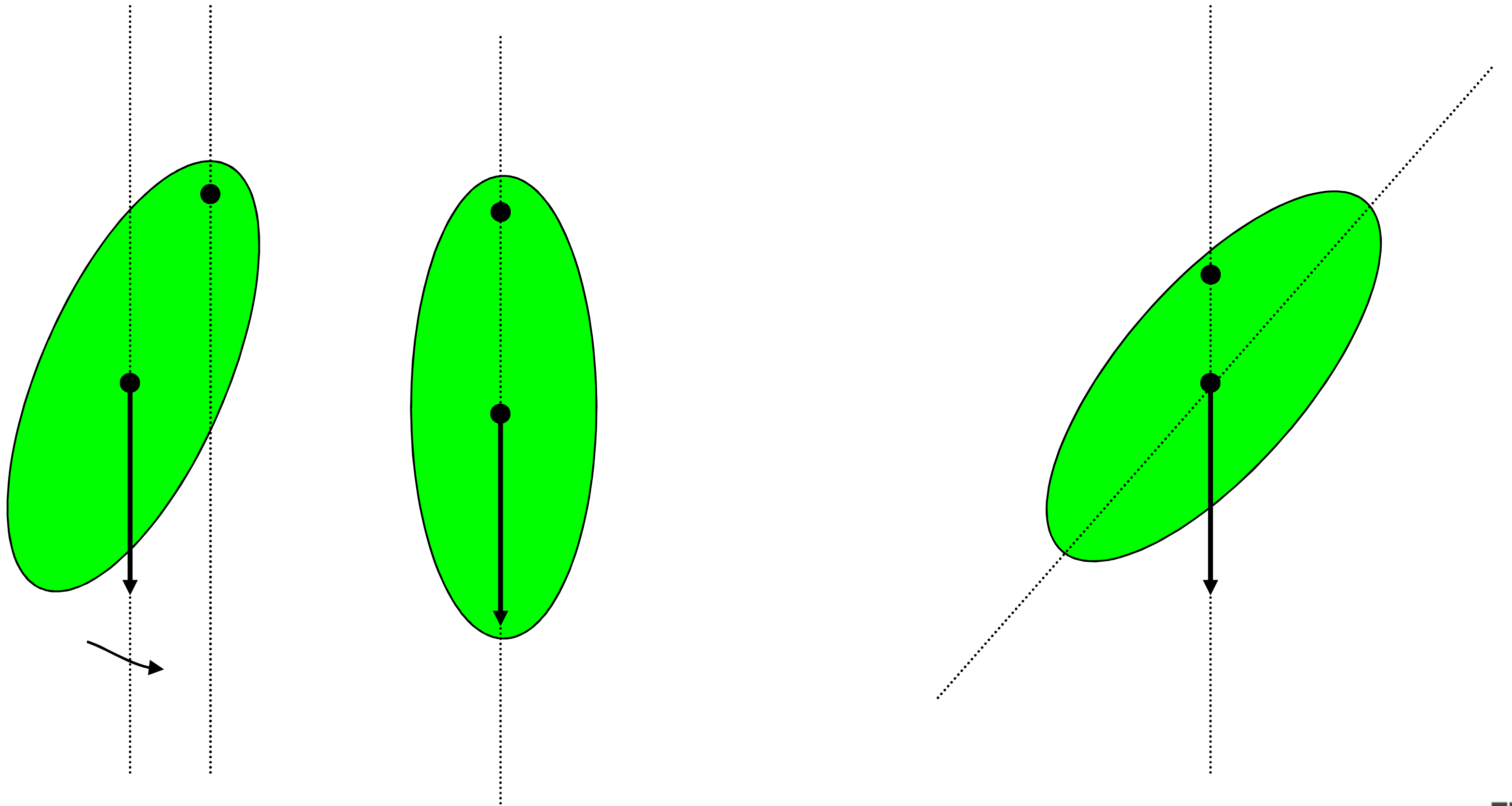
Hmotný střed pravidelných těles

Osy a roviny symetrie obsahují hmotný střed



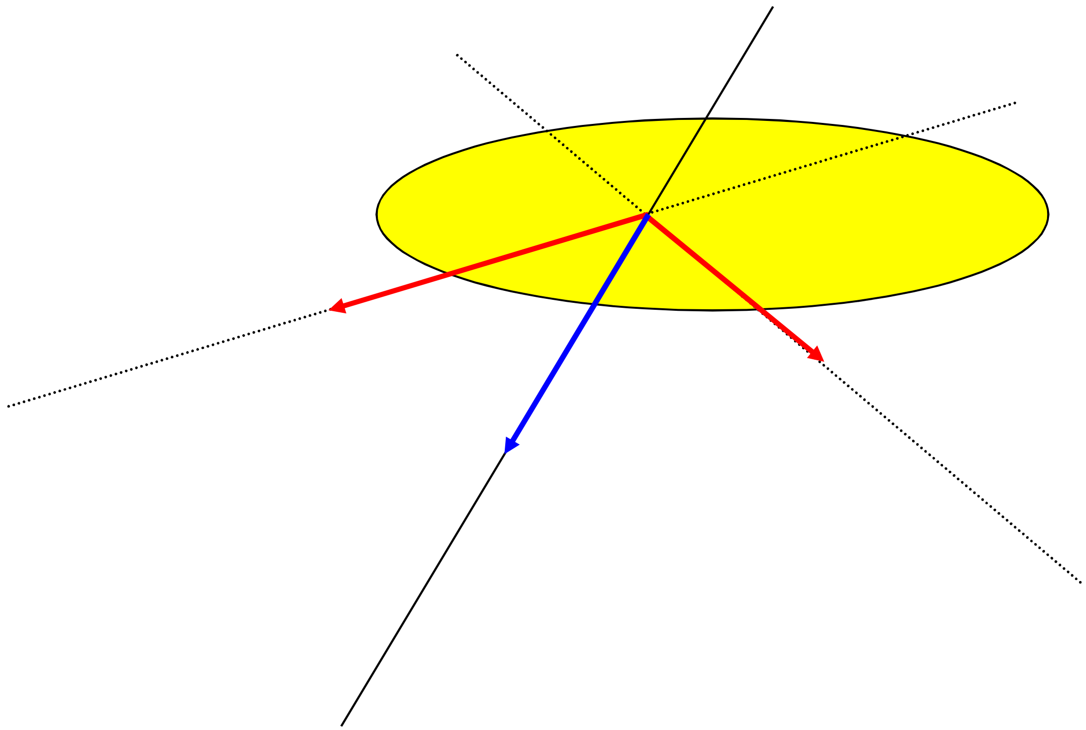
Těžiště

- Tíže v gravitačním poli Země



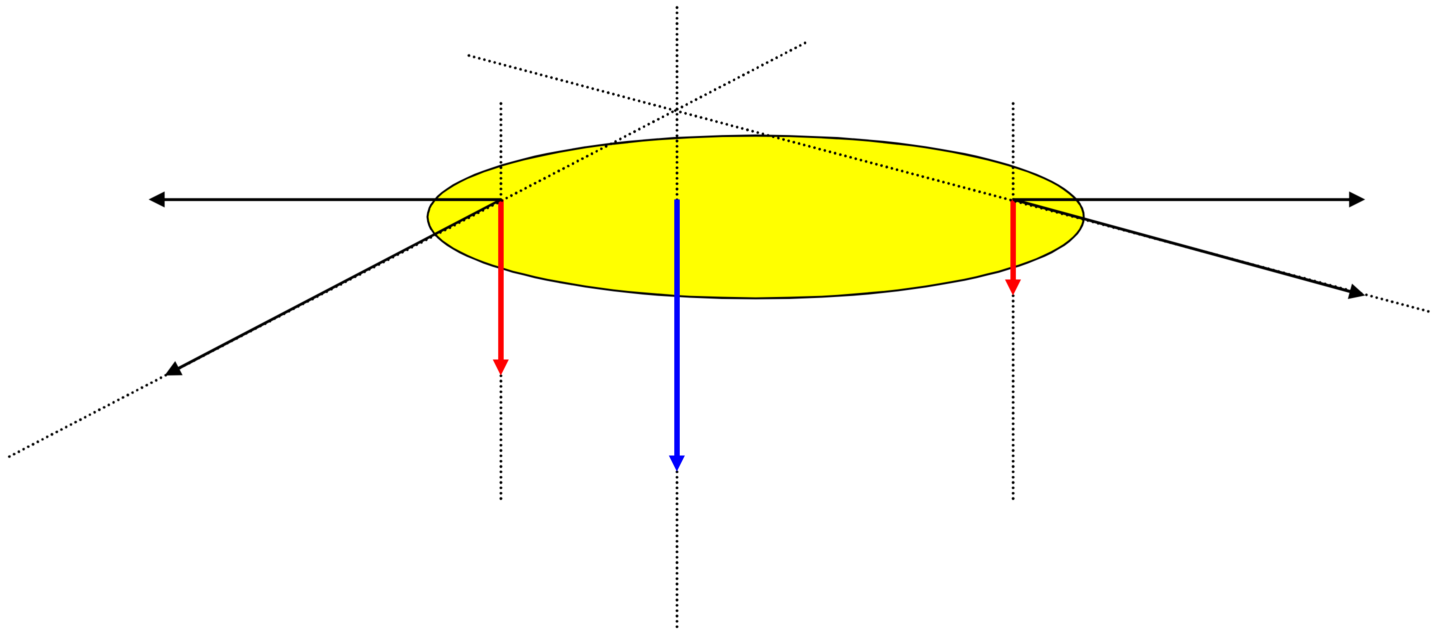
Působení síly na tuhé těleso

- Síly mohou působit v různých bodech tělesa



Rovnoběžné síly na tuhé těleso

- Vektorové přímky se neprotnou



Posuvný pohyb tuhého tělesa

Zákon síly (1. věta impulsová) pro jednotlivé HB tělesa

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i$$

Úpravou a zavedením HS pro posuvný pohyb

$$\sum_i m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i\vec{r}_i = \left(\sum_i m_i\right)\frac{d^2\vec{r}_S}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}$$

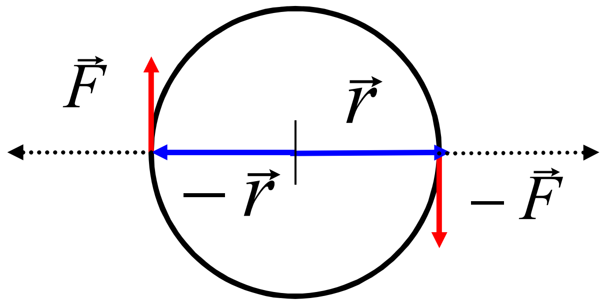
Otáčivý pohyb tuhého tělesa

2. věta impulsová pro jednotlivé HB tělesa

$$\frac{d\vec{b}_i}{dt} = \vec{M}_i$$

Úpravou

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{b}_i = \sum_i \vec{M}_i = \vec{M}$$



$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M} \neq \vec{0}$$

Rovnováha tuhého tělesa

- Rovnováha vzhledem k posuvnému pohybu

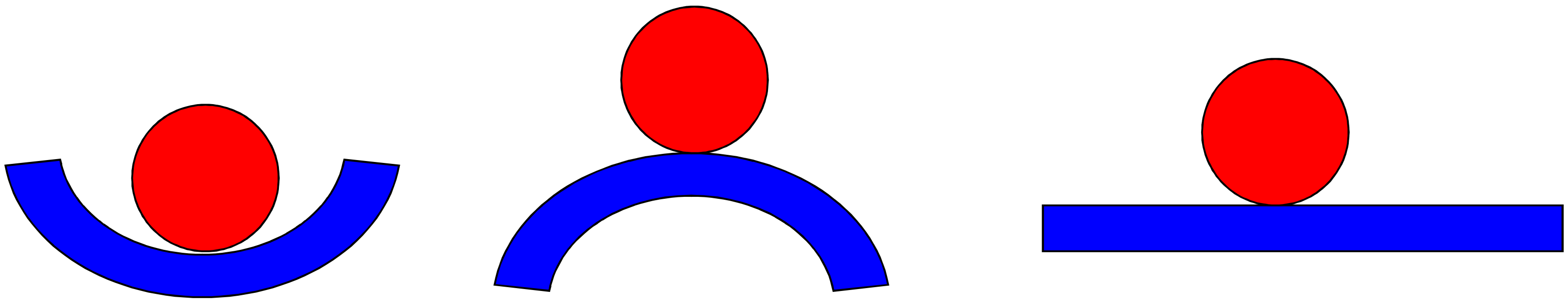
$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

- Rovnováha vzhledem k otáčivému pohybu

$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{0}$$

Rovnováha - stabilita

- Stabilní Labilní Indiferentní



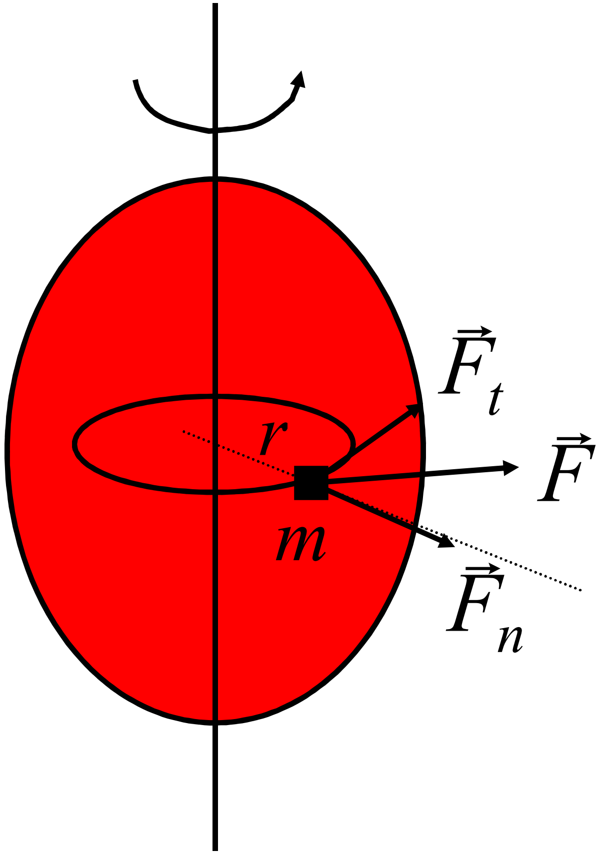
Osa pro otáčivý pohyb

- Pevná (v tělese, prostoru)
- Okamžitá

Obecně není pohyb tuhého tělesa vyřešen v jednoduchých vzorcích – numerické řešení

Otáčení kolem pevné osy

- Osa pevná vzhledem k tělesu



$$a_t = r\varepsilon = r\frac{d\omega}{dt}$$

$$ma_t = F_t$$

$$J\varepsilon = mr^2\varepsilon = F_t r = M$$

Moment setrvačnosti HB

$$J = mr^2$$

Pohybová rovnice pro rotaci

- Pohybová rovnice

$$J\varepsilon = M$$

- Moment hybnosti rotujícího tělesa

$$b = r \cdot mv = mr^2\omega = J\omega$$

Moment setrvačnosti

- Pro HB

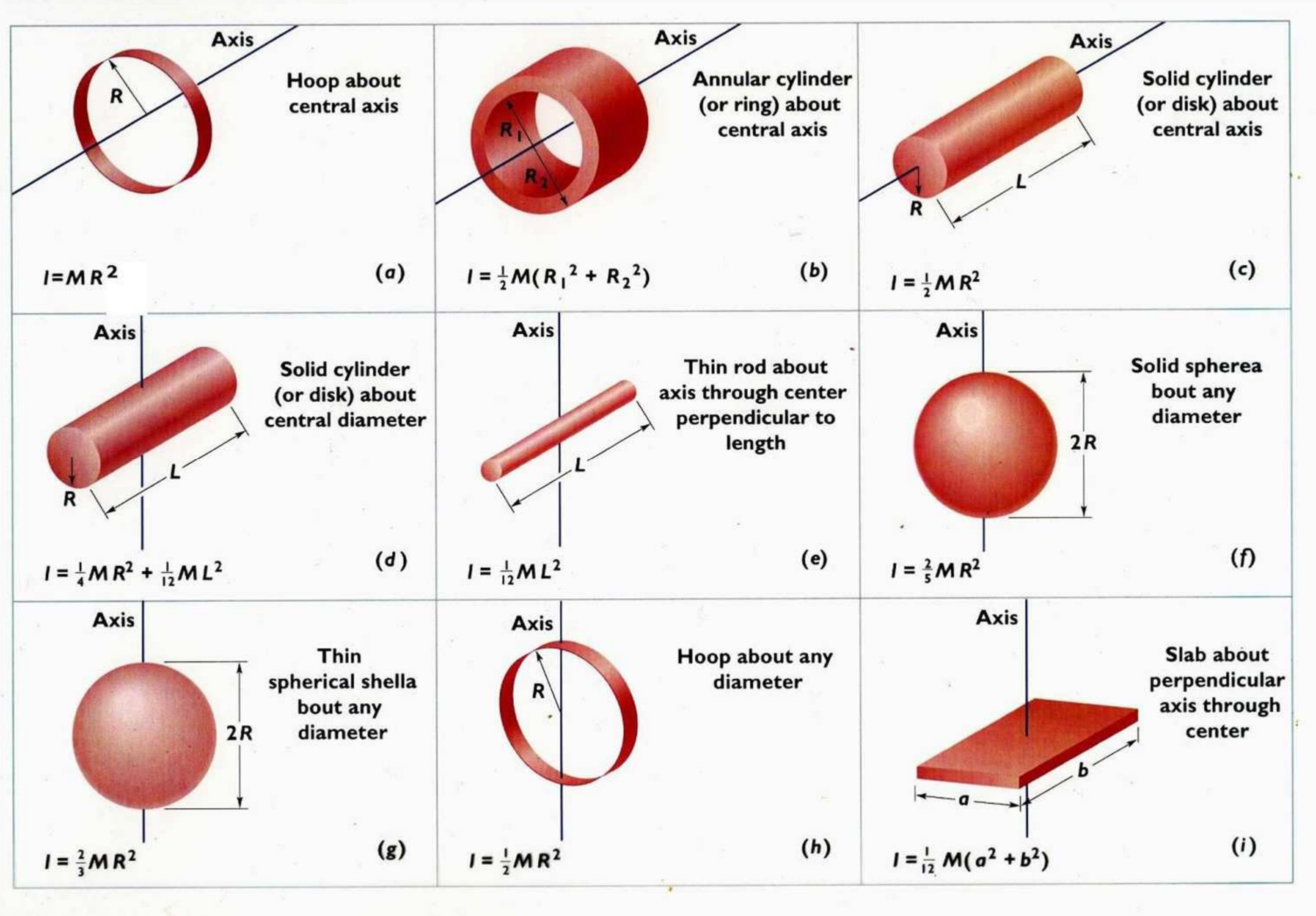
$$J = mr^2$$

- Pro TT

$$J = \sum_i m_i r_i^2 \rightarrow \int_{(m)} r^2 dm$$

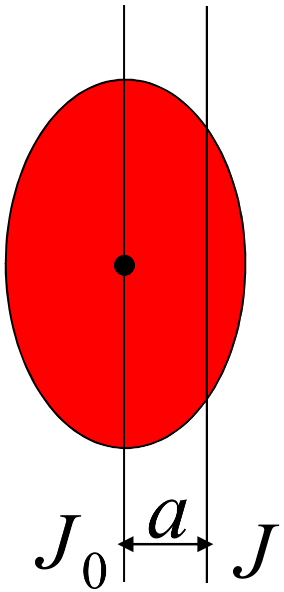
Vždy charakteristický pro určitou osu rotace

Momenty setrvačnosti symetrických těles



Steinerova věta

Moment setrvačnosti vzhledem k ose neprocházející těžištěm, rovnoběžné s původní osou



$$J = J_0 + Ma^2$$

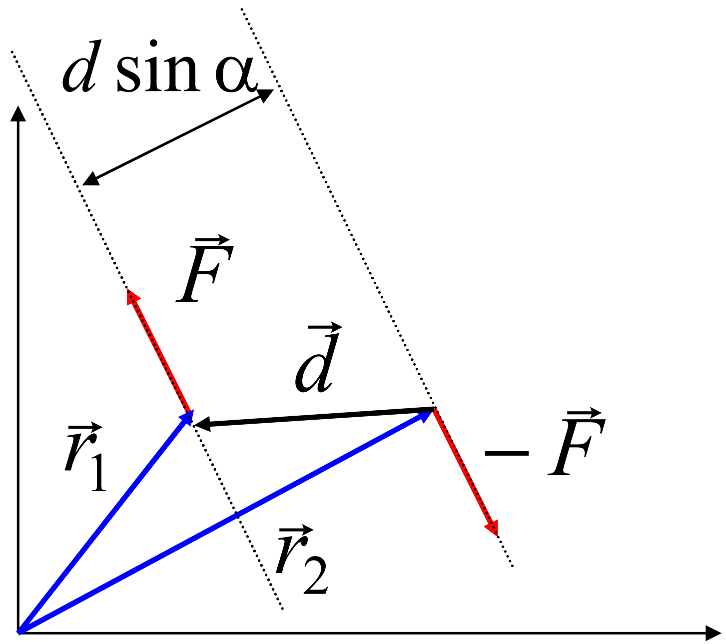
Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k libovolně zvolené ose o je *součtem* jeho momentu setrvačnosti I_T vzhledem k rovnoběžné ose o' ($o' \parallel o$), vedené jeho těžištěm, a momentu setrvačnosti mh^2 veškeré hmoty soustředěné v těžišti vzhledem k ose o, kde h je vzdálenost os o, o'.

Jakob Steiner
(*1796 - †1863)

Dvojice sil

Dvě síly stejně velké a opačně orientované

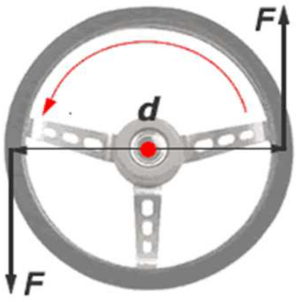
$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times \left(-\vec{F}\right) = \vec{d} \times \vec{F}$$

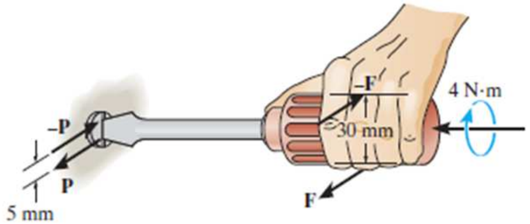


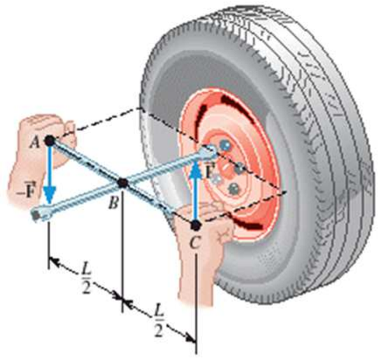
moment dvojice sil

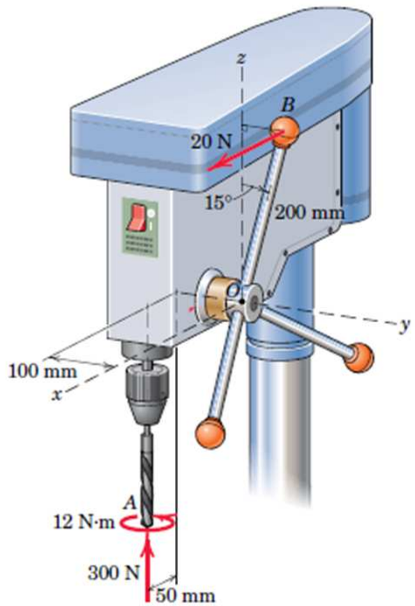
$$M = Fd \sin \alpha$$

Příklady dvojice sil









Práce a výkon při rotačním pohybu

Práce

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_t ds = F_t r d\theta = M d\theta$$

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M d\theta$$

Výkon

$$P = \frac{dW}{dt} = M\omega$$

Rotační a posuvný pohyb

analogie

mezi veličinami

Tabulka 11.3 Posuvný a otáčivý pohyb

Posuvný pohyb v daném směru		Otáčivý pohyb kolem pevné osy	
poloha	x	úhlová poloha	θ
rychlost	$v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$	úhlová rychlost	$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$
zrychlení	$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$	úhlové zrychlení	$\varepsilon = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$
hmotnost	m	moment setrvačnosti	I
věta o hybnosti	$ma = F$	věta o momentu hybnosti	$I\varepsilon = M$
práce	$W = \int F\mathrm{d}x$	práce	$W = \int M\mathrm{d}\theta$
kinetická energie	$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$	kinetická energie	$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}I\omega^2$
výkon	$P = Fv$	výkon	$P = M\omega$
vztah mezi prací a změnou kinetické energie	$W = \Delta E_\mathrm{k}$	vztah mezi prací a změnou kinetické energie	$W = \Delta E_\mathrm{k}$

Tabulka 12.2 Posuvný a otáčivý pohyb, pokračování tab. 11.3

Posuvný pohyb v daném směru		Otáčivý pohyb kolem pevné osy	
síla	$\boldsymbol{F}$	moment síly	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
hybnost	$\boldsymbol{p}$	moment hybnosti	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$
hybnost[a]	$\boldsymbol{P} = \sum \boldsymbol{p}_i$	moment hybnosti[a]	$\boldsymbol{L} = \sum \boldsymbol{L}_i$
hybnost[a]	$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}_T$	moment hybnosti[b]	$L = I\omega$
věta o hybnosti[a]	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$	věta o momentu hybnosti[a]	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}_\mathrm{ext}$
zákon zachování[c]	$\boldsymbol{P} =$ konst.	zákon zachování[c]	$\boldsymbol{L} =$ konst.

Obecný otáčivý pohyb

Není nutně osa pevná v prostoru a tělese

Precese