➢ Transcendentní rovnice, numerické řešení

Vojta:

Mám za úkol vyřešit rovnici:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x \qquad \text{pro} \quad x \in R\,,$$

nevím si s tím rady. Prosím o pomoc, nebo alespoň radu jak na to mám jít.

JaJ:

Vojto, vyřešit goniometrickou rovnici, kterou jste dostal za úkol, nemusí být vůbec tak jednoduché jak se zdá.

Jedná se o tzv. transcendentní rovnici, která v obecném případě vůbec nemusí mít analytické řešení, které bychom získali pomocí algebraických úprav. Transcendentní rovnice je rovnice, která obsahuje funkci, kterou nelze vyjádřit konečným polynomem. Jsou to kromě goniometrických funkcí také i např. funkce logaritmické, exponenciální a mnoho jiných, se kterými se celkem běžně v matematice setkáváme. Pokud není možné najít jejich řešení analytickým způsobem (nebo ho prostě nalézt neumíme), lze ho hledat přibližnými metodami, buď graficky, různými aproximacemi nebo iterací (cyklicky opakovaným výpočtem postupně zpřesňujícím výsledek).

Na střední škole jste se jistě s goniometrickými (a jinými transcendentními) rovnicemi setkávali a běžně jste je řešili. Dokonce si myslím, že jsou to dost oblíbená zadání, která učitelé studentům rádi zadávají z „tréninkových“ důvodů. Jsou to ale většinou „školní“ úlohy, které se dají vhodnými úpravami založenými na vztazích mezi různými funkcemi převést na rovnice algebraické, které pak snadno vyřešíme. Paradoxně, byť se s těmito úkoly setkáváme ve škole často, jedná se vždy jen o speciální zadání. Většina transcendentních rovnic, zejména ty, které popisují reálné fyzikální děje, se tímto způsobem vyřešit nepodaří a zbývají nám pouze přibližné a numerické metody. Typickým příkladem je na příklad jednoduchá rovnice:

$$\cos x = x \quad .$$

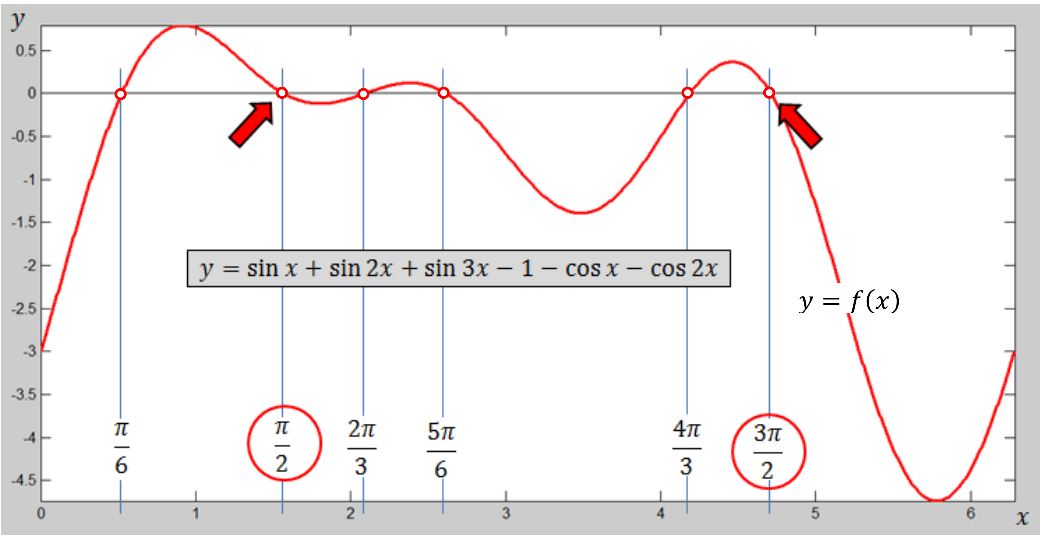
Ale k vašemu úkolu.

Moc jednoduché zadání jste nedostal. Když jsem se pokoušel o jeho řešení, vycházel jsem nejprve z toho, že to je ono „školní“ zadání, které by mělo jít vhodnými úpravami převést na algebraickou rovnici. Musím se ale přiznat, že jsem nemohl ani já nejprve najít vhodný postup úprav a trochu jsem se v tom ztratil. Neexistuje totiž přesný návod jak postupovat, záleží zde jen na naší zkušenosti a intuici. Obvykle se snažíme upravit rovnici tak, aby se nezávisle proměnná vyskytovala jako argument pouze jediné funkce (např. sin nebo cos). Jednoduchou substitucí pak dostaneme algebraickou rovnici, kterou vyřešíme. Výsledné řešení zadané rovnice pak získáme řešením příslušné inverzní funkce.

To se mi ale nejprve nedařilo, začal jsem připouštět, že rovnice nemusí mít analytické řešení. Pomohl jsem si přibližnou grafickou metodou. Převedl jsem rovnici do implicitního tvaru:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x - 1 - \cos x - \cos 2x = 0$$

a vykreslil jsem si průběh její levé strany v rozsahu $x\epsilon\langle 0; 2\pi\rangle$ *(s periodou* 2π *se opakuje).*



Průsečíky s osou 0_x *jsou v daném intervalu hledané kořeny zadané rovnice. Samozřejmě, jsou určené graficky s nepřesností odpovídající přesnosti vykreslení tohoto grafu.*

Všiml jsem si (a ověřil výpočtem), že dva kořeny $\frac{\pi}{2}$ *a* $\frac{3\pi}{2}$ *jsou opravdu kořeny zadané rovnice. Musí jít proto z levé i z pravé strany zadané rovnice vytknout* $\cos x$ *(protože* $\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$*). To mne opět vrátilo zpět* *k předpokladu „školního" zadání úlohy, která se dá vhodně upravit na algebraickou rovnici. Postupoval jsem proto v úpravách tímto směrem, snažil jsem se tedy upravit levou i pravou stranu zadané rovnice tak, aby šlo z obou vytknout* $\cos x$ *.*

Vycházím v zásadě ze dvou základních vzorců pro součet/rozdíl dvou úhlů, které si trvale pamatuji, ostatní si podle potřeby buď odvodím, nebo najdu na internetu, či v některé z příruček nebo učebnic:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\propto \pm \beta) &= \sin \propto \cdot \cos \beta \pm \cos \propto \cdot \sin \beta \ , \\ \cos(\propto \pm \beta) &= \cos \propto \cdot \cos \beta \mp \sin \propto \cdot \sin \beta \ . \end{aligned}}$$

Potom:

$$\sin(2 \propto) = \sin \propto \cdot \cos \propto + \cos \propto \cdot \sin \propto = \underline{2 \sin \propto \cos \propto} \ ,$$

$$\cos(2 \propto) = \cos \propto \cdot \cos \propto - \sin \propto \cdot \sin \propto = \cos^2 \propto - \sin^2 \propto =$$

$$= \underbrace{1 - \sin^2 \propto}_{\cos^2 \propto} - \sin^2 \propto = \underline{1 - 2 \sin^2 \propto} \ ,$$

$$\sin(3 \propto) = \sin(2 \propto + \propto) = \sin 2 \propto \cdot \cos \propto + \cos 2 \propto \cdot \sin \propto =$$

$$= \underbrace{2 \sin \propto \cos \propto}_{\sin 2\propto} \cdot \cos \propto + \underbrace{(1 - 2 \sin^2 \propto)}_{\cos 2\propto} \cdot \sin \propto =$$

$$= 2 \sin \propto \underbrace{(1 - \sin^2 \propto)}_{\cos^2 \propto} + (1 - 2 \sin^2 \propto) \cdot \sin \propto =$$

$$= \underline{3 \sin \propto - 4 \sin^3 \propto} \ .$$

Úprava levé strany zadané rovnice:

$$\underline{\sin x + \sin 2x + \sin 3x} = \sin x + 2 \sin x \cos x + 3 \sin x - 4 \sin^3 x =$$

$$= \sin x \,(4 - 4 \sin^2 x + 2 \cos x) = \sin x \,[\, 4 \underbrace{(1 - \sin^2 x)}_{\cos^2 x} + 2 \cos x \,] =$$

$$= \underline{2 \sin x \cos x \,(1 + 2 \cos x)} \ .$$

Úprava pravé strany:

$$\underline{1 + \cos x + \cos 2x} = 1 + \cos x + \underbrace{(1 - 2 \sin^2 x)}_{\cos 2x} = 2 + \cos x - 2 \underbrace{(1 - \cos^2 x)}_{\sin^2 x} =$$

$$= \cos x + 2 \cos^2 x = \underline{\cos x \,(1 + 2 \cos x)} \ .$$

Zadanou rovnici pak můžeme vyjádřit ve tvaru součinu činitelů:

$$\underline{\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x} \ ,$$

$$2 \sin x \cos x \,(1 + 2 \cos x) = \cos x \,(1 + 2 \cos x) \ ,$$

$$\underline{\cos x \,(1 + 2 \cos x)(2 \sin x - 1) = 0} \ .$$

Z tohoto tvaru již snadno určíme kořeny rovnice:

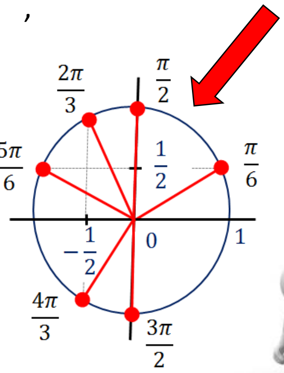
a) $\cos x = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , \quad k \in Z \quad ,$

b) $1 + 2\cos x = 0$

$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x_{3,4} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array} \right. \quad ,$

c) $2\sin x - 1 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x_{5,6} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array} \right. \quad .$



Poznámka:

V hodinách matematiky na střední škole se obvykle předpokládá, že budete pracovat s již odvozenými vzorci pro součet, rozdíl nebo součin goniometrických funkcí, s funkcemi součtu nebo rozdílu dvou úhlů, s funkcemi polovičního nebo násobného úhlu, …
Najdete je v každé matematické příručce, v učebnici středoškolské matematiky, nebo naleznete na internetu, např.:

https://cs.wikipedia.org/wiki/Goniometrick%C3%A1_funkce .

Důrazně však varuji před tím, učit se všechny vzorce trvale zpaměti !!!

Já sám si dlouhodobě pamatuji jen základní vztahy, hlavně ty, které jsou uvedeny v předcházejícím textu v červeném rámečku, ostatní si v případě potřeby vyhledám. Nezahlťte si hlavu zbytečným balastem, matematika není o velkém souboru naučených vzorečků, je hlavně o systému myšlení, o hledání a uvědomování si souvislostí.

Autor zadání pravděpodobně předpokládal, že budete pracovat přímo s těmito (v lepším případě předem odvozenými) vzorci, které si buď pamatujete, nebo snadno vyhledáte:

$$\sin 2\propto = 2\sin\propto\cos\propto \quad ,$$

$$\cos 2\propto = \cos^2\propto - \sin^2\propto \quad ,$$

$$\sin\propto + \sin\beta = 2\sin\frac{\propto+\beta}{2}\cos\frac{\propto-\beta}{2} \quad .$$

Pomocí těchto vztahů se nám pak podaří zadanou rovnici:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$$

snadno upravit. Úprava levé strany:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sin 2x + \left(\underbrace{\sin x + \sin 3x}\right) = \sin 2x + 2\sin\frac{4x}{2}\cos\frac{-2x}{2} =$$

$$= \sin 2x + 2\sin 2x \underbrace{\cos(-x)} = \sin 2x + 2\sin 2x \cos x =$$

$$= \underbrace{\sin 2x}\ (1 + 2\cos x) = 2\sin x \cos x\ (1 + 2\cos x) \quad .$$

Úprava pravé strany:

$$1 + \cos x + \underbrace{\cos 2x} = 1 + \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = \underbrace{1 - \sin^2 x} + \cos x + \cos^2 x =$$

$$= \cos^2 x + \cos x + \cos^2 x = \cos x\ (1 + 2\cos x) \quad .$$

Celá rovnice pak po úpravě:

$$2\sin x \cos x\ (1 + 2\cos x) = \cos x\ (1 + 2\cos x) \quad ,$$

$$2\sin x \cos x\ (1 + 2\cos x) - \cos x\ (1 + 2\cos x) =$$

$$= \cos x\ (1 + 2\cos x)(2\sin x - 1) = 0 \quad .$$

V *několika krocích jsme došli trochu jinou cestou ke stejnému rozkladu zadané rovnice na součin tří součinitelů (srovnej!) a následně i stejnou úvahou ke stejným kořenům rovnice.*

Na závěr poznamenejme (jen pro zajímavost), že obecné vzorce násobného argumentu goniometrických funkcí sinu a cosinu:

$$\cos(n \propto) = \cos^n \propto - \binom{n}{2}\sin^2 \propto \cos^{n-2} \propto + \binom{n}{4}\sin^4 \propto \cos^{n-4} \propto - + \cdots \quad ; \quad n \in N \quad ,$$

$$\sin(n \propto) = n \sin \propto \cos^{n-1} \propto - \binom{n}{3}\sin^3 \propto \cos^{n-3} \propto + \binom{n}{5}\sin^5 \propto \cos^{n-5} \propto - + \cdots \quad ,$$

$$\binom{n}{k} = 0 \quad pro \quad k > n \quad ,$$

jsou uvedeny v obvyklých matematických příručkách, např.:

Bartsch, H.J.: Matematické vzorce, nebo
Rektorys, K.: Přehled užité matematiky.

V našem konkrétním případě:

$$\cos(2 \propto) = \cos^2 \propto - \binom{2}{2}\sin^2 \propto \cos^0 \propto = \cos^2 \propto - \sin^2 \propto \quad ,$$

$$\sin(2 \propto) = 2\sin \propto \cos \propto \quad ,$$

$$\sin(3 \propto) = 3\sin \propto \cos^2 \propto - \binom{3}{3}\sin^3 \propto \cos^0 \propto =$$

$$= 3\sin \propto \cos^2 \propto - \sin^3 \propto = 3\sin \propto (1 - \sin^2 \propto) - \sin^3 \propto =$$

$$= 3\sin \propto - 4\sin^3 \propto \quad .$$

Příklad:

Na následujícím jednoduchém příkladu se vám pokusím přiblížit další typickou strategii řešení „školních“ goniometrických rovnic, která obvykle vede k jejich vyřešení. Chci ale také upozornit i na nenápadné úskalí, které často vede k chybám:

$$6\sin x - 3\cos x = 5 \quad , \quad x \in R \quad .$$

Strategie je vcelku prostá – postupnými úpravami se snažíme upravit všechny funkce s nezávisle proměnnou na funkce stejného typu. Zde např. vyjádřit $\cos x$ *pomocí funkce* $\sin x$*. Následnou substitucí převedeme nepříjemnou transcendentní rovnici na rovnici algebraickou s proměnnou* $\sin x$*, kterou snadno vyřešíme. Konečný výsledek získáme řešením příslušné inverzní funkce (zde* $\arcsin$*).*

$$6\sin x - 3\cos x = 5 \quad \rightarrow \quad 6\sin x - 5 = 3\cos x \quad ↲ \quad \cos x = (1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}} \quad ,$$

$$6\sin x - 5 = 3\sqrt{1-\sin^2 x} \quad ↲ \quad *^2 \quad ,$$

$$36\sin^2 x - 60\sin x + 25 = 9 - 9\sin^2 x \quad ,$$

$$45\sin^2 x - 60\sin x + 16 = 0 \quad ↲ \quad \sin x = z \quad ,$$

$z_{1,2} > 0$
I.+II. kvadrant

$$45 z^2 - 60 z + 16 = 0 \quad ,$$

$$z_{1,2} = \frac{60 \pm \sqrt{60^2 - 4\cdot 45\cdot 16}}{2\cdot 45} \approx \left\langle \begin{array}{l} 0{,}965 \\ 0{,}369 \end{array} \right. .$$

Protože jsme při úpravě zadané rovnice použili tzv. neekvivalentní úpravu (odmocninu), je nutné pro určení polohy kořenů rovnice v prvním nebo druhém kvadrantu provést ještě následující úvahu:

$$6\sin x - 5 = 3\cos x \quad ,$$

1) $\cos x \geq 0$, *(I. kvadrant)*

$$6\sin x - 5 \geq 0 \quad \rightarrow \quad \sin x = z \geq \frac{5}{6} = 0{,}8\overline{33} \quad \rightarrow \quad z \neq 0{,}369 \quad ,$$

$$z_1 = 0{,}965 > 0{,}8\overline{33} \quad \rightarrow \quad x_1 = \arcsin 0{,}965 + k2\pi \approx 1{,}305 + k2\pi \quad ,$$

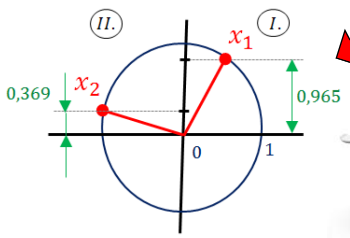
$$k \in Z \quad .$$

2) $\cos x < 0$, *(II. kvadrant)*

$$6\sin x - 5 < 0 \quad \rightarrow \quad \sin x = z < \frac{5}{6} = 0{,}8\overline{33} \quad \rightarrow \quad z \neq 0{,}965 \quad ,$$

$$z_2 = 0{,}369 < 0{,}8\overline{33} \quad \rightarrow \quad x_2 = \pi - \arcsin 0{,}369 + k2\pi \approx 2{,}764 + k2\pi \quad .$$

$$1{,}305\ rad \sim 74°45{,}3' \quad ,$$
$$2{,}764\ rad \sim 158°22{,}5' \quad .$$



Rád bych upozornil na to, že oba příklady goniometrických rovnic, kterými jsme se v předcházející části zabývali (včetně toho vašeho, který jste pravděpodobně dostal za trest, protože patří mezi ty obtížnější), jsou typické „školní“ příklady, často v hodinách matematiky na středních školách zadávané k procvičování úprav různých tvarů goniometrických funkcí a vztahů mezi nimi. Ve většině případů to jsou úlohy vytvořené uměle tak, aby se daly vhodnými úpravami převést na rovnice algebraické, které umíme řešit.

Jsou to ale případy spíše výjimečné, většina goniometrických rovnic, které popisují konkrétní fyzikální problém, se tímto způsobem vyřešit nedá. Týká se to v obecném případě všech transcendentních rovnic (goniometrické, logaritmické, exponenciální, …) i rovnic algebraických vyšších stupňů (rovnice pátého a vyšších stupňů se analyticky řešit vůbec nedají, jejich řešení je nutné hledat pouze numericky).

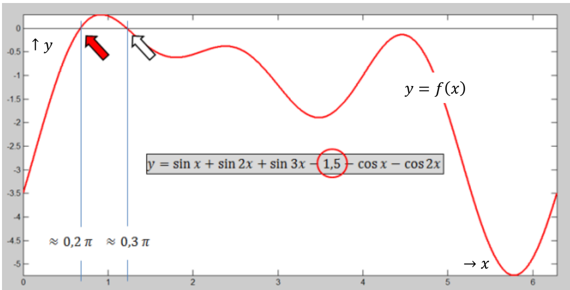
Ukažme si to na příkladu, který jste dostal zadán:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x \quad .$$

Pokud by byla tato rovnice jen trochu modifikovaná (buď ve svých koeficientech, nebo v argumentech goniometrických funkcí), její řešení pomocí postupných úprav by k výsledku nevedlo. Museli bychom přistoupit k přibližnému grafickému nebo numerickému řešení. Např.:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1{,}5 + \cos x + \cos 2x \quad .$$

Postupovali bychom asi takto: po několika (patrně neúspěšných) pokusech upravit rovnici do algebraického tvaru bychom se pokusili o grafické řešení, viz obrázek (průběh funkce $y = f(x)$ v intervalu $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$). Kořeny zadané rovnice přibližně určíme odečtením z grafu. Odhadem se jedná o $x_1 \approx 0{,}2\pi$ a $x_2 \approx 0{,}3\pi$, ostatní kořeny se cyklicky opakují s periodou 2π.



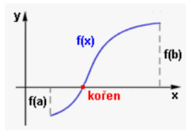
Pokud by nám přesnost takovéhoto hrubého odhadu postačovala, prohlásíme hodnoty x_1 a x_2 za přibližné řešení zadané rovnice a máme hotovo.

Přesnost tohoto odhadu však není příliš veliká $f(0{,}2\,\pi) \approx -0{,}128 \neq 0$ a $f(0{,}3\,\pi) \approx +0{,}290 \neq 0$. Zlepšení přesnosti můžeme dosáhnout buď úpravou měřítka vykreslení grafu v okolí průsečíků s osou o_x a přesnějším odečtením, nebo použitím vhodné numerické metody.

Numerické optimalizační metody jsou obvykle založeny na cyklicky opakovaném výpočtu postupně zpřesňujícím výsledek, v našem případě přibližně určující kořen zadané rovnice. S různými metodami numerické matematiky, jejich vlastnostmi a použitím se seznámíte podrobně v úvodních semestrech studia na vysoké škole. Ukažme si ale základní princip výpočtu alespoň na jedné jednoduché metodě.

Metoda půlení intervalu.

Metoda nám umožňuje hledat reálný kořen rovnice $y = f(x)$ s požadovanou přesností. Předpokládáme, že máme přibližný odhad $x = a$ jednoho z kořenů rovnice, pro který však $f(a) \neq 0$. Hledejme v jeho blízkém okolí jiný bod $x = b$; $f(b) \neq 0$, ve kterém nabývá funkce opačného znaménka $f(a) \cdot f(b) < 0$.



Jestliže je funkce na intervalu $\langle a; b\rangle$ spojitá, pak na tomto intervalu jistě existuje (alespoň jeden) reálný kořen (tzv. Bolzanova věta). Metoda půlení intervalu spočívá v tom, že vypočteme funkční hodnotu v bodu $c = \frac{a+b}{2}$, který leží v polovině intervalu $\langle a; b\rangle$. Pokud platí $f(c) = 0$, což bude jen zřídkakdy, získali jsme přesně kořen a výpočet končí. Pokud ale bude $f(c) \neq 0$, potom na jednom z intervalů $\langle a; c\rangle$ nebo $\langle c; b\rangle$ funkce $f(x)$ mění opět své znaménko. Tento interval bude pak novou přesnější lokalizací hledaného kořene. Od intervalu $\langle a; b\rangle$ jsme takto přešli k intervalu poloviční délky, tj. snížili jsme maximální chybu odhadu. Dalším provedením tohoto postupu snížíme velikost chyby opět na polovinu a to opakujeme tak dlouho, dokud není chyba dostatečně malá.

V našem konkrétním případě:

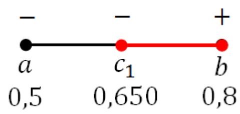
$$x_1 \approx 0{,}2\pi \approx 0{,}628\, rad \quad ; \quad x_2 \approx 0{,}3\pi \approx 0{,}942\, rad\,,$$

zvolme pro začátek iterace např.:

$$a = 0{,}5 < x_1 \quad \rightarrow \quad f(a) \approx -0{,}599 < 0\,,$$

$$b = 0{,}8 < x_2 \quad \rightarrow \quad f(b) \approx +0{,}225 > 0\,.$$

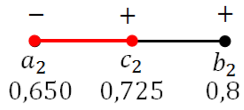
V dalších krocích:



1) $c_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{0{,}5+0{,}8}{2} = 0{,}650 \quad \rightarrow \quad f(c_1) \approx -0{,}066 < 0$,

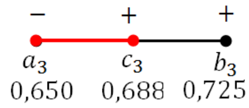
$$f(a) < 0 \;\; ; \;\; \underline{f(c_1) < 0} \;\; ; \;\; \underline{f(b) > 0} \quad \Rightarrow \quad a_2 = c_1 \;\; ; \;\; b_2 = b \;\; ,$$

2) $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2} = \frac{0{,}650+0{,}8}{2} = 0{,}725 \quad \rightarrow \quad f(c_2) \approx +0{,}110 > 0$,



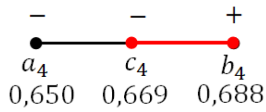
$\underline{f(a_2) < 0}$; $\underline{f(c_2) > 0}$; $f(b_2) > 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_2$; $b_3 = c_2$,

3) $c_3 = \frac{a_3+b_3}{2} = \frac{0{,}650+0{,}725}{2} \approx 0{,}688 \quad \rightarrow \quad f(c_3) \approx +0{,}030 > 0$,



$\underline{f(a_3) < 0}$; $\underline{f(c_3) > 0}$; $f(b_3) > 0 \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_3$; $b_4 = c_3$,

4) $c_4 = \frac{a_4+b_4}{2} \approx \frac{0{,}650+0{,}688}{2} \approx 0{,}669 \quad \rightarrow \quad f(c_4) \approx -0{,}016 < 0$,



$f(a_4) < 0$; $\underline{f(c_4) < 0}$; $\underline{f(b_4) > 0} \quad \Rightarrow \quad a_5 = c_4$; $b_5 = b_4$,

atd., atd., …

Hodnota kořenu rovnice po patnácti iteračních krocích:

$x_1 \approx (\underline{0{,}67519} \cdots \pm 3{,}997 \cdot 10^{-6}) + k2\pi$, $k \epsilon Z$,

$0{,}67519\, rad \approx 0{,}215\, \pi \approx 38°41'$. (Výpočet proveden s přesností na 15 desetinných míst.)

Zcela podobně bychom postupovali i při výpočtu druhé varianty kořenů.

Poznámka:

Jistě vás napadne, že metodika opakovaného iteračního výpočtu vede k algoritmizaci jednotlivých kroků a k realizaci na číslicovém počítači. Skutečně, numerické metody jsou velmi často používané nástroje pro řešení složitějších úloh, pro které by bylo přesné analytické řešení velmi komplikované nebo nemožné. Tvoří velmi důležitou část moderní matematiky a jsou základem většiny složitějších výpočetních systémů, se kterými se setkáváme. Jsou i podstatou IQ našich chytrých kalkulaček, se kterými běžně pracujeme.

Existuje celá řada sofistikovaných numerických metod a optimalizačních přístupů vhodných pro různé situace. Liší se složitostí, přesností, stabilitou a rychlostí konvergence iteračního výpočtu. Studium těchto metod je součástí kurzu vysokoškolské matematiky, která vás v příštích semestrech jistě čeká.