➢ Skalární a vektorový součin vektorů

FAQ

Michal:

Vždycky mě naštve, když mi někdo předloží něco, do čeho není vidět, něco umělého s tím, že je to takhle definované. Pamatuj si to, používej to, takhle to funguje. Mezi tyto věci patří i skalární součin. Vynásob tohle s tímhle, pak to sečti, dostaneš číslo, z kterého vypočítáš úhel, který svírají dva vektory. Ano, funguje to. Ověřil jsem si to, nakreslil jsem si to, opravdu úhel sedí. Ale proč? Ještě horší to je s vektorovým součinem. Tam nejenže nevím proč, ale navíc si ani nedokážu zapamatovat jak to vypočítat. Přiznám se, že jsem si na maturu musel udělat tahák. Na štěstí jsem ho ale nemusel použít.

JaJ:

Michale, vašemu pocitu rozumím. Ne ale vždy se dá vše dělat jinak, než že vyjdeme z nějakého tvrzení nebo předpokladu. Některé věci musíme přijmout, pamatovat si je a naučit se s nimi pracovat. Není jich ale v matematice moc a skalární i vektorový součin mezi ně určitě nepatří. Mnohem důležitější je si uvědomit souvislosti, propojit si je a nebát se o nich přemýšlet. Principem matematiky je právě takovýto způsob myšlení. Postavit matematiku pouze na pamatování si spousty vzorečků a nic neříkajících tvrzení bez souvislostí je spolehlivá cesta k neúspěchu.

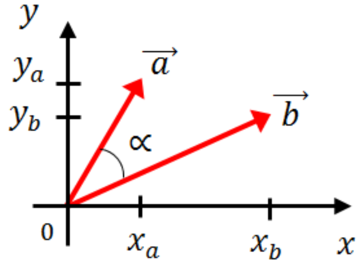
Podle vašeho dotazu vám to ale nehrozí a je to tak dobře. Pojďme se tedy spolu trochu podívat nejprve na fenomén skalárního součinu dvou vektorů.

Byť se dá operace skalárního součinu rozšířit i na 3D a dokonce i na vícerozměrné prostory, ukažme si základní úvahu na situaci v prostoru dvojrozměrném.

Mějme dva vektory $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{b}$ s počátečními body v počátku souřadného systému a vzájemně svírající úhel $\propto$

$$\overrightarrow{a} = (x_a; y_a) \quad ; \quad |\overrightarrow{a}| = \sqrt{{x_a}^2 + {y_a}^2} \quad ,$$

$$\overrightarrow{b} = (x_b; y_b) \quad ; \quad |\overrightarrow{b}| = \sqrt{{x_b}^2 + {y_b}^2} \quad .$$

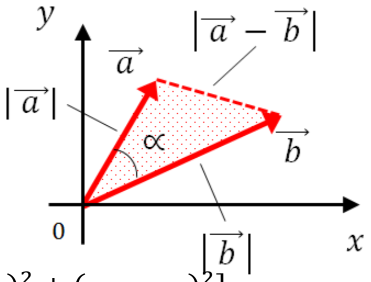


Skalární součin $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ je definován tímto („podivným“) způsobem:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = [x_a \;\; y_a] \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix} = x_a x_b + y_a y_b \quad .$$

Skalární součin dvou vektorů je číslo. !

Podívejme se na to, co ve skutečnosti toto číslo znamená. Kosinová věta použitá na vyznačený trojúhelník podle obrázku:



$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\propto \ .$$

Po rozepsání a jednoduché úpravě:

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\propto = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2}{2} =$$

$$= \frac{({x_a}^2 + {y_a}^2) + ({x_b}^2 + {y_b}^2) - [(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2]}{2} =$$

$$= \frac{{x_a}^2 + {y_a}^2 + {x_b}^2 + {y_b}^2 - ({x_a}^2 + {x_b}^2 - 2x_a x_b + {y_a}^2 + {y_b}^2 - 2y_a y_b)}{2} =$$

$$= x_a x_b + y_a y_b = \vec{a}\cdot\vec{b} \quad .$$

Pro úhel ∝ sevřený dvěma nenulovými vektory tak zřejmě platí:

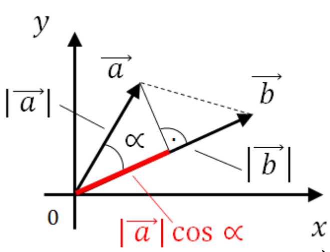
$$\boxed{\cos\propto = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}} \quad .$$

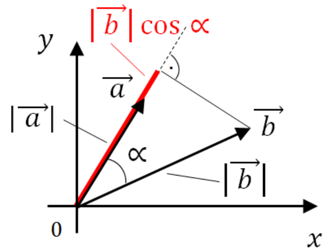
Pro vektory navzájem kolmé $\vec{a}\perp\vec{b}$ platí:

$$\propto = \frac{\pi}{2}\ (90°) \quad\rightarrow\quad \cos\propto = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad\rightarrow\quad \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = 0 \quad\rightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad .$$

Skalární součin dvou vzájemně kolmých vektorů je roven nule.

Skalární součin dvou vektorů můžeme geometricky interpretovat jako součin absolutní hodnoty (modulu, délky) jednoho vektoru a kolmé projekce absolutní hodnoty druhého vektoru do jeho nositelky, viz obrázek. Je úplně jedno, jestli promítáme první do druhého nebo obráceně.





$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\propto$$

Analogicky je definován skalární součin dvou vektorů i ve 3D prostoru:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = [x_a\ y_a\ z_a]\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b \quad .$$

Také v tomto případě je geometrická interpretace stejná jako ve 2D prostoru, ale v rovině dané nositelkami obou vektorů.

Pojďme se teď ale podívat na poněkud komplikovanější případ vektorového součinu dvou vektorů.

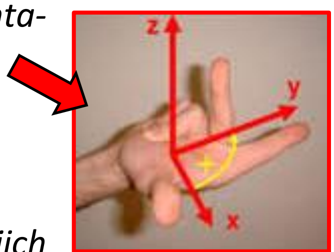
Souhlasím s vámi, že na rozdíl od jeho geometrické interpretace (kterou jistě znáte) je způsob výpočtu poněkud nepřehledný. Pamatovat si složitý vzoreček, se kterým jste se setkali na SŠ, vám už vůbec nedoporučuji (ani já si ho nepamatuji). Pokud ho budete potřebovat, raději si ho vyhledejte v některé z příruček nebo na internetu. Jsem si jist, že by vám jeho neznalost odpustili i u maturity.

Pokusím se vám ale nabídnout jednoduchou mnemotechnickou pomůcku, kterou si snad jednodušeji zapamatujete (tak jako já), a která vám pomůže řešit úlohy s vektorovým součinem i bez složitého vzorce. Je založena na práci s determinantem jisté matice, tedy na technice lineární algebry, se kterou se seznámíte hned v prvních semestrech na vysoké škole. Určitě se vám bude tento postup brzy hodit.

Vektorový součin je další důležitá binární operace nad dvěma vektory. Na rozdíl od skalárního součinu, kde výsledkem bylo číslo (skalár), výsledkem vektorového součinu je vektor.

Než si ho zavedeme, je potřeba se zmínit o tzv. pravotočivé a levotočivé bázi prostoru, která nám umožňuje určit orientaci výsledného vektoru.

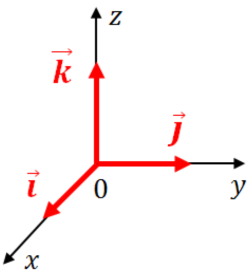
Uvažujeme obvykle pravoúhlý kartézský 3D souřadný systém s pravotočivou bází. Rozdíl mezi pravotočivou a levotočivou orientací viz obrázek. Jednotkové bázové vektory:



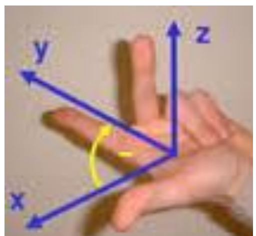
Pravotočivý souřadnicový systém

$$\vec{\imath} = (1;0;0) \quad , \quad \vec{\jmath} = (0;1;0) \quad , \quad \vec{k} = (0;0;1) \quad ,$$

$$|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = |\vec{k}| = 1 \ ,$$



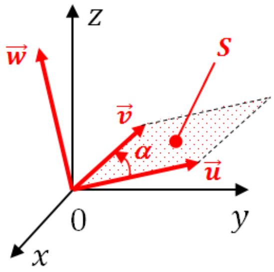
mají společný počáteční bod 0 *a jejich směry a orientace jsou určeny osami soustavy souřadnic. Jejich velikost (modul, délka) se rovná jedné. Báze je obecně uspořádaná trojice vektorů (záleží na pořadí) jejichž pomocí lze vyjádřit libovolný vektor jako jejich lineární kombinaci:*



Levotočivý souřadnicový systém

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z) = a_x\,\vec{\imath} + a_y\,\vec{\jmath} + a_z\,\vec{k} \ .$$

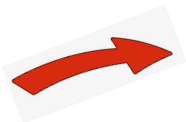
Představíme-li si, že pravou ruku přiložíme k vektorům tak, aby palec směřoval ve směru $\vec{\imath}$ (ve směru osy x) a ukazováček ve směru $\vec{\jmath}$ (ve směru osy y), musí u pravotočivé soustavy směřovat prostředníček ve směru $\vec{k}$ (ve směru osy z).



Vektorový součin $\vec{w}$ vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ je definován jako vektor kolmý k oběma vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$ s velikostí rovnou obsahu rovnoběžníka, který oba vektory určují:

$$S = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\alpha \ .$$

Vektor $\vec{w}$ je normálovým vektorem roviny určené vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$:



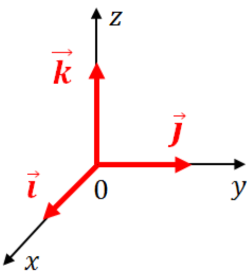
$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \quad ; \quad \boxed{|\vec{w}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\alpha} \quad ; \quad \alpha \in \langle 0\,;\,\pi \rangle \ ,$$

$$\vec{w} \perp \vec{u} \quad ; \quad \vec{w} \perp \vec{v}$$

a uspořádaná trojice $(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\,)$ je pravotočivá. Pozor: v operaci vektorového součinu záleží na pořadí součinitelů, vektorový součin není komutativní:

$$\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u} \quad \to \quad \vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u}) \ ,$$

záměnou pořadí součinitelů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ se nemění absolutní hodnota (modul) vektoru $\vec{w}$, ale jeho orientace (smysl). Pro jednotkové bázové vektory $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$ souřadné soustavy proto platí:



$$\begin{array}{lll}
\vec{\imath} \times \vec{\imath} = 0 \quad , & \vec{\jmath} \times \vec{\imath} = -\vec{k} \quad , & \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \quad , \\
\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \quad , & \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = 0 \quad , & \vec{k} \times \vec{\jmath} = -\vec{\imath} \quad , \\
\vec{\imath} \times \vec{k} = -\vec{\jmath} \quad , & \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath} \quad , & \vec{k} \times \vec{k} = 0 \quad .
\end{array}$$

Jestliže vyjádříme vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ pomocí bázových vektorů, dostáváme po úpravě:

$$\vec{u} = (u_x; u_y; u_z) = u_x\,\vec{\imath} + u_y\,\vec{\jmath} + u_z\,\vec{k} \quad ; \quad \vec{v} = (v_x; v_y; v_z) = v_x\,\vec{\imath} + v_y\,\vec{\jmath} + v_z\,\vec{k} \ ,$$

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= (u_x\,\vec{\imath} + u_y\,\vec{\jmath} + u_z\,\vec{k}) \times (v_x\,\vec{\imath} + v_y\,\vec{\jmath} + v_z\,\vec{k}) = \\
&= u_x v_x \underbrace{(\vec{\imath} \times \vec{\imath})}_{0} + u_x v_y \underbrace{(\vec{\imath} \times \vec{\jmath})}_{\vec{k}} + u_x v_z \underbrace{(\vec{\imath} \times \vec{k})}_{-\vec{\jmath}} + \\
&\quad + u_y v_x \underbrace{(\vec{\jmath} \times \vec{\imath})}_{-\vec{k}} + u_y v_y \underbrace{(\vec{\jmath} \times \vec{\jmath})}_{0} + u_y v_z \underbrace{(\vec{\jmath} \times \vec{k})}_{\vec{\imath}} + \\
&\quad + u_z v_x \underbrace{(\vec{k} \times \vec{\imath})}_{\vec{\jmath}} + u_z v_y \underbrace{(\vec{k} \times \vec{\jmath})}_{-\vec{\imath}} + u_z v_z \underbrace{(\vec{k} \times \vec{k})}_{0} = \\
&= (u_y v_z - u_z v_y)\,\vec{\imath} + (u_z v_x - u_x v_z)\,\vec{\jmath} + (u_x v_y - u_y v_x)\,\vec{k} \ .
\end{aligned}$$

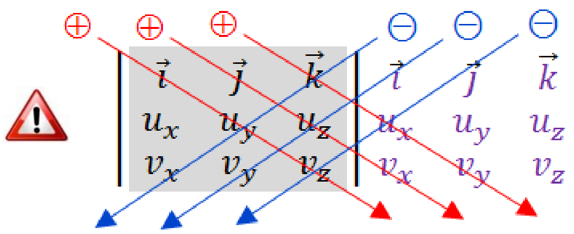
To je již zmíněný vzorec pro výpočet vektorového součinu, který najdeme ve všech matematických příručkách a středoškolských učebnicích (který jste měl pravděpodobně i na taháku u maturity). Velmi nedoporučuji si ho pamatovat zpaměti. Přiznám se, že ani já si ho nepamatuji, a když jsem se ho snažil kdysi zapamatovat, po pár dnech jsem si stejně nebyl jistý.

Existuje několik mnemotechnických pomůcek, mně se nejvíce osvědčila pro svou jednoduchost a užitečnost tato.

Nejprve sestavíme do řádkové struktury po sobě trojice bázových vektorů $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ *a složky vektorů* $\vec{u} = (u_x; u_y; u_z)$ *a* $\vec{v} = (v_x; v_y; v_z)$ *, viz obrázek.*

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Vzniklou strukturu zkopírujeme a celou ji připíšeme vpravo. Vynásobíme nejprve prvky na červeně vyznačených diagonálách a vzniklé trojice sečteme. Poté odečteme součiny prvků na modře vyznačených diagonálách:



$$u_y v_z \vec{\imath} + u_z v_x \vec{\jmath} + u_x v_y \vec{k} -$$

$$-u_y v_x \vec{k} - u_z v_y \vec{\imath} - u_x v_z \vec{\jmath} =$$

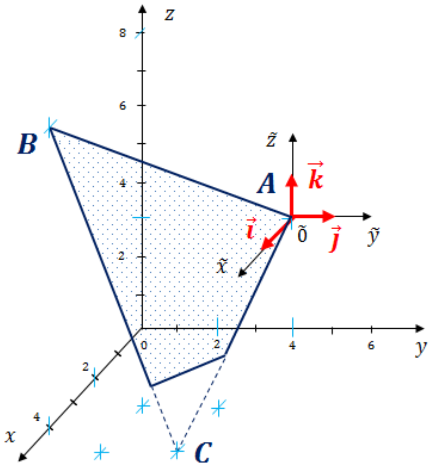
$$= (u_y v_z - u_z v_y)\,\vec{\imath} + (u_z v_x - u_x v_z)\,\vec{\jmath} + (u_x v_y - u_y v_x)\,\vec{k} = \vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \ .$$

Vyjádřili jsme tak poměrně jednoduchým způsobem opět jednotlivé složky vektoru $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ *. Doporučuji si místo složitého a nepřehledného vzorce pamatovat spíš tento postup výpočtu.*

Při studiu lineární algebry v prvních semestrech na vysoké škole brzy zjistíte, že uvedený způsob výpočtu je tzv. Sarrusovo pravidlo často používané pro výpočet determinantu matice.

Motivační příklad 1:

Určeme obsah S trojúhelníku A, B, C určeného v kartézském 3D souřadném systému těmito vrcholy:



$$A[0\,;4\,;3] \quad , \quad B[4\,;0\,;8] \quad , \quad C[2\,;2\,;-2]\ .$$

Řešit tuto úlohu lze různými způsoby, ukažme si však řešení s využitím vlastnosti vektorového součinu.

Zvolme počátek pomocného souřadného systému $(\tilde{O};\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ např. ve vrcholu A (alternativně je možné ho umístit i do jiného vrcholu – zkus). Souřadné osy původního i pomocného systému jsou vzájemně rovnoběžné. V takto zvoleném systému lze snadno určit obsah zadaného trojúhelníku jako poloviční hodnotu absolutní hodnoty vektorového součinu vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$.

Nejprve vyjádříme souřadnice vrcholů trojúhelníku v novém souřadném systému:

$$(O;x,y,z):\quad A[0\,;4\,;3] \quad , \quad B[4\,;0\,;8] \quad , \quad C[2\,;2\,;-2]\ ,$$

$$(\tilde{O};\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}):\quad A[0\,;0\,;0] \quad , \quad B[4\,;-4\,;5] \quad , \quad C[2\,;-2\,;-5]\ .$$

Vektorový součin vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$:

!

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & -4 & 5 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 20\vec{\imath} + 10\vec{\jmath} - 8\vec{k} + 8\vec{k} + 10\vec{\imath} + 20\vec{\jmath} = 30\vec{\imath} + 30\vec{\jmath} + 0\vec{k}.$$

Pozn.: Všimněme si, že nulová hodnota třetí složky vektoru odhaluje poněkud překvapivé zjištění, že rovina zadaného trojúhelníku je kolmá k souřadné rovině xy a rovnoběžná s osou z .

Absolutní hodnota vektorového součinu se rovná ploše rovnoběžníku sevřeného vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{30^2+30^2+0^2} = 30\sqrt{2}\ ,$$

plocha zadaného trojúhelníku je jeho polovinou:

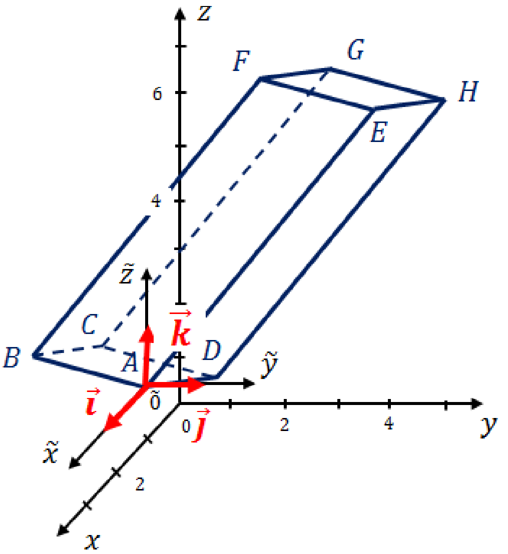
$$S = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{30\sqrt{2}}{2} = \frac{30}{\sqrt{2}} \approx 21{,}21\ .$$

Pozn.: Pokuste se vyřešit úlohu jiným způsobem a srovnejte pracnost a eleganci obou přístupů. Zvládnutím sofistikovanějších nástrojů se obvykle zjednodušuje logika řešení a klesá jeho pracnost.

■ *Konec příkladu 1*

Motivační příklad 2:

Určeme objem V *rovnoběžnostěnu* $ABCDEFH$ *určeného v kartézském 3D souřadném systému body:* $A[1;0;1]$; $B[3;-1;4]$; $D[2;2;2]$; $E[-1;3;5]$, *viz obrázek.*



Také v tomto případě lze úlohu řešit různými způsoby, ukažme si ale, jak ji lze snadno vyřešit pomocí nástrojů skalárního a vektorového součinu.

Zvolme počátek pomocného referenčního souřadného systému $(\tilde{O};\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ *např. ve vrcholu* A *. Souřadné osy původního i pomocného systému jsou vzájemně rovnoběžné.*

Nejprve přepočteme souřadnice zadaných bodů na souřadnice nového systému:

$$(O;x,y,z): \quad A[1;0;1] \;,\; B[3;-1;4] \;,\; D[2;2;2] \;,\; E[-1;3;5] \;,$$
$$(\tilde{O};\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}): \quad A[0;0;0] \;,\; B[2;-1;3] \;,\; D[1;2;1] \;,\; E[-2;3;4] \;.$$

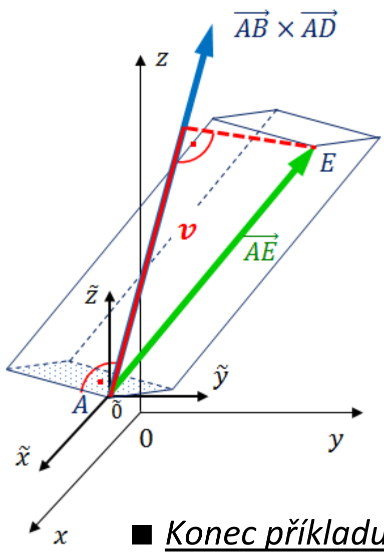
Plochu podstavy $ABCD$ *vyjádříme pomocí vektorového součinu vektorů* $\overrightarrow{AB}$ *a* $\overrightarrow{AD}$ *:*

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+4\vec{k}+\vec{k}-6\vec{\imath}-2\vec{\jmath}=-7\vec{\imath}+\vec{\jmath}+5\vec{k}\;,$$

její plocha je:

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{(-7)^2+1^2+5^2}=\sqrt{75}\approx 8{,}66\;.$$

Objem hranolu dostaneme jako součin plochy podstavy a jeho výšky v *(kolmé k podstavě). Vektorový součin* $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ *je kolmým vektorem k rovině podstavy a jeho absolutní hodnota (modul) se rovná její ploše. Výška hranolu* v *je určena kolmou projekcí jeho hrany* AE *do vektoru* $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$. *Objem hranolu tedy snadno určíme skalárním součinem vektorů* $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ *a* $\overrightarrow{AE}$ *:*



$$\overrightarrow{AE}=-2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+4\vec{k}\;,$$

$$V=\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AE}=\begin{bmatrix}-7 & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\3\\4\end{bmatrix}=$$
$$=(-7)(-2)+1\cdot 3+5\cdot 4=14+3+20=37\;.$$

■ *Konec příkladu 2*

Pozn.: Součin $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ je obvykle označován jako smíšený součin vektorů, pro který platí:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \quad ; \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \neq \vec{u} \cdot \vec{w} \times \vec{v} \cdot \vec{w} \ .$$

Pokud je smíšený součin roven nule, jsou vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ lineárně závislé (leží v jedné rovině). Pokud nejsou lineárně závislé, potom $|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$ vyjadřuje objem rovnoběžnostěnu, který tato trojice vektorů vymezuje.

Konkrétní hodnota smíšeného součinu se dá jednoduše vyjádřit podle zmíněného Sarrusova pravidla:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} =$$

$$= u_x v_y w_z + u_y v_z w_x + u_z v_x w_y - u_z v_y w_x - u_x v_z w_y - u_y v_x w_z \ .$$

V případě předcházejícího příkladu:

$$\underline{V} = \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{AE} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 2 + 9 + 12 - 6 + 4 = \underline{37} \ .$$

(srovnej!)

Brzy při studiu na vysoké škole jistě zjistíte, že Sarrusovo pravidlo se běžně používá pro výpočet determinantu čtvercové matice se třemi řádky a třemi sloupci.

Význam tohoto determinantu a jeho geometrická interpretace přímo plyne z předcházející úvahy a uvedeného příkladu. Lze si ho představit jako objem rovnoběžnostěnu vymezeného třemi vektory, jejichž složky postupně tvoří řádky matice.
Geometrickou interpretaci determinantu si většinou studenti příliš neuvědomují.