## ➢ Odmocnina z reálného vs. komplexního čísla, analýza v reálném vs. komplexním oboru

FAQ

Karel:

Mám v tom trochu zmatek. Druhá odmocnina ze 4 je podle definice +2, nikoliv -2. To nám matikář na gymplu hodně zdůrazňoval a tak to taky beru. Ale pokud budu brát čtyřku jako komplexní číslo s nulovou imaginární částí, tak už to je jinak, výsledek je: +2 a také -2. To přece nemůže záležet na tom, jak to číslo chápu. Jak to tedy je?

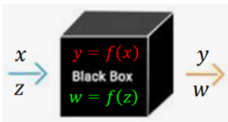
*JaJ:*

*Karle, dobrou zprávou je to, že jste si toho všiml, a že o tom přemýšlíte. Je to malinko zamotané a je dobré si hned zkraje uvědomit, že počítání a analýza v reálné a komplexní oblasti mají svá specifika a odlišnosti. Je potřeba si uvědomit pár jemností a detailů. Problém je tak trochu v nepřesné definici a také v tom, že se pojem odmocniny ne úplně přesně vykládá.*

---

*Než se pokusím odpovědět na váš dotaz, pojďme si nejprve zopakovat pár pojmů, které jistě znáte, a trochu si je připomenout a propojit. Pojďme si nejprve popovídat obecně o funkci a funkci inverzní, reálné i komplexní, a také o tom, co je odmocnina a jak ji máme chápat.*

*Funkci si můžeme jednoduše představit jako černou skříňku, do které na jedné straně vložíme nějaké číslo. Uvnitř skříňky se s ním něco podle určitých a přesných pravidel provede a nakonec se objeví na výstupu jiné číslo. Je v podstatě jedno jestli se jedná o reálná nebo komplexní čísla.*




*Pokud se jedná o reálná čísla a funkci reálné proměnné, pak vstupní proměnnou (argument funkce) obvykle značíme $x$ a výstupní (funkční hodnotu) jako $y$. Pokud se ale jedná o čísla komplexní a funkci komplexní proměnné, pak obvykle značíme vstupní číslo $z$ a výstupní $w$. Pojďme tuto zvyklost pro tentokrát přijmout (moc se ale na ni nefixujte, může vám to později v reálných aplikacích trochu vadit – jednotlivé proměnné se často označují úplně jinými písmeny, které odpovídají konkrétním fyzikálním veličinám).*

*Obvyklé formální označení funkcí:*

$$y = f(x) \qquad \text{resp.} \qquad w = f(z)\ .$$

*Většina pojmů, jako je definiční obor, obor hodnot, spojitost, atd. platí v reálné i komplexní oblasti úplně stejně.*

*Definiční obor $D_f$ jsou jednoduše všechna možná čísla, která můžeme do skříňky vložit a obor hodnot $H_f$ naopak všechna možná čísla, která se mohou na výstupu skříňky objevit.*

*Úplně všechno však v komplexním oboru svou analogii nemá. Pojmy jako funkce rostoucí nebo klesající v komplexním oboru moc smyslu nedávají. Pro komplexní čísla, na rozdíl od těch reálných, neexistuje přirozené uspořádání, které by nám umožnilo rozhodnout, které ze dvou čísel je větší a které je menší (např.: je $0 + i$ větší než $1 + 0i$ ? ).*

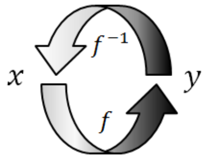
*Další velký problém nastane v okamžiku, kdy se danou komplexní funkci budeme snažit nakreslit.*

*V případě reálné funkce to je jednoduché. Vstup i výstup jsou jednorozměrná čísla, takže její znázornění je vyjádřeno grafem ve dvojrozměrné rovině. U komplexních funkcí je ale vstup i výstup dvourozměrný (reálná a imaginární část). Pro její grafické vyjádření bychom potřebovali čtyřrozměrný graf. Dvě dimenze na osu $z$ a dvě dimenze na osu $w$. To je pro mne již dost divoká představa.*

*Pojem spojitosti funkce problém nedělá. Stejně jako u reálných funkcí znamená, že malé změně vstupní proměnné odpovídá malá změna proměnné výstupní. To dokážeme snadno posoudit pomocí absolutní hodnoty rozdílu.*

*Také pojem kořen funkce má stejný význam jako v reálném oboru. Tedy taková hodnota vstupní proměnné $z$, které odpovídá nulová hodnota výstupní proměnné, zde ale: $w = 0 + 0i$ . V jednoduchých případech se dají kořeny určit algebraicky, v obtížnějších se hledají pomocí numerických metod.*

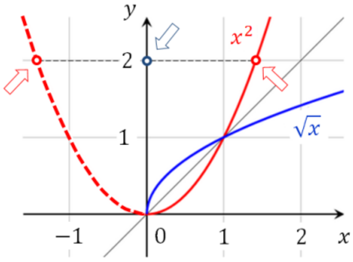
*Inverzní funkce. Pokud si funkci $y = f(x)$ představujeme jako černou skříňku, do které vložíme hodnotu $x$ a vypadne z ní hodnota $y$, potom inverzní funkce $x = f^{-1}(y)$ dělá pravý opak. Hodnotě $y$ přiřadí obráceně původní $x$.*

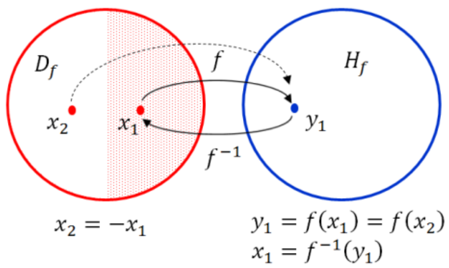



*Má to ale malý háček. Aby to bylo možné, musí funkce $y = f(x)$ přiřadit různým hodnotám $x_1 \neq x_2$ také různé hodnoty $y_1 = f(x_1) \neq y_2 = f(x_2)$. Takovou funkci označujeme jako funkci prostou. Je to logická podmínka pro existenci vzájemně oboustranného jednoznačného přiřazení prvků definičního oboru $D_f$ a oboru hodnot $H_f$. Úplně stejně to samozřejmě platí i pro funkci komplexní proměnné.*

*Jak to ale je s odmocninou a jejím protějškem mocninnou funkcí? Předpokládejme zatím pro jednoduchost druhou odmocninu a kvadratickou funkci $y = x^2 = f(x)$. Definiční obor této funkce je $D_f = R$ (všechna reálná čísla: $x \in (-\infty; +\infty)$ ), oborem funkčních hodnot $H_f = R_0^+$ (nezáporná reálná čísla: $y \in \langle 0; +\infty)$ ).*

*Tato funkce je sudá, ale pozor, není prostá. Dvěma různým hodnotám argumentu $x$ (pokud se budou lišit znaménkem) odpovídá jediná funkční hodnota $y$, viz obrázek.*




*Přísně vzato, inverzní funkce k této funkci na celém jejím přirozeném definičním oboru (kde má funkce smysl) neexistuje. Lze ji ale nalézt na části jejího oboru, na které je mocninná funkce monotónně rostoucí (a tedy prostá). V našem případě pro nezáporná $x$. Pro funkci $y = f(x) = x^2$ s definičním oborem $D_f = R_0^+$ inverzní funkce již v pohodě existuje:*

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad D_{f^{-1}} = H_f = R_0^+$$

*s tím, že $x \geq 0$ a také $y \geq 0$. Ale to je již definice (druhé) odmocniny, kterou jistě ze střední školy dobře znáte.*

*Viz např.:* [https://cs.wikipedia.org/wiki/Druh%C3%A1_odmocnina](https://cs.wikipedia.org/wiki/Druh%C3%A1_odmocnina) .

*Poznámka:*

*Zcela podobně jsou definovány jen na částech svých definičních oborů tzv. cyklometrické funkce $arcsin, arccos, \ldots$ (inverzní funkce goniometrických funkcí $sin, cos, \ldots$).*

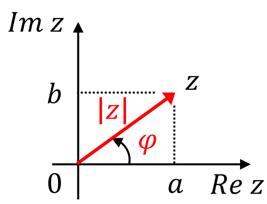
---

*Trochu zajímavější (ale i trochu zamotanější) to bude s komplexní mocninnou funkcí a její odmocninou*

toto není chyba

$$w = f(z) = z^2 \quad ; \quad z, w \in C \quad ; \quad D_f = H_f = C \ .$$

*Vstupní i výstupní proměnná jsou komplexní čísla, definiční obor i obor funkčních hodnot je celá Gaussova rovina. Představme si pro jednoduchost vyjádření obou komplexních čísel $z$ a $w$ v exponenciálním tvaru:*




$$z = a + bi = |z|\, e^{i\varphi} \quad ; \quad |z| \in (0; \infty) \quad ; \quad \varphi \in \langle 0; 2\pi) \ .$$

*Výstupní funkční hodnota pak bude:*

$$w = z^2 = |z|^2\, e^{i2\varphi} \ .$$

*Všimněme si, že horní polorovina Gaussovy roviny pro $b \geq 0$ se promítá do celé (!) roviny komplexních čísel:*

$$w = |z|^2\, e^{i2\varphi} \quad ; \quad |z| \in \langle 0; \infty) \quad ; \quad \varphi \in \langle 0; \pi) \ ,$$

*ale stejně tak i polorovina spodní (!) pro $b < 0$ :*

$$w = |z|^2\, e^{i2\varphi} \quad ; \quad |z| \in \langle 0; \infty) \quad ; \quad \varphi \in \langle \pi; 2\pi) \ .$$

*Pokud bychom si přeci jen troufli tuto závislost geometricky nějak interpretovat ve čtyřrozměrném prostoru (dvě dimenze pro vstupní proměnnou $z$ a dvě dimenze pro výstupní proměnnou $w$), dostali bychom jakousi bizarní dvoulistou spojitou hyperplochu (tzv. Riemannova plocha).*

*Ať už na to naše fantazie stačí nebo ne, v každém případě se ale jedná o zobrazení, které dvěma různým nenulovým argumentům $z$ přiřazuje stejnou hodnotu $w$ (jednu z jednoho listu, druhou z druhého listu plochy).*

*Zobrazení není na celém svém definičním oboru prosté a inverzní funkce tedy (přísně vzato) neexistuje. Můžeme však, zcela analogicky (jako v případě reálné funkce) definovat inverzní funkci jen na části definičního oboru, na kterém je zobrazení jednoznačné. V našem případě pouze na jednom listu naší absurdní plochy. Pokud si vybereme první z nich, získáme inverzní funkci, která nám určuje tzv. hlavní hodnotu odmocniny.*

*Dobrá tedy, vraťme se ale k vašemu dotazu. Zdá se, že jsem jen šikovně utekl od toho, na co se ptáte. Ano, ale jen zdánlivě, chtěl jsem upozornit na některé detaily a drobné rozdíly mezi analýzou v reálné a komplexní oblasti. Váš nenápadný dotaz k tomu ale směřuje.*

*Jako obvykle, i zde platí, že ďábel je skrytý v detailu. V našem případě v poněkud nepřesné a ne úplně přesně interpretované definici. Pojďme si v tom udělat trochu pořádek.*

*Obecně můžeme pracovat s pojmem odmocnina všude tam, kde je definovaná mocnina nějakého matematického objektu. A také se tak děje, mohou to být reálná nebo komplexní čísla, ale také např. čtvercové matice nebo i jiné matematické objekty (!).*

*Viz např.:* https://en.wikipedia.org/wiki/Square_root .

*Druhou odmocninou z objektu $a$ obecně chápeme podle této definice objekt $b$, pro který platí $b \cdot b = b^2 = a$ . Ať už to je číslo nebo jakýkoliv jiný objekt.*

*Odmocnina z nenulového čísla (reálného nebo komplexního) proto není přísně vzato jediné číslo, ale množina čísel.*

*Pokud se jedná o druhou odmocninu, tedy čísla dvě. Oba kořeny rovnice $x^2 - a = 0$ jsou podle výše uvedené definice odmocninami z čísla $a$ (podobně to platí i pro vyšší odmocniny – třetí odmocnina má tři kořeny, čtvrtá čtyři atd.).*

*Jeden z těchto kořenů (určený zpravidla z prvního listu naší Riemannovy plochy) je označován jako **hlavní hodnota** odmocniny. Je to takový kořen, který má největší reálnou část. Pokud existují dva takovéto kořeny, je to ten, který má kladnou imaginární část.*

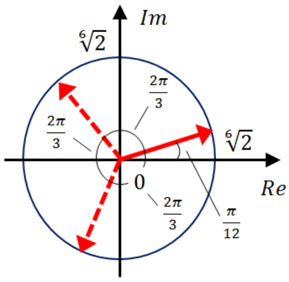
*Příklad:*

*Určeme třetí odmocninu z komplexního čísla:*

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k2\pi\right)} \quad ; \quad k \in Z$$

$$z^{\frac{1}{3}} = \left[\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k2\pi\right)}\right]^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}\right)} =$$

*hlavní hodnota*




$$= \begin{cases} \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\sin\frac{\pi}{12}\right) & \approx \boxed{1{,}084 + 0{,}291\, i} \\ \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\,\sin\frac{9\pi}{12}\right) & \approx -0{,}794 + 0{,}794\, i \\ \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{12} + i\,\sin\frac{15\pi}{12}\right) & \approx -0{,}291 - 1{,}084\, i \end{cases}$$

$$\sqrt[6]{2} \approx 1{,}122$$

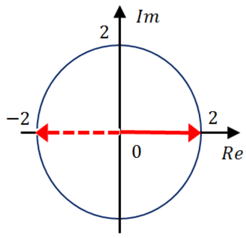
## Příklad: (jedná se o váš diskutovaný příklad)

Určeme druhou odmocninu z reálného čísla:

$$z = 4 = 4 + 0\,i = 4\,e^{i\,(0+k2\pi)} \quad ; \quad k \in Z$$

hlavní hodnota

$$\sqrt{z} = \left[4\,e^{i\,(0+k2\pi)}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4}\,e^{i\,k\pi} = \begin{cases} \boxed{2\,(\cos 0 + i \sin 0) = +2} \\ 2\,(\cos \pi + i \sin \pi) = -2 \end{cases}$$




To je také odpověď na vaší otázku:

- odmocnina ze $4$: $\sqrt{4} = \{+2\,;-2\}$ ,
- její hlavní hodnota je však pouze $+2$ .

Poznámka:

*Váš dotaz není ojedinělý. Nejste sám, kdo o tom přemýšlí. Tato nejasnost je důsledkem poněkud nepřesné interpretace definice toho, co je a co není odmocnina.*

*Ve snaze se vyhnout nejasnostem a problémům s nejednoznačností operace se prakticky na všech našich základních i středních školách zavádí definice druhé odmocniny tak, jak ji jistě dobře znáte:*

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad x \geq 0\,,\; y \geq 0\,,$$

*tedy pouze* ***ve smyslu její hlavní hodnoty****.*

*Všimněte si, že jedno jediné vynechané slovo v přesné definici může způsobit nejasnosti. Doporučuji (abyste se vyhnuli možným problémům) používat i nadále definici odmocniny, kterou jste se naučili používat na střední škole s tím, že si uvědomíme, že se jedná o odmocninu ve smyslu hlavní hodnoty. Tato podrobnost se většinou nezdůrazňuje.*

*Většina chytrých kalkulaček a výpočetních systémů ale s tímto faktem pracuje a jako výsledek nám vracejí buď celou množinu příslušných (obecně komplexních) kořenů, nebo jen hlavní hodnotu odmocniny. Název funkce druhé odmocniny v různých programovacích jazycích je sqrt, odvozený od anglického ekvivalentu Square Root Function (povšimněte si, že již v tomto názvu je obsaženo, že se jedná o kořeny příslušné kvadratické rovnice).*

***Pozor*** *ale na možnost formální chyby při řešení rovnice zadané následujícím způsobem:*

$$x - 4 = \sqrt{x+2}\,.$$

*Nesmíme zapomenout respektovat obor hodnot, pro které je druhá odmocnina definovaná, tedy* $x + 2 \geq 0$ *a také* $x - 4 \geq 0$ .

$$(x-4)^2 = x + 2 \ ,$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0 \ ,$$

*Ale!*

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81+56}}{2} = \begin{cases} 7 \\ 2 \end{cases} ,$$

$$\underline{x = 7} \quad ; \quad x \neq 2 \ .$$

*Někdy se naznačený postup označuje jako neekvivalentní úprava rovnice s nutností provést zkoušku, zda výsledné řešení vyhovuje zadané rovnici.*