## ➢ Kuželosečka v obecné poloze

Petr:

Mám za úkol nakreslit kuželosečku popsanou rovnicí:

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 18x - 12y + 15 = 0 \ .$$

Na průmce jsme měli dobrou matikářku, spočítali jsme spoustu příkladů a měl jsem pocit, že tomu docela rozumím, ale s tímhle si opravdu neumím rady. Poraďte mi prosím.

*JaJ:*

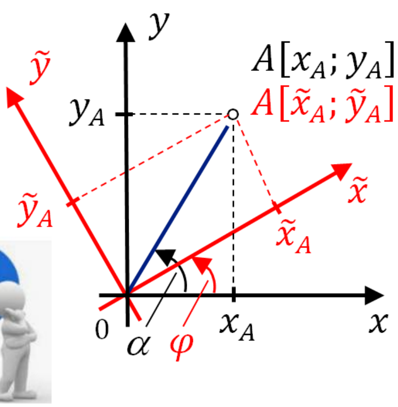
*Petře, vůbec se vám nedivím. Příklad, který uvádíte, pravděpodobně není ze sbírky pro žáky střední školy. V hodinách matematiky na středních školách se žáci učí popisovat kuželosečky v rovině a v kartézských souřadnicích, zkoumají jejich vlastnosti a průběhy. Jedná se o křivky, které mohou vzniknout rovinným řezem kuželové plochy, tedy kružnice, elipsa, parabola a hyperbola. Nebo také zvláštní případy – přímka, dvojice přímek nebo dokonce jediný bod.*

*Pro zjednodušení tohoto popisu se obvykle předpokládá, že osy těchto křivek jsou rovnoběžné se souřadnými osami kartézské soustavy. Pokud se zpětně podíváte na všechny příklady, které jste na průmyslovce řešili, nikde se v popisu kuželosečky pravděpodobně neobjevil člen se součinem $xy$. To je ale právě problém, na který jste narazil. Je to příznak toho, že se jedná o kuželosečku, jejíž osy nejsou rovnoběžné s osami kartézské soustavy.*

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 18x - 12y + 15 = 0 \ .$$

*K tomu, abychom mohli pochopit, jak si s tímto problémem můžeme poradit, musíme si uvědomit několik souvislostí.*

*Transformace souřadnic otočením pravoúhlé soustavy o úhel $\varphi$.*




*Souřadnice každého bodu eukleidovské roviny můžeme popsat vzhledem i k souřadnicovým systémům, které mají společný počátek a jsou vůči sobě pootočeny o úhel $\varphi$, viz obrázek. Kladný smysl měření úhlu je definován proti směru hodinových ručiček. Hledejme transformační rovnice převádějící souřadnice $x_A$ a $y_A$ bodu $A$ jednoho systému na souřadnice $\tilde{x}_A$ a $\tilde{y}_A$ systému druhého.*

$$|A| = \sqrt{x_A{}^2 + y_A{}^2} = \sqrt{\tilde{x}_A{}^2 + \tilde{y}_A{}^2}\,,$$

$$\tilde{x}_A = |A|\cos(\alpha - \varphi) = |A|(\cos\alpha \cdot \cos\varphi + \sin\alpha \cdot \sin\varphi) =$$
$$= \underbrace{|A|\cos\alpha}_{x_A} \cdot \cos\varphi + \underbrace{|A|\sin\alpha}_{y_A} \cdot \sin\varphi \ ,$$

$$\tilde{y}_A = |A|\sin(\alpha - \varphi) = |A|(\sin\alpha \cdot \cos\varphi - \cos\alpha \cdot \sin\varphi) =$$
$$= \underbrace{|A|\sin\alpha}_{y_A} \cdot \cos\varphi - \underbrace{|A|\cos\alpha}_{x_A} \cdot \sin\varphi \ .$$

*Transformační vztahy jsou tedy:*

$$\tilde{x}_A = x_A\cos\varphi + y_A\sin\varphi \ , \qquad x_A = \tilde{x}_A\cos\varphi - \tilde{y}_A\sin\varphi \ ,$$
$$\tilde{y}_A = -x_A\sin\varphi + y_A\cos\varphi \ , \qquad y_A = \tilde{x}_A\sin\varphi + \tilde{y}_A\cos\varphi \ .$$

*Pro obecný bod* $[x; y] \rightarrow [\tilde{x}; \tilde{y}]$ *:*

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi \ , \\ y &= \tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi \ . \end{aligned}}$$

*Logika dalšího postupu je poměrně jednoduchá. Připravené transformační vztahy dosadíme do zadané rovnice kuželosečky. Dostaneme tak její vyjádření v nové kartézské soustavě, natočené proti původní soustavě o obecný úhel* $\varphi$*. Rovnici dostaneme v novém tvaru jako funkci proměnných* $\tilde{x}$ *a* $\tilde{y}$*.*

*Dalším krokem je určení takového úhlu* $\varphi$*, aby osy nového (natočeného) souřadného systému byly rovnoběžné s osami hledané kuželosečky. To poznáme podle toho, že ve vyjádření zmizí člen se součinem* $\tilde{x}\tilde{y}$*. V tomto vyjádření již snadno poznáme charakter a hlavní parametry zkoumané kuželosečky.*

*Hlavní myšlenka řešení je sice prostá, její realizace je však poněkud pracnější.*

$$x = \tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi \ ,$$
$$x^2 = (\tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi)^2 = \tilde{x}^2\cos^2\varphi + \tilde{y}^2\sin^2\varphi - 2\,\tilde{x}\tilde{y}\cos\varphi\sin\varphi \ ,$$
$$y = \tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi \ ,$$
$$y^2 = (\tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi)^2 = \tilde{x}^2\sin^2\varphi + \tilde{y}^2\cos^2\varphi + 2\tilde{x}\,\tilde{y}\sin\varphi\cos\varphi \ ,$$
$$xy = (\tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi)(\tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi) = \cdots =$$
$$= \tilde{x}\tilde{y}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + (\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2)\sin\varphi\cos\varphi \ .$$

*Po dosazení a úpravě dostaneme:*

$$
\begin{aligned}
&5x^2 + 4xy + 2y^2 - 18x - 12y + 15 = \cdots = \\
&\quad = \tilde{x}^2(2\sin^2\varphi + 5\cos^2\varphi + 4\sin\varphi\cos\varphi) + \\
&\qquad +\tilde{x}\tilde{y}(4\cos^2\varphi - 4\sin^2\varphi - 6\sin\varphi\cos\varphi) + \\
&\qquad\quad +\tilde{y}^2(5\sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi - 4\sin\varphi\cos\varphi) + \\
&\qquad\qquad +\tilde{x}(-12\sin\varphi - 18\cos\varphi) + \tilde{y}(18\sin\varphi - 12\cos\varphi) + 15 \ .
\end{aligned}
$$

*V dalším kroku hledáme takové $\varphi$, pro které bude kvadratický člen se smíšeným součinem $\tilde{x}\tilde{y}$ nulový.*

$$4\cos^2\varphi - 4\sin^2\varphi - 6\sin\varphi\cos\varphi = 0 \ \Big| \ \frac{1}{2\cos^2\varphi} \ ; \ \varphi \neq \pm\frac{\pi}{2} \ ,$$

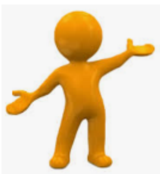
$$2 - 2\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} - 3\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = 0 \ ,$$

$$2 - 2\,tg^2\varphi - 3\,tg\varphi = 0 \ .$$

*Poznámka: všechny numerické hodnoty v následujícím textu jsou počítány s přesností na 15 desetinných míst a zaokrouhleny.*

*Po provedené substituci $tg\varphi = z$:*

$$2z^2 + 3z - 2 = 0 \ ; \ z_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{2} = tg\varphi_1 \\ -2 = tg\varphi_2 \end{array} \right. ,$$



$$\varphi_1 = arctg\,\frac{1}{2} \doteq 0{,}464\,rad \quad (26°33'54'') \ ,$$

$$\varphi_2 = arctg(-2) \doteq -1{,}107\,rad \quad (-63°26'6'') \ .$$

*Nejednoznačnost řešení bylo nutné očekávat jako důsledek možnosti natočení osy kuželosečky k jedné nebo druhé ose souřadného systému* $(26°33'54'' + 63°26'6'' = 90°)$. *Zvolme nejprve:*

$$\varphi = \varphi_1 = 0{,}464\,rad \quad \to \quad \sin\varphi \doteq 0{,}447 \ ; \quad \cos\varphi \doteq 0{,}894 \ .$$

*Po dosazení konkrétních hodnot $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$ do koeficientů transformované rovnice dostáváme:*

$$2\sin^2\varphi + 5\cos^2\varphi + 4\sin\varphi\cos\varphi = 2\cdot 0{,}447^2 + 5\cdot 0{,}894^2 + 4\cdot 0{,}447\cdot 0{,}894 = \underline{6{,}000} \ ,$$

$$5\sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi - 4\sin\varphi\cos\varphi = 5\cdot 0{,}447^2 + 2\cdot 0{,}894^2 - 4\cdot 0{,}447\cdot 0{,}894 = \underline{1{,}000} \ ,$$

$$-12\sin\varphi - 18\cos\varphi = -12\cdot 0{,}447 - 18\cdot 0{,}894 = \underline{-21{,}466} \ ,$$

$$18\sin\varphi - 12\cos\varphi = 18\cdot 0{,}447 - 12\cdot 0{,}894 = \underline{-2{,}683}$$

*a transformovaná rovnice kuželosečky nabývá tvaru:*

$$\underline{6\,\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 21{,}466\,\tilde{x} - 2{,}683\,\tilde{y} + 15 = 0} \ .$$

*Toto je již tvar rovnice kuželosečky, se kterým jste se na střední škole setkali, se kterým jste standardně pracovali. Postupujeme dál již známým způsobem. Sdružením jednotlivých proměnných a úpravou na čtverec postupně dostáváme:*

$$6\,(\tilde{x}^2 - 3{,}578\,\tilde{x}) + (\tilde{y}^2 - 2{,}683\,\tilde{y}) + 15 = 0\ ,$$

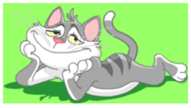
$$6\,[(\tilde{x} - 1{,}789)^2 - 3{,}2] + [(\tilde{y} - 1{,}342)^2 - 1{,}8] + 15 = 0\ ,$$

$$6\,(\tilde{x} - 1{,}789)^2 - 19{,}2 + (\tilde{y} - 1{,}342)^2 - 1{,}8 + 15 = 0\ ,$$

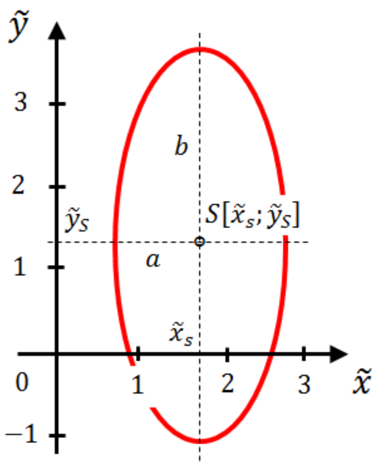
$$6\,(\tilde{x} - 1{,}789)^2 + (\tilde{y} - 1{,}342)^2 - 6 = 0\ ,$$

$$(\tilde{x} - 1{,}789)^2 + 0{,}167\,(\tilde{y} - 1{,}342)^2 = 1\ ,$$

$$\frac{(\tilde{x}-1{,}789)^2}{1} + \frac{(\tilde{y}-1{,}342)^2}{6} = 1\ .$$



*Získali jsme základní tvar rovnice kuželosečky popsané pomocí $\tilde{x}$ a $\tilde{y}$ v pootočeném souřadném systému. Snadno určíme tvar a její hlavní parametry. Jedná se o elipsu se středem $S\,[1{,}789\,;1{,}342]$ (v souřadnicích $\tilde{x},\tilde{y}$) a s délkami hlavní a vedlejší poloosy* $a = 1$ a $b = \sqrt{6} \doteq 2{,}45$ *, viz obrázek.*

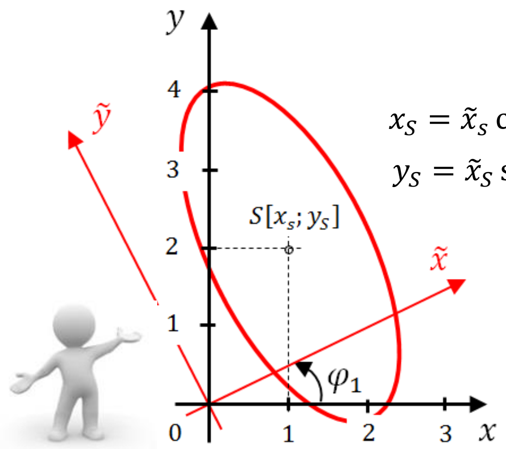



*Protože se rotací zachovává délka úseček i tvar obrazců (shodné zobrazení), bude mít elipsa i v původním (nepootočeném) souřadném systému stejné délky poloos i tvar. Střed elipsy však bude mít jiné souřadnice:*

$$S[\tilde{x}_S;\tilde{y}_S] \ \rightarrow\ S[x_S;y_S]\ ,\ \tilde{x}_S = 1{,}789\ ,\ \tilde{y}_S = 1{,}342\ ,\ \varphi = 0{,}464\,rad\ ,$$

$$\sin\varphi = 0{,}447\ ,\ \cos\varphi = 0{,}894\ ,$$

$$\boxed{S[\tilde{x}_S;\tilde{y}_S] = S[1{,}789;1{,}342]}\ ,$$




$$x_S = \tilde{x}_s\cos\varphi - \tilde{y}_S\sin\varphi = 1{,}789\cdot 0{,}894 - 1{,}342\cdot 0{,}447 = 1\ ,$$

$$y_S = \tilde{x}_S\sin\varphi + \tilde{y}_S\cos\varphi = 1{,}789\cdot 0{,}447 + 1{,}342\cdot 0{,}894 = 2\ ,$$

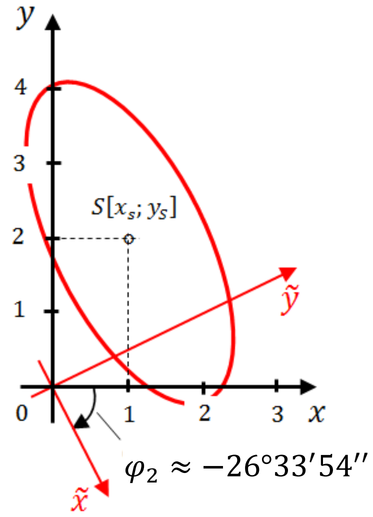
$$\boxed{S[x_S;y_S] = S[1;2]}\ .$$

*(Kladný smysl orientace úhlu je v matematice chápán proti směru hodinových ručiček.)*

$$\varphi_1 = \varphi \approx 0{,}464\,rad \approx 26°33'54''$$

*Připomínám zdánlivou nejednoznačnost řešení při výpočtu natočení referenční souřadné soustavy. Dostali jsme možnost natočení buď v kladném smyslu, proti směru hodinových ručiček, o úhel* $26°33'54''$ *nebo v opačném smyslu o* $63°26'6''$ *ve směru hodinových ručiček (součet obou úhlů dává* $90°$*).*

*Pro naše řešení jsme vybrali první variantu* $\varphi_1$ *, ale stejně dobře jsme mohli vybrat také úhel* $\varphi_2$ *. V tomto smyslu je řešení skutečně dvojznačné. Ale jen ve smyslu zvoleného postupu řešení, nikoliv v konečném výsledku (zkus). V druhém případě dojde jen k záměně souřadných os pomocné soustavy* $\tilde{x}, \tilde{y}$ *(a samozřejmě i k formálně jinému vyjádření kuželosečky v těchto souřadnicích). Ale finální množina bodů (křivka v původních souřadnicích* $x, y$*), kterou popisuje zadaná rovnice je stejná. V tomto smyslu je řešení samozřejmě jednoznačné.*




*Poznámka:*

*Každá reálná kuželosečka (kružnice, elipsa, hyperbola, parabola) je formálně popsaná rovnicí druhého stupně. Obráceně to ale neplatí.*

*Obecná rovnice druhého stupně:*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

*popisuje reálnou kuželosečku, jen jestliže je alespoň jeden z koeficientů* $A, B, C$ *různý od nuly a determinant matice (tzv. diskriminant kuželosečky) je také nenulový:*

$$A, B, C \neq 0 \quad ; \quad \Delta = det \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{bmatrix} \neq 0 \ ,$$

$$\Delta = ACF + \frac{B}{2}\frac{E}{2}\frac{D}{2} + \frac{D}{2}\frac{B}{2}\frac{E}{2} - \frac{D}{2}C\frac{D}{2} - \frac{E}{2}\frac{E}{2}A - F\frac{B}{2}\frac{B}{2} = ACF + \frac{BDE - CD^2 - AE^2 - B^2F}{4} \neq 0 \ .$$

*Proč tomu tak je, vyplývá z podrobnější analýzy pomocí prostředků lineární algebry, se kterou se seznámíte až později na vysoké škole.*

*V našem konkrétním případě:*

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 18x - 12y + 15 = 0 \ ,$$

$$A = 5 \ ; \ B = 4 \ ; \ C = 2 \ ; \ D = -18 \ ; \ E = -12 \ ; \ F = 15 \ ,$$

$$A \neq 0 \ ; \ B \neq 0 \ ; \ C \neq 0 \ ,$$

$$\Delta = 5 \cdot 2 \cdot 15 + \frac{4 \cdot (-18) \cdot (-12) - 2 \cdot (-18)^2 - 5 \cdot (-12)^2 - 4^2 \cdot 15}{4} = -36 \neq 0 \ .$$

*Jedná se tedy o reálnou kuželosečku, jak jsme ukázali, o natočenou elipsu se středem mimo počátek.*

*Prostředky a aparát lineární algebry, které jsou náplní studia v prvních semestrech na vysoké škole, vám řešení podobných příkladů velmi usnadní a zjednoduší. Uvedené je pak jen jednoduchým logickým vyústěním pochopené problematiky.*

*Potvrzuje se tak obecné pravidlo, že dobře zvládnuté dokonalejší nástroje vám v matematice (a nejen zde) usnadňují práci, podstatně zjednodušují myšlení a umožňují vám snadněji proniknout hlouběji do podstaty problémů a souvislostí. To je ostatně i důvod proč vůbec vznikly školy a proč jste se snad rozhodli studovat.*