Rovnice obsahující nekonečnou řadu

Standa:

Dostal jsem za úkol vyřešit rovnici:

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2k}} = \frac{x}{x+1} - \frac{x-2}{x-1} \qquad \text{pro} \quad x \in R \setminus \{-1; 0; 1\} \ .$$

Přiznám se, že vůbec nevím jak na to. Prosím o pomoc. Nebo alespoň radu co s tím mám dělat.

JaJ:

Stando, vypadá to divoce, ale asi to nebude tak zlé. Nejprve bych si upravil výraz na pravé straně rovnice:

$$\frac{x}{x+1} - \frac{x-2}{x-1} = \frac{x^2 - x - x^2 + 2x - x + 2}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{x^2-1} \ .$$

Na levé straně rovnice je dvojnásobek složitě vypadající sumy. Jedná se ale o součet nekonečné řady, v tomto případě geometrické řady s kvocientem

$$q = \frac{1}{x^2} \qquad \text{a s prvním členem řady} \quad a_1 = \frac{1}{x^2} = q \ .$$

Pro součet geometrické řady platí:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots = \frac{a_1}{1-q} \ ,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2k}} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2-1} \ .$$

Ale POZOR!, pouze pro:

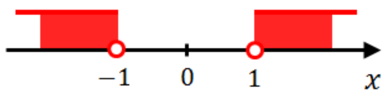
$$|q| = \left|\frac{1}{x^2}\right| < 1 \quad \rightarrow \quad x^2 > 1 \quad \rightarrow \quad x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty) \ .$$

Po úpravách levé i pravé strany rovnice:

$$\left.\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2k}} &= 2 \cdot \frac{1}{x^2-1} \\ \frac{x}{x+1} - \frac{x-2}{x-1} &= \frac{2}{x^2-1} \end{aligned}\right\} \quad \frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1} \ .$$

Rovnost je splněna pro všechna x z tohoto oboru. Výsledek zadané rovnice tedy není jednoznačný, ale:

$$x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty) \ .$$



Poznámka:

Zadaný příklad je typickým, tak trochu umělým, školním příkladem často studentům zadávaný k procvičení systematického přístupu k řešení rovnic. Propojuje vhodně různé prvky matematické analýzy. Svádí ale k falešnému optimistickému názoru, že umíme tímto způsobem řešit všechny rovnice tohoto typu. Opak je ale pravdou. V obecném případě můžeme narazit na řadu problémů, které řešení komplikují, nebo dokonce vylučují jednoduché řešení zcela.

Vyjádření nekonečného součtu algebraickým výrazem nemusí být jednoduché, nebo vůbec možné. Příslušná řada nemusí být konvergentní, nebo určení podmínek její konvergence nemusí být jednoduše určené (tak, jak to je v zadaném příkladu u geometrické řady). Vyjádření součtu i obecné konvergentní řady může být velmi problematické. Navíc, pokud se nám to povede, může vést úprava na transcendentní rovnici, která nemá analytické řešení a její řešení je možné pouze přibližnými metodami.