Posloupnost, řada

Vojta:

Posloupnost, řada - přiznám se, že mám v těchto pojmech trochu zmatek. Vím, že nejsou asi stejné, ale trochu se v tom ztrácím. Nebo snad přece jen, vyjadřují totéž? Jaký je v tom rozdíl?

JaJ:

Vojto, nejste sám. Překvapivě hodně lidí v tom nemá úplně jasno a bojí se zeptat, stydí se to přiznat. Pak se pojmy často pletou a zaměňují. Buďte rád, že mezi ně nepatříte a máte odvahu se ptát.

Základ nejasnosti je spíše jazykový. V matematice pojem „řada“ znamená úplně něco jiného než je obvyklý sémantický význam tohoto slova

v běžném životě (řada stromů, řada úspěchů, …). Oba pojmy skutečně stejné nejsou, v prvním případě se jedná o uspořádanou množinu často reálných nebo komplexních čísel, v druhém případě pak o jejich součet.

---

*Posloupností se v matematice obecně rozumí **uspořádaná množina** prvků, v níž na pořadí prvků **záleží**. Záměnou prvků dostáváme jinou posloupnost. Prvky se **mohou** v posloupnosti opakovat. Pokud jsou prvky posloupnosti* a_n *čísla, mluvíme o číselné posloupnosti. Podle počtu prvků může být posloupnost konečná nebo nekonečná, běžné označení* $(a_n)_{n=1}^{k}\ ;\ k,n \in N$, *resp.* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

*Velmi často se v matematice setkáváme s aritmetickou posloupností (stálý **rozdíl** mezi sousedními členy posloupnosti):*

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = (\,a_1\,;\,a_2\,;\,a_3\,;\,\cdots) \quad ; \quad a_{n+1} = a_n + d \quad ; \quad d \cdots \text{diference} \quad ; \quad a_i, d \in R \quad ,$$

např.: $(\,1\,;\,3\,;\,5\,;\,7\,;\,\cdots) \quad ; \quad d = 2\,.$

Diference posloupnosti může být záporná i nulová. Speciálním případem je posloupnost samých nul.

https://cs.wikipedia.org/wiki/Aritmetická_posloupnost

Další velmi důležitou posloupností je posloupnost geometrická (každý člen, kromě prvního, je stálým násobkem předchozího členu):

$$(b_n)_{n=1}^{\infty} = (\, b_1 \,;\, b_2 \,;\, b_3 \,;\, \cdots) \quad ; \quad b_{n+1} = b_n \cdot q \quad ; \quad q \cdots \text{kvocient} \quad ; \quad b_i, q \neq 0 \ ,$$

např.: $(\, 1 \,;\, 3 \,;\, 9 \,;\, 27 \,;\, \cdots) \quad ; \quad q = 3 \,.$

https://cs.wikipedia.org/wiki/Geometrická_posloupnost

Existují samozřejmě i jiné posloupnosti, ale tyto jsou nejčastější, se kterými se v matematice setkáváme.

Řada. S pojmem posloupnost je úzce spojen pojem ***řada****. Řada vznikne součtem všech prvků posloupnosti.*

Pokud je posloupnost konečná, vznikne tzv. konečná řada, pokud je posloupnost nekonečná, vznikne řada nekonečná.

Z prvků posloupnosti můžeme vytvořit posloupnost tzv. částečných součtů:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad ; \quad n \in N \ ,$$

$$s_1 = a_1 \quad ; \quad s_2 = a_1 + a_2 \quad ; \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \quad ; \quad \cdots$$

Součet řady s *je číslo (pokud existuje).*

V případě konečné řady je s *dáno součtem všech členů posloupnosti:*

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \ ,$$

součet s *nekonečné řady je pak určen limitou:*

$$\boxed{s = \lim_{n\to\infty} s_n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \ .$$

Řada je tzv. konvergentní, pokud tato limita existuje a je konečná. V opačném případě řadu označujeme jako divergentní (limita je nevlastní nebo neexistuje).

Je vhodné přesněji rozlišovat dva pojmy, které se často zaměňují.

Číselnou řadou rozumíme objekt, soubor tvořený součtem čísel (členů řady), nikoliv jeho hodnotou.

Součtem řady ale číslo je (v případě konečné řady je určeno součtem všech členů, v případě nekonečné řady je dané limitou částečných součtů). Pokud je řada divergentní, její součet je buď nevlastní (nekonečný $\pm\infty$) nebo neexistuje (alternující řada).

Aritmetická řada

Součet prvních n členů aritmetické posloupnosti (n-tý člen posloupnosti částečných součtů) lze snadno vyjádřit (viz pozn.):

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \boxed{\frac{n(a_1 + a_n)}{2}} .$$

Určuje zároveň hodnotu součtu konečné řady s n prvky.

V případě ale, že se jedná o nekonečnou posloupnost a její řadu, pak řada diverguje (až na triviální případ posloupnosti samých nul).

Pozn.:

K této souvislosti se traduje známá historka o genialitě mladého C. F. Gausse. Jeho učitel na základní škole zadal žákům jako úkol (aby je na nějaký čas zaměstnal) sečíst všechna čísla od 1 do 100. Mladý Gauss odpověděl správně během chvilky, čímž učitele velmi udivil. Uvědomil si, že sečtením opačných prvků z posloupnosti čísel dostane vždy stejný výsledek: 1 + 100 = 101, 2 + 99 = 101, 3 + 98 = 101, atd., což dohromady dává 50 × 101 = 5050.

Příklad:

$$\{\,1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ \cdots\ ;\ 100\,\} \qquad \cdots \ \text{aritmetická posloupnost (konečná)},\ d = 1\ ,$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \sum_{k=1}^{100} k \qquad \cdots \ \text{aritmetická řada}\ ,$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} =$$

$$= \frac{100(1+100)}{2} = 5050 \qquad \cdots \ \text{součet (konečné) řady}\ .$$

Geometrická řada

Součet prvních n členů geometrické posloupnosti (n-tý člen posloupnosti částečných součtů) lze vyjádřit:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \boxed{a_1 \frac{1-q^n}{1-q}} \quad ; \quad pro\ \ q \neq 1\ ,$$
$$= a_1 \cdot n \quad ; \quad pro\ \ q = 1\ .$$

Určuje zároveň hodnotu součtu konečné řady s n prvky.

V případě ale, že se jedná o nekonečnou posloupnost a její řadu, pak řada konverguje pouze v případě, že $|q| < 1$:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(a_1 \frac{1-q^n}{1-q}\right) = \boxed{\frac{a_1}{1-q}} \quad ; \quad pro\ \ |q| < 1\ .$$

V opačném případě buď diverguje, nebo osciluje. Viz např.:

https://cs.wikipedia.org/wiki/Geometrická_posloupnost

Tato skutečnost se často využívá v matematických důkazech konvergence různých závislostí.

Příklad:

$$\{1; -0{,}5; 0{,}25; -0{,}125; \cdots\} \quad \cdots \ \text{geometrická posloupnost (nekonečná)}\ ,$$

$$1 - 0{,}5 + 0{,}25 - 0{,}125 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1 \cdot (-0{,}5)^k \quad \cdots \ \text{geometrická řada}$$

$$a_1 = 1 \quad ; \quad q = -0{,}5 \quad ; \quad |q| < 1\ ,$$

$$1 - 0{,}5 + 0{,}25 - 0{,}125 + \cdots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1+0{,}5} = 0{,}6\bar{6} \quad \cdots \ \text{součet řady}\ .$$

Vlastnosti a podmínky konvergence jiných posloupností a řad než aritmetické a geometrické jsou obecně složitější, podrobnosti viz např.:

https://cs.wikipedia.org/wiki/Řada_(matematika)
https://cs.wikipedia.org/wiki/Kritéria_konvergence_řad

Na závěr mi dovolte ještě malou poznámku. V průběhu studia na VŠ se setkáte jistě i s řadami, jejichž prvky nebudou reálná čísla, ale komplexní čísla nebo funkce. Jedná se o důležitou oblast matematické analýzy, která je zahrnuta do dalších semestrů studia.