

➤ Kalkulačka nepočítá správně – cyklometrické funkce



Markéta:

Proč mi má kalkulačka vrací správnou hodnotu inverzního sinu, když počítám ve stupních, ale chybnou hodnotu, když počítám v radiánech?

$$\begin{aligned}x = 30^\circ &\rightarrow \sin x = 0,5 &\rightarrow \sin^{-1}(0,5) = 30^\circ, \\x = 2 \text{ rad} &\rightarrow \sin x = 0,909 \dots &\rightarrow \sin^{-1}(0,909 \dots) = 1,141 \text{ rad}.\end{aligned}$$

Případně, jak mám spočítat úhel v radiánech z hodnoty sinu (nebo jiné goniometrické funkce)?

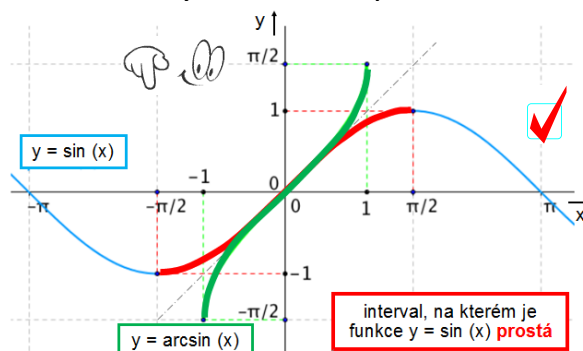
JaJ:

Markéto,


problém není v kalkulačce, ani v tom, zda pracujete se stupni nebo s radiány, ale v tom, že v druhém případě, který uvádíte, pracujete s úhlem, který je ve druhém kvadrantu ($2 > \frac{\pi}{2}$). Na rozdíl od vašeho prvního příkladu, kdy úhel 30° je v kvadrantu prvním. Zkuste podobný výpočet např. s úhlem 120° , ani v tomto případě nedostanete správný výsledek.

Při práci s inverzními goniometrickými funkcemi (tzv. cyklometrickými), si musíte vždy dávat pozor na to, ve kterém kvadrantu se úhel, se kterým pracujete, nachází. Kalkulačka to za vás udělat nemůže, vždy vrací jen hodnotu tzv. hlavní hodnoty úhlu, v tomto případě v intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$.

Cyklometrické funkce jsou inverzní funkce k funkcím goniometrickým. Goniometrické funkce (\sin , \cos , tg , cotg) jsou ale funkce periodické. To znamená, že jisté hodnotě jejich funkční hodnoty odpovídá celá řada různých úhlů, dokonce nekonečně mnoho. Inverzní funkce jsou ale definovány pouze pro funkce prosté (dvěma různým hodnotám proměnné, argumentu, odpovídají vždy právě dvě různé funkční hodnoty – zkuste si přestavit a nakreslit průběh nějaké prosté funkce). To je důvod, proč se musíme v případě cyklometrických funkcí vždy omezit jen na intervaly, ve kterých jsou odpovídající goniometrické funkce prosté, v tomto případě:



$$\begin{aligned}y = \arcsin(x) &; x \in \langle -1; 1 \rangle ; y \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle, \\D_f &= \langle -1; 1 \rangle ; H_f = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle.\end{aligned}$$

	<i>Podobně pro:</i>	$y = \arccos(x)$;	$x \in \langle -1; 1 \rangle$;	$y \in \langle 0; \pi \rangle$,	●
			$D_f = \langle -1; 1 \rangle$;	$H_f = \langle 0; \pi \rangle$,	●
		$y = \operatorname{arctg}(x)$;	$x \in \langle -\infty; +\infty \rangle$;	$y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,	●
		$D_f = R$		$H_f = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,	●
		$y = \operatorname{arccotg}(x)$;	$x \in \langle -\infty; +\infty \rangle$;	$y \in \langle 0; \pi \rangle$,	●
			$D_f = R$	$H_f = \langle 0; \pi \rangle$.	●

Takto jednoznačně definované hodnoty cyklometrických funkcí nazýváme hlavními hodnotami a vrací nám je i kalkulačka. Nic jiného nedokáže.




Ale k tomu, na co se ptáte: máme-li správně spočítat zpětně hodnotu úhlu z inverzní funkce podle vašeho dotazu:

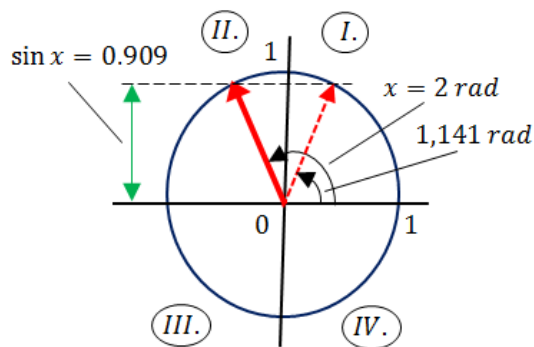
$$x = 2 \text{ rad} \rightarrow \sin x = 0,909 \dots \rightarrow \sin^{-1}(0,909 \dots) = 1,141 \dots$$

musíme si uvědomit, že se jedná o úhel, ležící ve druhém kvadrantu, viz obrázek. Tuto informaci kalkulačka nemá a nemůže s ní pracovat. Údaj kalkulačky vám uvádí jen hlavní hodnotu funkce:

$$y = \arcsin(0,909 \dots) = 1,141 \dots$$

tedy v rozsahu $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Abychom dostali výsledek, který očekáváte, musíme tuto hodnotu odečíst od hodnoty π :

 $\pi - 1,141 \dots = 2 \text{ rad}$.



Přesněji řečeno, pokud máte za úkol nalézt úhel, jehož sinus je 0,909... , výsledek není jednoznačný. V tomto případě by se jednalo o úhly:

$$2 \pm k \cdot 2\pi \text{ a } 1,141 \dots \pm k \cdot 2\pi ; k = 0, 1, 2, \dots \text{ radiánů.}$$

Zcela podobně musíme postupovat i v případě, že pracujeme se stupni a analogicky i s jinými goniometrickými funkcemi.

