➢ Stupně vs. radiány

Tomáš:

Proč se na střední škole pracuje zásadně se stupni a na vysoké zase zásadně s radiány? Není to zbytečná komplikace? Jsem absolventem strojní průmyslovky a nikdy jsem s radiánama pracovat nemusel.

JaJ:

Tomáši,

nejste jediný, komu to vrtá hlavou a cítí to jako zbytečnou komplikaci. Věřte ale, že to není samoúčelné a je to velmi šikovně vymyšlené. Důvodem je to, že se přechodem na vysokou školu zpravidla skokem dostáváte do poněkud vyššího „levelu“ matematiky.

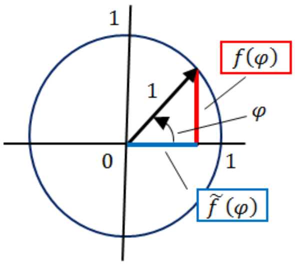
Na střední škole nepracujeme většinou s nástroji matematické analýzy (integrální a diferenciální počet, nekonečné řady, variační počet, …), kde si můžeme vybrat, zda budeme pracovat se stupni nebo radiány. Většinou si vybíráme častější a v obecném životě rozšířenější způsob vyjádření míry rovinného úhlu ve stupních. Je to zcela na vás, funguje obojí. Můžeme dokonce pracovat i v současné době s poněkud málo používanými jednotkami grad (90° = 10 grad). Většina kalkulaček je všemi třemi režimy vybavena, je potřeba si jen dát pozor, abychom měli nastavený správný příznak režimu (DEG/RAD/GRAD).

Na vysoké škole se však začínáme podrobněji seznamovat s dokonalejšími nástroji, které dávají matematice nebývalou sílu a mnohem širší analytické možnosti. Tam je velmi žádoucí pracovat s mírou obloukovou (s radiány). Pokud bychom pracovali s jinou mírou rovinného úhlu, obvykle používané vztahy a souvislosti by se komplikovaly a nebyly by tak jednoduché a přehledné. Je to opravdu šikovně vymyšlené a velmi doporučuji si na to zvyknout. Je mnohem jednodušší a rychlejší se pohybovat po vyšlapaných chodníčcích, které pro nás připravili generace opravdu moudrých a přemýšlivých lidí.

Nechci a nemohu zabíhat do přílišných detailů a jemností, ale jen kvůli přiblížení naznačím možný problém. Jistě jste se na průmyslovce setkali při studiu goniometrických funkcí se známým faktem, že derivací sinu je kosinus stejného úhlu. To je samozřejmě pravda, ale platí to přesně pouze v případě, že je úhel vyjádřen v radiánech. To už nebývá často a zřetelně zdůrazněno.

Pojem goniometrických funkcí pomocí známých vztahů mezi hodnotami úhlů a délkami stran v pravoúhlém trojúhelníku byl poprvé zaveden již v 16. století (G. J. Rhaeticus, 1551). Způsob vyjádření velikosti úhlu nebyl vždy v minulosti jednoznačný a dodnes se běžně setkáváme s několika způsoby jeho vyjádření. Dělení oblouku na stupně a jeho menší jednotky má původ ve starověké Babylonii, kde se používala šedesátková soustava. Francouzský matematik J. L. Lagrange v 18. století prosazoval měření úhlu v gradiánech. Tento způsob se ujal zejména ve frankofonních oblastech a dodnes se používá v některých oborech (geodézie, vojenství). Analytický náhled na vlastnosti goniometrických funkcí vytvořil v tomtéž století L. P. Euler (1748) a pro vyjádření velikosti úhlu byla zavedena míra oblouková v radiánech. Bezrozměrná jednotka rad je součástí Mezinárodního systému jednotek SI.

Zapomeňme na chvíli na formální označení sin a cos, ale pracujme jen s obecnou funkcí definovanou jako podíl délek odvěsny a přepony např. v pravoúhlém trojúhelníku jednotkové kružnice. Zkoumejme závislost délky odvěsen $f(\varphi)$ (obvykle označované jako sin) a $\widetilde{f}(\varphi)$ (obvykle označované jako cos) na velikosti úhlu φ vyjádřeného různým způsobem.

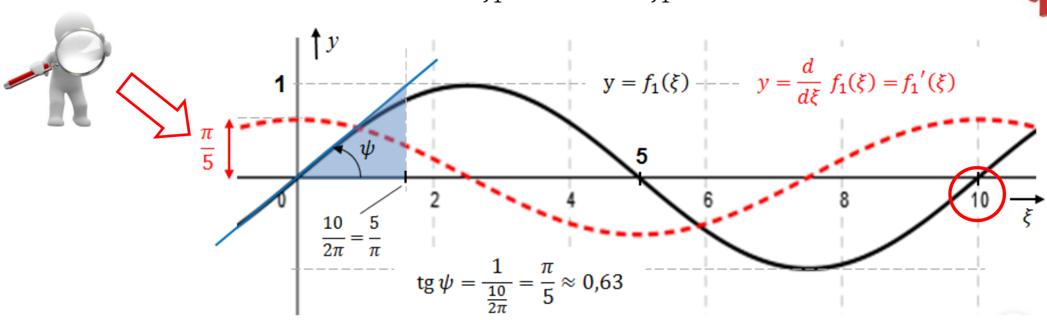


Dejme tomu, že nejprve rozdělíme rovnoměrně kružnici na deset stejných dílů a tím zavedu metriku, která nám umožní vyjádřit numericky velikost úhlu φ. Nejsou to samozřejmě ani stupně, ani radiány, dokonce ani gradiány. Jsou to jen hypotetické jednotky, které se pravděpodobně nikde nepoužívají, uvádím je jen pro ilustraci efektu. Toto zavedení nám umožňuje definovat periodickou funkci, v tomto případě s periodou $T = 10$, viz následující obrázek.

ξ	-2,5	0	2,5	5	7,5	10	*atd.*
$f_1(\xi)$	-1	0	1	0	-1	0	...

ξ … vyjádření úhlu φ v zavedené metrice

$$f_1(\xi) = f_1(\xi + T) \quad ; \quad D_{f_1} = R \quad ; \quad H_{f_1} = \langle -1; 1 \rangle$$

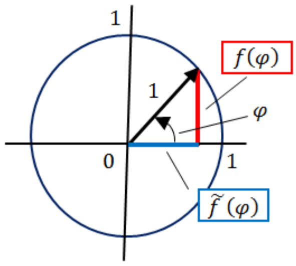


$$f_1(0) = 0 \quad ; \quad f_1{}'(0) = \frac{\pi}{5} \quad ; \quad [f_1(0)]^2 + [f_1{}'(0)]^2 \neq 1 \quad ; \quad f_1{}'(\xi) \neq \widetilde{f}_1(\xi)$$

Derivace funkce $f_1(\xi)$ je dána směrnicí tečny jejího průběhu v daném bodě. Na obrázku je naznačena situace pro $\xi = 0$, jedná se o směrnici modře označené tečny. Je určena tangentou úhlu ψ, v tomto případě $f_1{}'(0) = \mathrm{tg}\,\psi = \frac{\pi}{5} \neq 1$.

Dospěli jsme ke zjevnému rozporu (Pythagorova věta) s definicí sinu a kosinu v pravoúhlém trojúhelníku: $[f_1(0)]^2 + [f_1{}'(0)]^2 \neq 1 \;\; \rightarrow \;\; f_1{}'(\xi) \neq \widetilde{f_1}(\xi)$*.*

Jestliže však zavedeme metriku tak, že kružnici rozdělíme na 2π *(iracionálních) dílů, budeme měřit úhel v radiánech.*

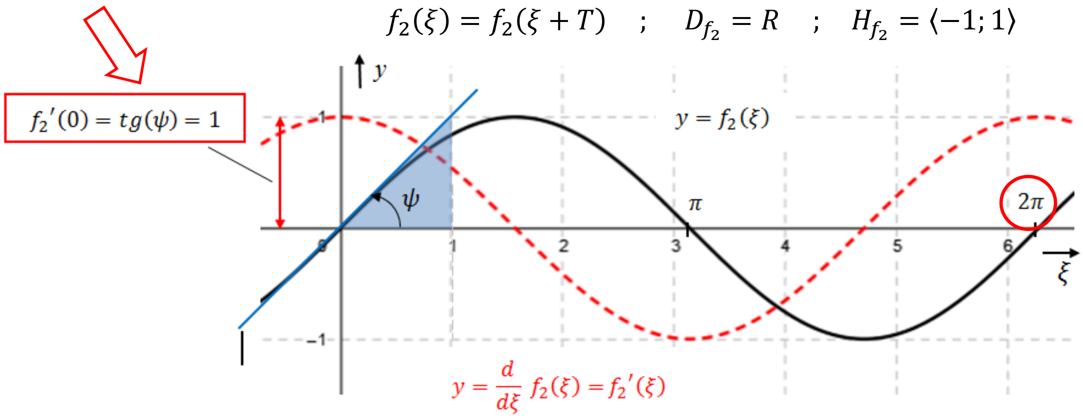


ξ	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	atd.
$f_2(\xi)$	-1	0	1	0	-1	0	…

ξ … vyjádření úhlu φ v míře obloukové

Opět určíme periodickou funkci, tentokrát s periodou $T = 2\pi$.

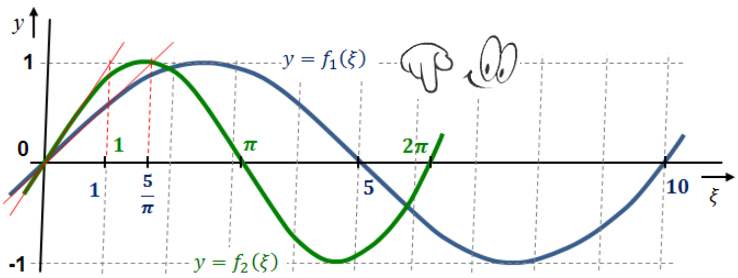
$$f_2(\xi) = f_2(\xi + T) \quad ; \quad D_{f_2} = R \quad ; \quad H_{f_2} = \langle -1; 1 \rangle$$



$$f_2(0) = 0 \quad ; \quad f_2{}'(0) = 1 \quad ; \quad [f_2(0)]^2 + [f_2{}'(0)]^2 = 1 \quad ; \quad f_2{}'(\xi) = \widetilde{f_2}(\xi)$$

V tomto případě se však derivace funkce $f_2(\xi)$ v bodě $\xi = 0$ rovná jedné $f_2{}'(0) = \widetilde{f_2}(0) = 1$, což odpovídá definici sinu a kosinu. Lze zcela podobně ukázat, že ke shodě dochází i v libovolném bodě $f_2{}'(\xi) = \widetilde{f_2}(\xi) \;\; ; \;\; \xi \in R$.

Pro srovnání ještě oba průběhy:



Je zřejmé, že důležitou roli hraje perioda goniometrické funkce, která je určená volbou jednotek, ve kterých úhel měříme. V prvním případě, kdy míra měření úhlu byla daná rovnoměrným rozdělením kružnice na deset dílů, byla perioda funkce f_1 rovná deseti. V případě měření úhlu v obloukové míře (v radiánech) je perioda funkce f_2 daná iracionálním číslem $T = 2\pi \approx 6{,}28$.

Hodnota derivace této goniometrické funkce (záměrně se vyhýbám označení sin) podle jejího argumentu v nule je daná zlomkem $\frac{2\pi}{T}$, tedy čím jemnější dělení a delší perioda, tím pozvolnější průběh a menší derivace. V prvním případě to je $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \approx 0{,}63$, ve druhém pak $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

Pokud se rozhodneme měřit úhel ve stupních, pak perioda zavedené goniometrické funkce bude $T = 360$ a hodnota její derivace v nule bude $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}017$. Podobně pro míru úhlu v gradiánech je perioda $T = 400$ a hodnota derivace v nule $\frac{2\pi}{400} = \frac{\pi}{200} \approx 0{,}016$.

Pozn.:

Pro funkci $\sin(x)$ by zřejmě mělo platit (l'Hospitalovo pravidlo): $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$.

Ověřte numericky na kalkulačce pro malé x (např. $x = 0{,}001$) :

- *s nastaveným příznakem 'DEG' dostaneme $0{,}017453292 \approx \frac{\pi}{180}$,*
- *s nastaveným příznakem 'GRAD' dostaneme $0{,}015707963 \approx \frac{\pi}{200}$,*
- *s nastaveným příznakem 'RAD' však dostaneme hodnotu $0{,}999999833 \approx 1$.*

Předpokládaná rovnost je zřejmě splněna pouze v případě, že je x v radiánech.

Má-li platit, že $\widetilde{f_2}(\xi)$ je derivací funkce $f_2(\xi)$: $f_2{}'(\xi) = \widetilde{f_2}(\xi)$, pak trigonometrické definici sinu a kosinu (jako podílu délek příslušné odvěsny a přepony v pravoúhlém trojúhelníku) vyhovuje pouze vyjádření úhlu v míře obloukové (v radiánech).

To je také hlavní důvod proč v matematické analýze, kde pracujeme již s nástroji diferenciálního počtu, preferujeme vyjádření argumentu goniometrických funkcí v radiánech.

V matematických textech je obvyklé používat pro argument goniometrických funkcí vyjádřený v obloukové míře symbol x , potom:

$$f_2(\xi) = f_2(x) = \sin x \quad ; \quad \sin(0) = 0 \ , \qquad x = \xi \ \ldots$$ *v míře obloukové*

$$f_2{}'(\xi) = f_2{}'(x) = \widetilde{f_2}(\xi) = \widetilde{f_2}(x) = \cos x \quad ; \quad \cos(0) = 1 \ ,$$

$$\boxed{\sin' x = \cos x \quad ; \quad \cos' x = -\sin x},$$

(Toto jistě dobře znáte, příp. najdete v každé příručce a učebnici matematiky.)

$$[f_2(x)]^2 + \left[\widetilde{f_2}(x)\right]^2 = \boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1} \quad ; \quad \sin^2(0) + \cos^2(0) = 1 \ .$$

Pozn.:

Přísně vzato, vyjádření argumentu goniometrických funkcí v radiánech není nezbytně nutné a jediné možné ani při práci s nástroji matematické analýzy. Pokud bychom však vyjadřovali úhel ve stupních (resp. v gradiánech nebo jiných jednotkách) byly by všechny odvozené souvislosti (se kterými běžně pracujeme, a které také nalezneme ve všech matematických příručkách a učebnicích) poněkud komplikovanější a složitější.

Průběh funkce $f(\xi)$ v závislosti na jejím argumentu (ať už je úhel vyjádřen v radiánech nebo s jinou metrikou) splňuje samozřejmě podmínky pro rozvoj v Taylorovu, respektive Maclaurinovu řadu.

Např. Maclaurinův rozvoj (v nule): T *… perioda funkce* $f(\xi)$ *,*

$$y = f(\xi) \quad \rightarrow \quad f(0) = 0 \;\; ; \;\; f'(0) = \frac{2\pi}{T} = k \;\; ; \;\; f''(0) = 0 \;\; ; \;\; f'''(0) = -k^3 \;\; ; \;\; \cdots ,$$

$$f(\xi) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\xi + \frac{f''(0)}{2!}\xi^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\xi^3 + \cdots =$$

$$= \frac{k\xi}{1!} - \frac{(k\xi)^3}{3!} + \frac{(k\xi)^5}{5!} \mp \cdots \quad ; \quad |\xi| < \infty \; .$$

Speciálně pro míru v radiánech, $T = 2\pi \quad \rightarrow \quad k = 1 \; ; \; \xi = x$ *:*

$$f(x) = \boxed{\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots} \quad ; \quad |x| < \infty \; .$$

Srovnáním obou řad pak: $f(\xi) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}\xi\right)$ *,*

např. pro vyjádření úhlu $\varphi = 90°$ *ve stupňové míře bude* $T = 360 \;\; ; \;\; \xi = 90$ *:*

$$f(90) = \sin\left(\frac{2\pi}{360}90\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \; .$$

Snad se mi trochu podařilo ukázat jak šikovně je vymyšlený způsob vyjádření úhlu v míře obloukové. Jiné jednotky vyjádření by vedly v matematické analýze ke komplikovaným strukturám a nepřehledným, zbytečně složitým souvislostem.

Nám nezbývá než ocenit a pochválit práci velikánů, kteří dokázali vyladit matematický aparát k jednoduché harmonii souvislostí. Nebojte se radiánů, zvykněte si na ně, skutečně to je užitečné.

JaJ