Eulerův exponenciální tvar komplexního čísla

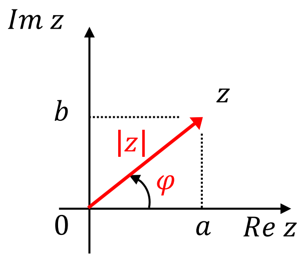
Jakub:

Na střední škole jsme se seznámili se zavedením poněkud exotických komplexních čísel a s prací s nimi. Přijal jsem způsob jejich vyjádření v komplexní rovině i jejich logické vyjádření pomocí goniometrických funkcí. To mi přijde ještě pochopitelné. Co mi ale hlava nebere je exponenciální tvar komplexního čísla. Jak se k němu došlo? Proč se do toho ještě navíc zatahuje abstraktní exponenciální funkce? Je to vůbec k něčemu dobré? Není to jen samoúčelná komplikace v již tak dost komplikované nepřirozené abstraktní představě?

JaJ:

Není. Vůbec se vám Jakube nedivím, že se necítíte příjemně ve světě komplexních čísel, je to opravdu dost velká abstrakce. Posunula ale matematiku a naše nástroje poznání světa o značný kus dál. To jistě brzy pochopíte na vaší cestě za vzděláním. Při počítání oveček nebo ceny nákupu v samoobsluze opravdu žádná komplexní čísla nepotřebujete. Ale vy se posouváte o kousek dál. Teorie komplexní proměnné je základním aparátem moderní elektrotechniky, mechaniky, dynamiky, obecně fyziky a všech technických oborů.

Ale k vašemu dotazu – způsob vyjádření komplexního čísla v Eulerově exponenciálním tvaru není opravdu tak zřejmý a jednoduše pochopitelný. To, že jste si toho všiml, a že vám vadí, že nechápete jak se k němu došlo, svědčí o vaší schopnosti přesně uvažovat a o věcech přemýšlet v souvislostech. A to je dobře. Na střední škole a ve většině učebnic a příruček je vztah jen uveden a předložen k věření:



$$z = a + b\,i = |z|(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) = |z|e^{i\,\varphi}\ .$$

Ale pozor, platí pouze pro φ v míře obloukové, tedy v radiánech.

Upřímně řečeno, nevím, jak pan Euler na to přišel, jistě to nebyla jednoduchá úvaha. Správnost tohoto vztahu však jednoduše vyplývá z vyjádření jednotlivých komponent ve tvaru mocninné řady. Asi i pan Euler k tomu došel touto cestou.

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots\ , \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \cdots\ ,$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\ .$$

Problematikou rozvoje funkce v mocninnou řadu se budete zabývat až na vysoké škole v matematice v prvních ročnících. Trochu předbíhám, omlouvám se, ale tuto souvislost neumím jinak vysvětlit než srovnáním:

$$e^{i\,x} = 1 + \frac{i\,x}{1!} + \frac{i^2\,x^2}{2!} + \frac{i^3\,x^3}{3!} + \frac{i^4\,x^4}{4!} + \cdots = 1 + \frac{i\,x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{i\,x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots =$$

$$= \underbrace{\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots\right]}_{\cos x} + i\,\underbrace{\left[\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots\right]}_{\sin x} = \cos x + i\,\sin x\ .$$

Exponenciální tvar nám velmi zjednodušuje práci s komplexními čísly, umožňuje nám s nimi provádět algebraické operace velmi jednoduše, velmi podobně jako s mocninou v reálném oboru. Nabízí nám jednoduchý vhled a možnost si jednoduše uvědomit některé důležité souvislosti.

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= |z_1|\,e^{i\varphi_1} \\ z_2 &= |z_2|\,e^{i\varphi_2} \end{aligned}\right\}$$

násobení:
$$\boxed{z_1\,z_2 = |z_1|\,|z_2|\,e^{i\,(\varphi_1+\varphi_2)}} = |z_1|\,|z_2|[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]\ ,$$

dělení:
$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,e^{i\,(\varphi_1-\varphi_2)}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]\ .$$

Mocnina komplexního čísla:

$$z = |z|\,e^{i\varphi} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{z^n = \left(|z|\,e^{i\varphi}\right)^n = |z|^n\,e^{i\,n\varphi}}$$

a jednoduchý důsledek (známá Moivrova věta):

$$z = |z|(\cos\varphi + i\ \sin\varphi) \qquad \rightarrow \qquad z^n = |z|^n\,(\cos n\varphi + i\ \sin n\varphi)\ .$$

Povšimněme si, že reálná i imaginární část komplexního čísla jsou periodické funkce argumentu φ s periodou 2π, proto:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\ \sin\varphi) =$$
$$= |z|[\cos(\varphi + k\cdot 2\pi) + i\ \sin(\varphi + k\cdot 2\pi)] \quad ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\ ,$$
$$-\pi < \varphi \leq \pi \quad \cdots \ \textit{hlavní hodnota argumentu}\ .$$

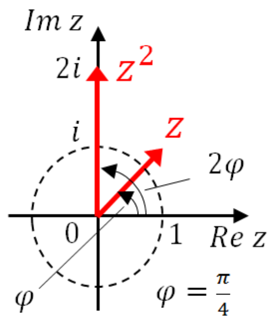
Na tuto mnohoznačnost se často zapomíná, hlavně při výpočtu odmocniny komplexního čísla – častý zdroj chyb a nepřesností.

Pozn.: Pro sčítání a odečítání komplexních čísel se však jejich exponenciální tvar naopak příliš nehodí.

Příklady:

Uvažujme komplexní číslo: $z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4}\right)$,

$$z = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi\right)} \quad ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \ .$$



1) Mocnina z :

$$\underline{z^2} = (1+i)^2 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot i + i^2 = 1 + 2\,i - 1 = \underline{2\,i} \ ,$$

$$\underline{z^2} = \left[\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi\right)}\right]^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi\right)\cdot 2} = 2\, e^{i\left(\frac{\pi}{2}+k\cdot 4\pi\right)} = \ ,$$

$$= 2\left[\underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{2} + k\cdot 4\pi\right)}_{0} + i\underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi}{2} + k\cdot 4\pi\right)}_{1}\right] = \underline{2\,i} \ .$$

Tímto příkladem jsem vás zatím asi příliš nepřesvědčil o výhodách komplexního čísla v exponenciálním tvaru. Zkuste ale vyšší mocninu, např.:

$$\underline{z^8} = \left[\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi\right)}\right]^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8 e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi\right)\cdot 8} = 16\, e^{i\,(2\pi+k\cdot 16\pi)} =$$

$$= 16\left[\underbrace{\cos(2\pi + k\cdot 16\pi)}_{1} + i\underbrace{\sin(2\pi + k\cdot 16\pi)}_{0}\right] = \underline{16} \ .$$

V tomto případě je výsledkem reálné číslo. Pokuste se ale k němu dostat bez použití Moivrovy věty nebo exponenciálního tvaru komplexního čísla.

Pro zajímavost:

$$\underline{i^{\,2}} = \left[e^{i\left(\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right)}\right]^2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right)\cdot 2} = e^{i\,(\pi+k\cdot 4\pi)} =$$

$$= \underbrace{\cos(\pi + k\cdot 4\pi)}_{-1} + i\ \underbrace{\sin(\pi + k\cdot 4\pi)}_{0} = \underline{-1} \ .$$

Tím je i imaginární jednotka definovaná.

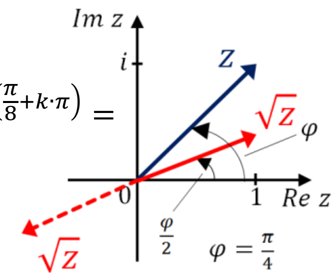
---

2) Odmocnina z :

Operaci odmocnění komplexního čísla nám jeho obecný tvar jednoduše neumožňuje. V exponenciálním tvaru to je naopak snadné:

$$\underline{\sqrt{1+i}} = z^{\frac{1}{2}} = \left[\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi\right)}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi\right)\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{8}+k\cdot \pi\right)} =$$

$$= \left\langle \begin{array}{l} \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\ \sin\frac{\pi}{8}\right) \approx \underline{1{,}099 + i\ 0{,}455} \\ \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\ \sin\frac{9\pi}{8}\right) \approx \underline{-1{,}099 - i\ 0{,}455} \end{array}\right.$$

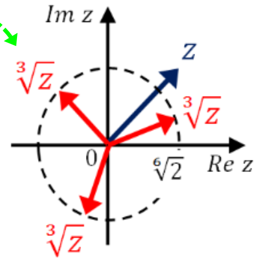


Výsledek je v tomto případě dvojznačný.

Výsledek třetí odmocniny by byl trojznačný, čtvrté odmocniny čtyřznačný atd.

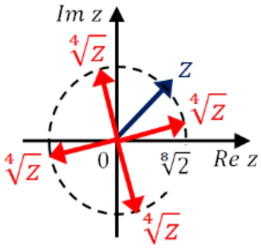
$$\sqrt[3]{1+i} = z^{\frac{1}{3}} = \left[2^{\frac{1}{2}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi\right)}\right]^{\frac{1}{3}} = $$

$$= 2^{\frac{1}{6}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{12}+k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)} = \cdots = \left\langle \begin{array}{l} 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\ \sin\frac{\pi}{12}\right) \\ 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\ \sin\frac{3\pi}{4}\right)\ , \\ 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\ \sin\frac{17\pi}{12}\right) \end{array}\right.$$



$$\sqrt[4]{1+i} = z^{\frac{1}{4}} = \left[2^{\frac{1}{2}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi\right)}\right]^{\frac{1}{4}} = $$

$$= 2^{\frac{1}{8}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{16}+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)} = \cdots = \left\langle \begin{array}{l} 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\ \sin\frac{\pi}{16}\right) \\ 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\ \sin\frac{9\pi}{16}\right) \\ 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\ \sin\frac{17\pi}{16}\right) \\ 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\ \sin\frac{25\pi}{16}\right) \end{array}\right. .$$

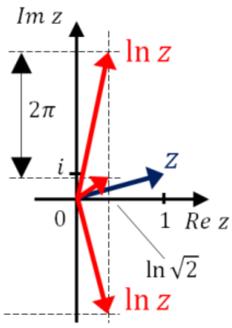


---

3) *Exponenciální tvar komplexního čísla nám umožňuje pracovat i s některými jeho transcendentními funkcemi, např. s logaritmem:*

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi\right)}\ \ ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots ,$$

$$\underline{\ln z} = \ln(1+i) = \ln\left[\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi\right)}\right] = \underline{\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi\right)}\ .$$



Logaritmus komplexního čísla má nekonečně mnoho hodnot, které mají shodnou velikost svých reálných částí a liší se o celé násobky 2π ve svých imaginárních částech.

---

4) *Logickým důsledkem vyjádření komplexního čísla v exponenciálním tvaru jsou např. Eulerovy vzorce (vztahy mezi goniometrickou a exponenciální funkcí):*

$$\left.\begin{array}{l} e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\ \sin\varphi \\ e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\ \sin\varphi \end{array}\right\} \rightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{l} \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} \\ \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \end{array}} \right. .$$

Poznámka na závěr:

V roce 1988 uspořádal časopis Mathematical Intelligencer, vydávaný nakladatelstvím Springer Verlag, mezi svými čtenáři anketu o nejkrásnější rovnici světa. Přesvědčivě v ní zvítězila tzv. Eulerova identita $e^{i\pi} = -1$. Elegance, s kterou tato rovnice spojuje obě mystické konstanty e a π, jí přisuzuje jakýsi „kultovní“ status mezi příznivci matematiky. Je to jakási obdoba Einsteinovy rovnice $E = mc^2$ ve fyzice, i když její popularity zdaleka nedosahuje.