➢ Kořeny polynomu

Martin:

Na průmce jsme si říkali, že každý polynom n-tého řádu má n kořenů. Jak je tedy možné, že některé polynomy kořeny nemají?
Příklad:
Polynom $2x^2 - 8x + 6$ kořeny má, ale polynom $2x^2 - 8x + 10$ kořeny nemá.

JaJ:

Martine, ano, skutečně – to co jste si říkali na SŠ je skutečně pravda. Dokonce to je jedna z velmi důležitých souvislostí v matematice, někdy se označuje jako základní věta algebry. Je ale potřeba se na to podívat trochu přesněji a podrobněji.

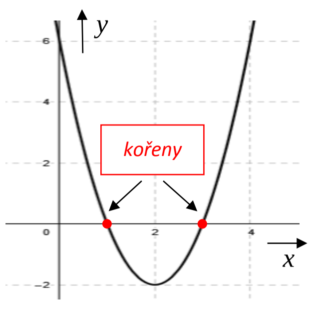
*Především: u polynomu nemluvíme o řádu, ale jeho nejvyšší mocnina je označovaná jako stupeň. Nejčastěji pracujeme s polynomy pouze jedné proměnné, jejichž koeficienty jsou reálná čísla. Pravděpodobně máte na mysli právě takovéto polynomy. Pro ně skutečně platí, že mají právě tolik kořenů jako je jejich stupeň. Každý je ale počítán ve své násobnosti. Pokud je tedy kořen např. dvojnásobný, počítáme ho dvakrát. Ale pozor, kořeny mohou být i **komplexní**! A to je právě to, kam směřuje váš dotaz.*

Když budeme o tom trochu víc uvažovat, tak si jistě uvědomíme, že pokud je nějaký kořen polynomu s reálnými koeficienty komplexní, musí logicky existovat i kořen komplexně sdružený (proč?). Komplexní kořeny se vyskytují vždy v páru. A ještě jedna zajímavost: polynomy lichého stupně musí mít zřejmě alespoň jeden reálný kořen.

Ale k vašemu dotazu:

- *Polynom $2x^2 - 8x + 6$ a jeho kořeny.*

  Kořenem rozumíme takovou hodnotu proměnné x, pro kterou platí, že po jejím dosazení do výrazu dostáváme nulovou hodnotu polynomu. V tomto případě se jedná o polynom druhého stupně a existují právě dva takovéto kořeny. Pro ostatní hodnoty je vyčíslená hodnota nenulová.

  Je užitečné si situaci přiblížit a zobrazit závislost $y = 2x^2 - 8x + 6$ graficky. V tomto případě je průběh této funkční hodnoty vyjádřen parabolou, viz obrázek.

Konkrétní hodnoty kořenů vypočteme podle jednoduchého vzorce:

$$y = ax^2 + bx + c \quad \rightarrow \quad \boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad , \quad a \neq 0 \ ,$$

$$a = 2 \ ; \ b = -8 \ ; \ c = 6 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{4} = \cdots = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right. .$$

Kořeny zadaného polynomu jsou tedy dva, $\underline{x_1 = 3}$ *a* $\underline{x_2 = 1}$ *(srovnejte s grafem funkčního průběhu). Jedná se o průsečíky s osou* x .

Vzorec pro výpočet kvadratického polynomu vám doporučuji si zapamatovat, patří k základní výbavě, často se používá. Pokud si ale někdy nebudete úplně jistý přesným zněním tohoto vzorce, kořeny polynomu můžete poměrně snadno určit prostřednictvím jeho úpravy na úplný čtverec.

Rozklad polynomu na kořenové činitele je v tomto případě:

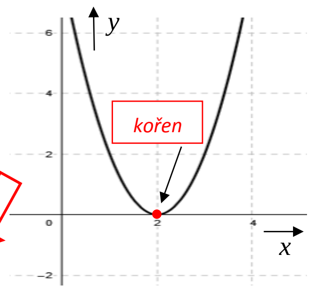
$$2x^2 - 8x + 6 = \underline{2(x-3)(x-1)} = a(x - x_1)(x - x_2) \ .$$

!

Pozor! – na násobení koeficientem u nejvyšší mocniny se často zapomíná.

- *Kořeny polynomu* $\underline{2x^2 - 8x + 8}$.

Jak je to s kořeny tohoto polynomu?
Jedná se opět o polynom druhého stupně (kvadratický trojčlen), očekáváme tedy i v tomto případě dva kořeny. Kořenem je ale v tomto případě pouze jediný, zato dvojnásobný kořen:



$$a = 2 \ , \ b = -8 \ , \ c = 8 \ ,$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{4} = \underline{2} \ .$$

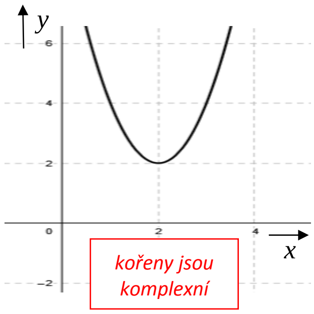
Platnost základní věty algebry je tedy i v tomto případě potvrzena. Násobnost kořenu je důsledkem nulové hodnoty výrazu pod odmocninou (tzv. diskriminant).

Rozklad na kořenové činitele: $\quad 2x^2 - 8x + 8 = \underline{2(x-2)^2}$.

- *Kořeny polynomu* $2x^2 - 8x + 10$.

Jak je to tedy s kořeny polynomu, na který jste se ptal?

Průběh funkční závislosti $y = 2x^2 - 8x + 10$ *však tentokrát osu* x *neprotíná, viz obrázek. Neexistuje reálné číslo* x, *které by po dosazení do funkční závislosti splňovalo hodnotu* $y = 0$. *Kořeny daného polynomu jsou komplexní, dvě komplexně sdružená čísla. Také zde se opět potvrzuje tvrzení základní věty algebry.*



$$a = 2 \;,\; b = -8 \;,\; c = 10 \;,$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm \sqrt{-16}}{4} = \frac{8 \pm 4\,i}{4} = 2 \pm i \;,$$

$$2x^2 - 8x + 10 = 2(x - x_1)(x - x_2) = 2(x - 2 - i)(x - 2 + i) =$$
$$= 2[(x-2)^2 - i^2] = 2[(x-2)^2 + 1]\,.$$

Komplexní charakter kořenů je v tomto případě způsoben zápornou hodnotou diskriminantu.

- *Kořeny polynomů vyšších stupňů.*

Základní věta algebry o počtu kořenů polynomu rovnajícího se jeho stupni, platí obecně pro jakýkoliv konečný stupeň polynomu. Problém je ale s jejich numerickým určením.

Pro polynomy třetího stupně (tzv. kubické) existují Cardanovy vzorce, viz např.:

https://cs.wikipedia.org/wiki/Cardanovy_vzorce .

Jejich použití je ale v obecném případě dosti komplikované a pracné.

Pracnost výpočtu kořenů polynomu a jeho komplikovanost však prudce roste s jeho stupněm. Pro výpočet kořenů polynomu čtvrtého stupně sice vzorce existují, ale jsou natolik složité, že se příliš nepoužívají. Ani běžné učebnice a matematické příručky je obvykle neuvádějí.

Od pátého stupně výše dokázal v 19. století dánský matematik N. H. Abel, že dokonce obecné analytické řešení ve formě (byť jakkoliv komplikovaného) vzorce nemůže vůbec existovat.

Pro výpočet kořenů polynomů vyšších stupňů tak zbývají pouze různé metody numerické matematiky. Tedy „pouze“- jsou to velmi účinné a mocné nástroje umožňující nejen výpočet kořenů polynomů a rovnic jakéhokoliv stupně, ale i řešení komplikovaných sofistikovaných problémů moderní matematiky, viz např.:

https://docplayer.cz/932809-Numericke-metody-autori-textu-rndr-rudolf-hlavicka-csc.html .

Aniž bychom si to většinou uvědomovali, ani naše inteligentní kalkulačky by nebyly bez implementovaných numerických metod tak elegantním a účinným nástrojem, na který jsme si tak rádi zvykli.

Problematika numerické matematiky je náplní příslušných kurzů úvodních semestrů na vysoké škole.