➢ Úprava kvadratického polynomu na čtverec

Lukáš:

Co se rozumí „úpravou polynomu na čtverec“ a k čemu to je dobré?

JaJ:

Lukáši, tato úprava je jedním z důležitých, užitečných a často používaných matematických postupů. Používá se pro úpravu kvadratických výrazů a polynomů druhého stupně. Využíváme ji při řešení kvadratických rovnic, při integrování, v analytické geometrii při práci s kuželosečkami a v mnoha dalších případech.

Kvadratickým trojčlenem rozumíme polynom (mnohočlen) 2. stupně:

$$P(x) = k_2 x^2 + k_1 x + k_0 \quad ; \quad k_2 \neq 0 \,.$$

Tento polynom má tři členy (proto trojčlen), nejvyšší mocnina proměnné x je 2 (odtud kvadratický). Je definován pro libovolné reálné (dokonce i komplexní) hodnoty koeficientů k_2, k_1, k_0 i proměnné x. Koeficient k_2 u nejvyšší mocniny x musí být nenulový, v opačném případě by se jednalo pouze o polynom prvního stupně (lineární dvojčlen).

Základní myšlenkou je použití známého vzorce pro kvadrát (druhou mocninu, často označovanou jako čtverec) dvojčlenu:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

pro náhradu prvních dvou členů polynomu $P(x)$. Následnou úpravou však musíme zajistit původní rovnost.

Vypadá to asi dost složitě. Ukažme si ale na jednoduchých příkladech, že to není tak hrozné.

---

1) $P_1(x) = x^2 + 2x - 3$, $\qquad (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$,

$$x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \ ,$$

$$P_1(x) = [(x+1)^2 - 1] - 3 = (x+1)^2 - 4 \ ,$$

$$x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4 = (x+1)^2 - 2^2 \ .$$

Rozložili jsme tímto způsobem kvadratický trojčlen na rozdíl kvadrátů (čtverců) dvou členů.

Snadno pak dále použitím $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ rozložíme polynom na součin kořenových činitelů:

$$x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4 = (x+1)^2 - 2^2 =$$
$$= [(x+1)+2] \cdot [(x+1)-2] = (x+3)(x-1) \ ,$$

$$\boxed{x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = (x-x_1)(x-x_2) \ ,} \qquad x_1 = -3 \quad , \quad x_2 = +1 \ ,$$

$x_1, x_2 \cdots$ *kořeny polynomu* $P_1(x)$; $P_1(x_1) = P_1(x_2) = 0$,

$$P_1(x_1) = P_1(-3) = x_1^2 + 2x_1 - 3 = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3 = 0 \ ,$$
$$P_1(x_2) = P_1(+1) = x_2^2 + 2x_2 - 3 = 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 0 \ .$$

---

2) *Jen trochu komplikovanější je úprava v případě, že koeficient u nejvyšší mocniny je různý od jedné. Před rozkladem je vhodné tento koeficient vytknout.*

$$P_2(x) = 0{,}5x^2 + x - 4 = 0{,}5\left(x^2 + 2x - 8\right) \ , \qquad (x+1)^2 = \underbrace{x^2 + 2x} + 1 \ ,$$
$$x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \ ,$$
$$P_2(x) = 0{,}5 \,\{\, [(x+1)^2 - 1] - 8 \,\} = 0{,}5\,[(x+1)^2 - 9] = 0{,}5\,[(x+1)^2 - 3^2] \ ,$$
$$0{,}5x^2 + x - 4 = 0{,}5\,[(x+1)^2 - 3^2] =$$
$$= 0{,}5[(x+1)+3] \cdot [(x+1)-3] = 0{,}5(x+4)(x-2) \ .$$

Kořeny polynomu: $x_1 = -4$, $x_2 = +2$, $P_2(x_1) = P_2(x_2) = 0$.

! *POZOR, častá chyba!*
Při rozkladu na kořenové činitele se často zapomíná násobit koeficientem u nejvyšší mocniny.

Použití úpravy trojčlenu na čtverec

pro výpočet kořenů kvadratické rovnice

Předpokládáme obecnou kvadratickou rovnici ve tvaru:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad ; \quad a \neq 0 \ ,$$

s reálnými (obecně mohou být i komplexní) koeficienty a, b, c *a s neznámou* x . *Využijeme úpravy levé strany rovnice na čtverec.*

Pro zjednodušení následných úprav vydělíme nejprve rovnici koeficientem a :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

a její levou stranu pak upravíme na čtverec:

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 =$$

$$= \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right] \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right] =$$

$$= \left(x + \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \cdot \left(x + \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = (x - x_2) \cdot (x - x_1) = 0 \ ,$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \ .$$

Porovnáním získáme již známý vzorec pro výpočet kořenů kvadratické rovnice:

$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad ; \quad a \neq 0 \ ,$

$a\,x^2 + b\,x + c = a(x - x_1)(x - x_2) \ .$

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$D = b^2 - 4ac$ ... *diskriminant*

měli byste umět zpaměti

Příklady:

1) *Rozklad na kořenové činitele*

$x^2 - x - 2 = 0 \ , \qquad a = 1 \quad , \quad b = -1 \quad , \quad c = -2 \ ,$

$x^2 - x - 2 = \{[(x - 0{,}5)^2 - 0{,}5^2] - 2\} = (x - 0{,}5)^2 - 1{,}5^2 =$

$= [(x - 0{,}5) - 1{,}5][(x - 0{,}5) + 1{,}5] = (x - 2)(x + 1) \ ,$

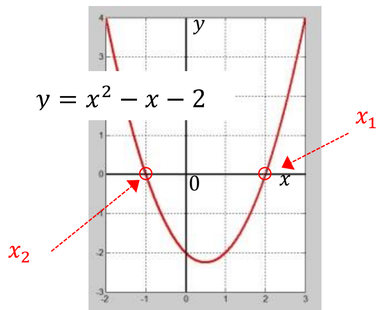
$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array} \right. ,$

$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) = (x - x_1)(x - x_2) \ ,$

kořeny rovnice: $x_1 = +2 \quad , \quad x_2 = -1 \ ,$

zkouška: $2^2 - 2 - 2 = 4 - 2 - 2 = 0 \ ,$

$(-1)^2 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0 \ .$



---

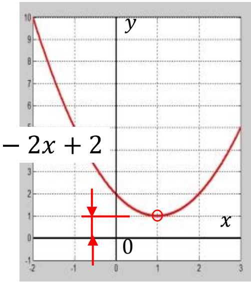
2) Rozklad na kořenové činitele

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \ , \qquad a = 1 \quad , \quad b = -2 \quad , \quad c = +2 \ ,$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \ , \qquad ! \qquad D < 0 \ .$$

Rovnice v oboru REÁLNÝCH čísel $x \in R$ nemá řešení, neexistují její reálné kořeny.

$y = x^2 - 2x + 2$



V KOMPLEXNÍM oboru $x \in C$ však řešení existuje:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = 1 \pm i = \left\langle \begin{matrix} 1 + i \\ 1 - i \end{matrix} \right. .$$

Nebo také rozkladem na čtverec:

$$\underbrace{x^2 - 2x} + 2 = [(x-1)^2 - 1] + 2 = (x-1)^2 + 1 = (x-1)^2 - (-1) = [\, i^2 = -1 \,] =$$

$$= [(x-1) + i] \cdot [(x-1) - i] = [x - (1 - i)][x - (1 + i)] \ .$$

Zkouška:

$$(1+i)^2 - 2(1+i) + 2 = 1 + 2i + i^2 - 2 - 2i + 2 = 1 + i^2 = [i^2 = -1] = 1 - 1 = 0 \ ,$$

$$(1-i)^2 - 2(1-i) + 2 = 1 - 2i + i^2 - 2 + 2i + 2 = 1 + i^2 = 0 \ .$$

---

3) Úkolem je nakreslit kružnici popsanou rovnicí:

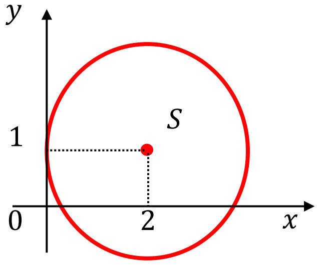
$$x^2 - 4x + y^2 - 2y + 1 = 0 \ .$$

Obecná rovnice kružnice se středem $S[x_s; y_s]$ a poloměrem r :

$$(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 = r^2 \ .$$

Technikou úprav na čtverec členů s proměnnou x i y převedeme rovnici do tohoto tvaru:

$$\underbrace{x^2 - 4x} + \overbrace{y^2 - 2y} + 1 = \underbrace{[(x-2)^2 - 4]} + \overbrace{[(y-1)^2 - 1]} + 1 =$$



$$= (x-2)^2 + (y-1)^2 - 4 = 0 \ ,$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4 \ ,$$

$$x_s = 2 \quad , \quad y_s = 1 \quad , \quad r = 2 \ .$$