Vzdálenost bodu od přímky

V této epizodě bych se chtěl pokusit varovat před velmi špatným návykem mnoha studentů, který si většinou přinášejí již ze střední školy. Používat při řešení matematických problémů za každou cenu předpřipravených vzorců a snažit se dosazovat do nich hodnoty bez pochopení vnitřních souvislostí.

Je to špatný a nebezpečný přístup, který velmi často vede k neúspěchům a selhání studentů na technických vysokých školách.

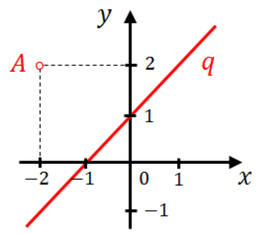
Matematika není souhrn velkého množství složitých vzorců, ale je postavena právě na pochopení souvislostí a použití jen malého souboru základních vztahů.

Dosazení do připravených vzorců lze doporučit pouze pro rychlé rutinní výpočty člověkem, který chápe podstatu problému.

Pokusím se na jednoduchém příkladu (který se často objevuje v různých variantách v přijímacích testech na VŠ) ukázat různé přístupy k řešení úkolu a naznačit jejich výhody i nevýhody.

Úkol:

Určete vzdálenost bodu $A[-2; 2]$ od přímky $q\colon\ y = x + 1$.



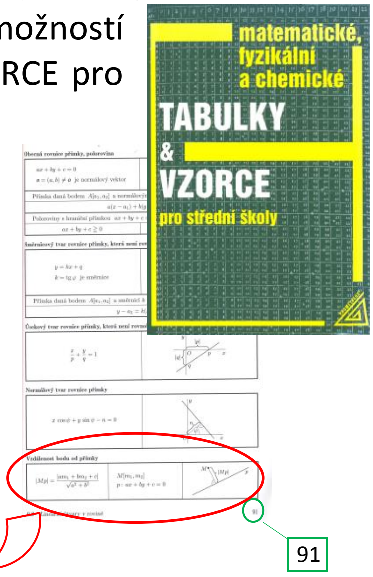
1) Řešení dosazením do připraveného vzorce

(Postup, který používá bohužel většina studentů, a který doporučuji pouze těm, kteří dobře chápou podstatu problému a jen pro rychlé a rutinní řešení.)

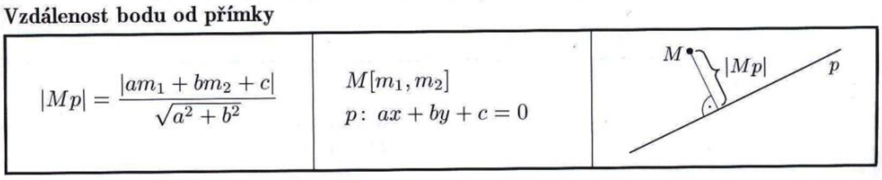
Postup řešení:

Použijeme připravený vzorec, do kterého dosadíme parametry podle zadání.

Vzorec, se kterým budeme pracovat, si buď bezpečně pamatujeme, nebo vyhledáme v některé z matematických příruček. Jednou z možností jsou: „Matematické, fyzikální a chemické TABULKY a VZORCE pro střední školy“, se kterými se na SŠ často pracuje.



Na straně 91 najdeme potřebný vzorec:



Vzdálenost bodu od přímky

$\lvert Mp\rvert = \dfrac{\lvert am_1 + bm_2 + c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$M[m_1, m_2]$ $p\colon\ ax + by + c = 0$	M, $\lvert Mp\rvert$, p

Pokud jsme vybrali správný vzorec, musíme se nejprve vyrovnat s prvním úskalím. Použitá symbolika v zadání se poněkud liší od symboliky použité v nalezeném vzorci.

V zadání příkladu je příslušný bod označen jako A, ve vzorci jako M. V zadání je přímka označená jako q, ve vzorci jako p. Pro dosazení musíme určit správné parametry:

$$\left.\begin{array}{r} A[-2;2] \\ M[m_1,m_2] \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad m_1 = -2 \ \ ; \ \ m_2 = 2 \ \ ,$$

$$\left.\begin{array}{l} q\colon\ y = x + 1 \\ p\colon\ \ ax + by + c = 0 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad a = -1 \ \ ; \ \ b = 1 \ \ ; \ \ c = -1$$

a správně dosadit:

$$|Mp| = \frac{|am_1+bm_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

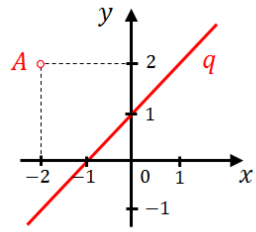
$$|Aq| = \frac{|(-1)(-2)+1\cdot 2+(-1)|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \frac{|2+2-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|3|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2{,}12 \quad .$$

Výsledek stačí jen podtrhnout. Nemusíme vůbec rozumět tomu, co počítáme, musíme jen nalézt správný vzorec a dobře dosadit.

Tento způsob lze doporučit jen pro rychlý rutinní výpočet tomu, kdo se v problematice již trochu vyzná a orientuje. Je však na VŠ zcela devastující, pokud se na něm staví výuka základů matematiky.

2) Řešení pomocí základních nástrojů analytické geometrie

(Postup, který by mne nejvíc potěšil, pokud by ho používala většina studentů. Prokazuje pochopení podstaty problému, schopnost logického a strategického myšlení i zvládnutí základních nástrojů analytické geometrie.)

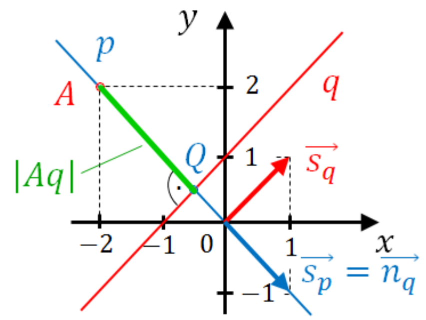


Kvůli přehlednosti ještě znovu zadání úkolu:

Určete vzdálenost bodu $A[-2; 2]$ od přímky $q\colon\ y = x + 1$.

Postup řešení:
Vzdáleností bodu A od přímky q rozumíme jeho kolmou vzdálenost od této přímky. Je dána vzdáleností bodu A a paty kolmice z něj vedené k přímce q . Z bodu A vedeme kolmici k zadané přímce a nalezneme patu kolmice jako průsečík obou přímek. Vzdálenost tohoto průsečíku a bodu A je již hledaná vzdálenost.

Abychom mohli určit kolmici k přímce q, musíme nejprve určit její směrový vektor $\overrightarrow{s_q}$, viz obrázek. Ten je zřejmě:



$$\overrightarrow{s_q} = (1; 1) \quad ,$$

nebo jeho k násobek: $\quad k\,\overrightarrow{s_q} = (k; k) \quad ; \quad k \in R \setminus \{0\}$.

(viz poznámka dále)

Volíme pro jednoduchost (jak bývá obvyklé): $\quad k = 1$.

Její normálový vektor $\overrightarrow{n_q} \perp \overrightarrow{s_q}$ určíme z podmínky:

$$\overrightarrow{n_q} = (n_x; n_y) \quad ; \quad \overrightarrow{s_q} = (1; 1) \quad ,$$

$$\overrightarrow{n_q} \cdot \overrightarrow{s_q} = [n_x\,;\, n_y]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = n_x + n_y = 0 \quad \rightarrow \quad n_x = -n_y \quad .$$

Skalární součin dvou kolmých vektorů je roven nule.

Pro jednoduchost opět volíme: $n_x = 1 \quad \rightarrow \quad n_y = -1 \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{n_q} = (1; -1)$.

Poznámka:

- *Směrový i normálový vektor přímky určuje pouze její směr v souřadném systému. Pokud tyto vektory vynásobíme nenulovým reálným číslem (může být i záporné), zůstávají stále směrovými či normálovými vektory a můžeme s nimi při výpočtu pracovat. Volba jejich délky (absolutní hodnoty, modulu) ovlivňuje jen formu a přehlednost zápisu. Jejich volba není tedy obecně jednoznačná.*
- *Zkuste modifikovat řešení této úlohy a zvolte délky směrového a normálového vektoru libovolně jinak, výsledek bude stejný.*

Hledejme přímku p procházející bodem A, kolmou k zadané přímce q. Její směrový vektor $\overrightarrow{s_p} \perp \overrightarrow{s_q}$ volíme proto:

$$\overrightarrow{s_p} = \overrightarrow{n_q} = (1; -1) \quad .$$

Její parametrický tvar: $p\colon \left.\begin{array}{l} x = -2 + t \\ y = 2 - t \end{array}\right\} t \in R \quad ; \quad A \in p \quad .$

Vyjádření přímky p pro tento případ ve vhodnějším směrnicovém tvaru:

$$\left.\begin{array}{l} x = -2 + t \\ y = 2 - t \end{array}\right\} \; t = x + 2 \qquad \rightarrow \qquad y = 2 - (x + 2) = -x$$

$$p\colon \; y = -x \quad .$$

Jedná se o přímku se směrnicí -1 (klesající pod úhlem $\frac{\pi}{4} \sim 45°$) procházející počátkem souřadného systému (a samozřejmě také bodem A).

Průsečíkem obou přímek p a q je bod Q. Je to hledaná pata kolmice spuštěná z bodu A k přímce q .

Bod Q samozřejmě leží současně na obou přímkách. Jeho souřadnice proto snadno určíme řešením soustavy rovnic, které tyto přímky popisují:

$$\left.\begin{array}{ll} q\colon & y = x + 1 \\ p\colon & y = -x \end{array}\right\} \quad 2y = 1 \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{c} y = 0{,}5 \;\; ; \;\; x = -y = -0{,}5 \\ Q \in p, q \end{array}\right\} \;\rightarrow\; Q[-0{,}5; 0{,}5] \quad .$$

Hledaná vzdálenost bodu A od přímky q je určená vzdáleností bodů A a Q :

$$|Aq| = |AQ| = \sqrt{\left(-2-(-0{,}5)\right)^2 + (2-0{,}5)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2{,}12$$

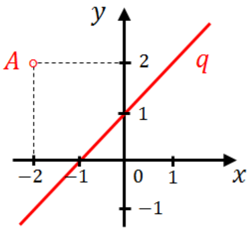
$$|Aq| = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2{,}12$$

Poznámka, doporučení:

- *Velmi užitečné je při řešení matematických úkolů grafické vyjádření situace jednoduchým obrázkem. Je to důležité pro vlastní představu a upřesnění podstaty problému a v neposlední řadě i jako kontrola správnosti jednotlivých kroků řešení.*

3) Využití nástrojů matematické analýzy, určení minima vzdálenosti zadaného bodu A a obecného bodu X ležícího na přímce q

(Velmi jednoduchý a elegantní postup, který však vyžaduje zvládnutí základních nástrojů diferenciálního počtu.)

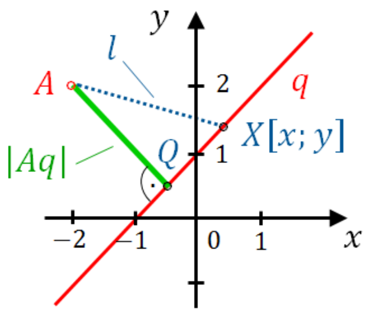


Kvůli přehlednosti ještě znovu zadání úkolu:

Určete vzdálenost bodu $A[-2; 2]$ od přímky q: $y = x + 1$.

Postup řešení:
Budeme uvažovat obecný bod $X[x; y]$ ležící na přímce q. Vyjádříme vzdálenost bodů A a X jako funkci jeho souřadnice x. Nalezneme x takové, aby byla vzdálenost $|AX|$ minimální.

Pokud bod X leží na přímce q, viz obrázek, jsou jeho souřadnice x a y vzájemně vázány funkčním zápisem popisujícím tuto přímku:



$$X \in q \quad \rightarrow \quad y = x + 1 \ .$$

Vzdálenost l mezi body $A[-2; 2]$ a $X[x, y]$ je dána:

$$l = |AX| = \sqrt{[x-(-2)]^2 + (y-2)^2} = [y = x+1] =$$

$$= \sqrt{(x+2)^2 + [(x+1)-2]^2} = \sqrt{2x^2 + 2x + 5} = l(x) \ .$$

Vyjádřili jsme vzdálenost l v závislosti na souřadnici x jako funkci $l(x)$; $x \in R$.
Zbývá jen určit takové x, pro které je $l(x)$ minimální: $l(x) \rightarrow min$.

Pro extrém funkce platí, že její derivace v tomto bodě se rovná nule.

Proto:

$$l'(x) = \frac{dl(x)}{dx} = \left(\sqrt{2x^2+2x+5}\right)' = \frac{1}{2}\frac{4x+2}{\sqrt{2x^2+2x+5}} = 0$$

$$4x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -0{,}5 \quad \rightarrow \quad y = x + 1 = [x = -0{,}5] = 0{,}5$$

$$Q[-0{,}5; 0{,}5] \ .$$

Nulová hodnota derivace odpovídá v obecném případě lokálnímu extrému (minimu nebo maximu), případně inflexnímu bodu funkce. V tomto případě však kvalitu extrému není nutné ověřovat, jedná se zřejmě o jediné a absolutní minimum. Plyne to logicky ze situace a charakteru úlohy.

Hledaná vzdálenost bodu A od přímky q je určená vzdáleností bodů A a Q, kterou jednoduše určíme vyčíslením minimální hodnoty $l(x)$:

$$|Aq| = |AQ| = \min_{x \in R} l(x) =$$

$$= \sqrt{2(-0{,}5)^2 + 2(-0{,}5) + 5} = \sqrt{4{,}5} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2{,}21 \ .$$

Poznámka:

- *Pro výpočet minima bylo zřejmě možné použít s výhodou místo funkce $l(x)$ funkci:*

$$l_1(x) = l^2(x) = 2x^2 + 2x + 5 \quad ,$$

výpočet by se tím ještě poněkud zjednodušil. Nepracovali bychom v tomto případě se vzdáleností $|AX|$, ale s jejím kvadrátem.

Poznámka:

- *Vzdálenost $l(x)$ nám v uvedeném řešení posloužila jako kriteriální funkce, jejíž hodnotu jsme minimalizovali. Vyjádřili jsme ji jako funkci souřadnice x obecného bodu ležícího na zadané přímce. Variantou řešení by samozřejmě bylo možné vyjádřit tuto vzdálenost jako funkci $l(y)$ souřadnice y tohoto bodu, vedoucí ke stejnému výsledku. Zkus!*

Uvedený způsob řešení může posloužit i jako ukázka toho, jak použití nástrojů pokročilejší matematiky zjednodušuje logiku řešení problému a efektivněji vede k výsledku.

Shrnutí:

1) Dosazení do připraveného vzorce

Výhody:

- *Rychlý rutinní výpočet*

Nevýhody:

- *Absence potřeby chápání podstaty problému*
- *Nutnost si trvale pamatovat přesné znění složitého vzorce a podmínek jeho použití*
- *Kritické nebezpečí trvalého návyku špatného postupu řešení bez pochopení souvislostí*

2) Pomocí základních nástrojů analytické geometrie

Výhody:

- *Nutnost použití pouze základních nástrojů analytické geometrie*
- *Rozvoj analytického myšlení a představy abstraktní situace*

Nevýhody:

- *Poněkud pracnější a zdlouhavější řešení*

3) Využití nástrojů matematické analýzy, určení minima vzdálenosti zadaného bodu a obecného bodu ležícího na přímce

Výhody:

- *Elegantní a jednoduché řešení*

Nevýhody:

- *Nutnost zvládnutí techniky diferenciálního počtu*