Nové možnosti rozvoje vzdělávání na Technické univerzitě v Liberci

Specifický cíl A3: Tvorba nových profesně zaměřených studijních programů

NPO_TUL_MSMT-16598/2022

Pravděpodobnost – 1. část

Ing. Vladimíra Hovorková Valentová, Ph.D.

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU

Národní plán obnovy

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Pravděpodobnost

- matematická disciplína, která se zabývá studiem zákonitostí, jimiž se řídí hromadné náhodné jevy;
- vytváří pravděpodobnostní modely, pomocí nichž se snaží postihnout procesy, ovlivněné náhodou.

Náhodné pokusy: procesy, jejichž výsledek nelze předem jednoznačně určit (je nejistý); závisí jednak na daných podmínkách, při kterých je prováděn, jednak na náhodě. Teorie pravděpodobnosti se zabývá pouze náhodnými pokusy, které jsou za stejných podmínek opakovatelné, a u nichž je měnlivost výsledků podstatná a vykazuje určitou zákonitost.

Hromadné náhodné jevy: výsledky opakovatelných náhodných pokusů (symbolika – A, B, C, ...).

- Jev jistý (E): jev, který nastane při každém provedení náhodného pokusu.
- Jev nemožný (ϕ): jev, který za daných podmínek nikdy nenastane, protože neobsahuje žádný možný výsledek náhodného pokusu.

Pravděpodobnost náhodného jevu: pravděpodobnost náhodného jevu A je číslo P(A), které lze interpretovat jako míru možnosti nastoupení náhodného jevu.

! Existují různé definice pravděpodobnosti:

a) Klasická definice pravděpodobnosti: Je založena na předpokladu stejné možnosti nastoupení náhodného jevu ve všech pokusech.

Pravděpodobnost jevu A se rovná podílu případů příznivých nastoupení jevu A a počtu všech případů možných, jsou-li všechny stejně pravděpodobné.

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad ,$$

kde m je počet případů příznivých jevu A,

n je počet případů možných.

b) Statistická definice pravděpodobnosti: Jestliže při rostoucím počtu opakování náhodného pokusu (n) relativní četnost $\frac{m}{n}$ kolísá ve stále užších mezích kolem určitého čísla, můžeme toto číslo považovat za pravděpodobnost jevu A.

$$\text{relativní četnost jevu A} = \frac{m}{n}$$

kde m je počet nastoupení jevu A

n je počet opakování pokusu.

- odhad pravděpodobnosti náhodného jevu na základě výsledků, získaných při mnohonásobném opakování náhodného pokusu;
- tato definice má aposteriorní charakter.

c) Axiomatická teorie pravděpodobnosti: pravděpodobnost je funkce, která každému náhodnému jevu přiřazuje reálné číslo, přičemž musí být splněny následující axiomy.

1) $0 \leq P(A) \leq 1$.
2) $P(E) = 1,\ P(\phi) = 0$.
3) Vztah mezi pravděpodobností jevu A a opačného jevu Ā: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.
4) $P(A_1 \cup A_2 \cup ...) = P(A_1) + P(A_2) + ...$ (pro neslučitelné jevy).
5) Pokud jsou dva jevy rovnocenné, jsou i stejně pravděpodobné.
6) Pokud je jev A částí jevu B, potom $P(A) \leq P(B)$.

Náhodná veličina

Náhodná veličina

- veličina, jejíž hodnota je jednoznačně určena výsledkem náhodného pokusu;
- vlivem náhodných činitelů může nabýt různých hodnot, proto nelze její konkrétní hodnotu před provedením náhodného pokusu jednoznačně určit;
- symbolika X, Y, ... (příp. X_1, X_2, ...);
- příklady náhodných veličin: počet bodů, které padnou na hrací kostce, počet poruch určitého zařízení, doba čekání na obsluhu v určité prodejně, atd.

Zákon rozdělení náhodné veličiny: pravidlo, které každé hodnotě nebo množině hodnot z každého intervalu přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude této hodnoty nebo hodnoty z určitého intervalu. Je to pravděpodobnostní model empirické náhodné veličiny.

Náhodnou veličinu pokládáme za danou, pokud známe všechny její možné hodnoty a pravděpodobnosti výskytu každé z nich.

Popis rozdělení náhodné veličiny

1) Diskrétní náhodná veličina

Distribuční funkce: udává pravděpodobnost, že NV nabude hodnoty menší nebo rovno *x.*

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P(t)$$

Pravděpodobnostní funkce: udává pravděpodobnost, že NV nabude hodnoty rovné *x.*

$$P(x) = P(X = x)$$

! $\sum_{M} P(x) = 1$ Pozn.: M ... prostor hodnot NV X, tj. množina možných hodnot NV X.

2) Spojitá náhodná veličina

Distribuční funkce

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Hustota pravděpodobnosti

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

! $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Charakteristiky náhodných veličin

- číselné hodnoty, jejichž cílem je koncentrovat (zestručnit) popis NV;
- výstižný popis základních vlastností rozdělení NV.

Podle vlastnosti rozdělení, kterou popisují, rozeznáváme:

1. Charakteristiky polohy
2. Charakteristiky variability
3. Charakteristiky šikmosti
4. Charakteristiky špičatosti

1. Charakteristiky polohy

Střední hodnota $E(X)$

= očekávaná hodnota (z lat. expectatis).

a) Diskrétní NV

$$E(X)=\sum_{M} x\cdot P(x)$$

b) Spojitá NV

$$E(X)=\int_{M} x\cdot f(x)dx$$

Modus $\hat{x}$

a) Diskrétní NV

= hodnota NV, která má největší pravděpodobnost výskytu (nejpravděpodobnější hodnota).

$$\hat{x}\ldots\ldots\ldots\ldots\max P(x)$$

b) Spojitá NV

= bod, v němž je hustota pravděpodobnosti maximální, tj. lokální maximum hustoty pravděpodobnosti f(x).

$$\hat{x}\ldots\ldots\ldots\ldots f'(x)=0$$

Kvantily

- používají se především kvantily SPOJITÉ náhodné veličiny.

Hodnota x_p je 100p %-ním kvantilem NV X, jestliže pro ni platí:

$$F(X_p)=P(X\leq x_p)=\int_{-\infty}^{x_p} f(x)dx=p\ .$$

- x_p je hodnota NV X, kterou hodnoty NV nepřekročí s pravděpodobností 100p %.

2. Charakteristiky variability

Rozptyl $D(x)$

a) Diskrétní NV

$$D(X) = \sum_M [x - E(X)]^2 \cdot P(x) = \sum_M x^2 \cdot P(x) - \left[\sum_M x \cdot P(x)\right]^2$$

b) Spojitá NV

$$D(x) = \int_M [x - E(X)]^2 f(x)dx = \int_M x^2 \cdot f(x)dx - \left[\int_M x \cdot f(x)dx\right]^2$$

Směrodatná odchylka $\sigma(X)$

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$