

Nové možnosti rozvoje vzdělávání na Technické univerzitě v Liberci

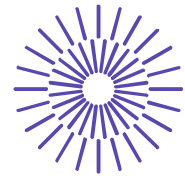
Specifický cíl A3: Tvorba nových profesně zaměřených studijních programů

NPO_TUL_MSMT-16598/2022



Pravděpodobnost – část 2

Ing. Vladimíra Hovorková Valentová, Ph.D.



Některá rozdělení náhodných veličin

Rozdělení náhodné veličiny = pravděpodobnostní model chování náhodné veličiny.

1. Rozdělení diskrétních náhodných veličin

Binomické rozdělení $B_i(n; \pi)$

- NV X je počet výskytů náhodného jevu A v n nezávislých náhodných pokusech, je-li pravděpodobnost nastoupení jevu A ve všech pokusech stejná (π);
- rozdělení má 2 parametry: n ... počet nezávislých náhodných pokusů;
 π ... pravděpodobnost nastoupení sledovaného jevu v 1 pokusu.

Pravděpodobnostní funkce

$$P(x) = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n; 0 < \pi < 1$$

$$= 0 \quad \text{jinak.}$$

$$E(X) = n\pi$$

$$D(X) = n\pi(1 - \pi).$$

Např.: NV X je počet „šestek“, které padnou při deseti hodech kostkou.

Poissonovo rozdělení $Po(\lambda)$

- NV X je počet výskytů náhodného jevu A v určitém časovém intervalu délky t (tzn. za jednotku času), v jednotce plochy nebo objemu (v prostorové jednotce);
- Rozdělení má 1 parametr: λ ... střední hodnota rozdělení.

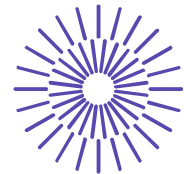
Pravděpodobnostní funkce

$$P(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots; \lambda > 0$$

$$= 0 \quad \text{jinak.}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$D(X) = \lambda.$$



Např.: NV X je počet poruch stroje za směnu, počet telefonních hovorů za hodinu, počet vad na m^2 koberce.

Aproximace Binomického rozdělení rozdělením Poissonovým

Podmínky: Počet pokusů n musí být dostatečně velký (alespoň $n > 30$) a pravděpodobnost π velmi malá (alespoň $\pi \leq 0,1$).

Při aproximaci udává $P(x)$ přibližnou pravděpodobnost, že ve velkém počtu n nezávislých náhodných pokusů se sledovaný jev A vyskytne x -krát, je-li pravděpodobnost výskytu jevu v jednom pokusu velmi malá.

Např.: NV X je počet vadných výrobků ve velké sérii, je-li pravděpodobnost výroby zmetku velmi malá.

Hypergeometrické rozdělení $H(N; M; n)$

- Používá se v případě závislých pokusů, tzn. při výběru bez vracení.
- NV X je počet vybraných prvků se sledovanou vlastností při závislých pokusech.
- má 3 parametry: N ... rozsah souboru, z něhož vybíráme;

M ... počet prvků v základním souboru, které mají sledovanou vlastnost;

n ... rozsah výběru (= počet závislých pokusů).

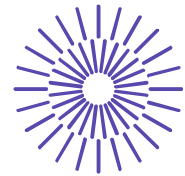
Pravděpodobnostní funkce

$$P(x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$$

$$D(X) = n \cdot \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Použití: Např. při kontrole jakosti u malého počtu výrobků nebo v případě, kdy kontrola má ráz destrukční zkoušky (výrobek je zničen).



2. Rozdělení spojitých náhodných veličin

Exponenciální rozdělení $E(A; \delta)$

- NV X je doba čekání do nastoupení sledovaného jevu, může-li tento jev nastat v kterémkoli okamžiku.
- Parametr A = počáteční doba, během které sledovaný jev nastat nemůže.

Hustota pravděpodobnosti:
$$f(x) = \frac{1}{\delta} \cdot e^{-(x-A)/\delta}, \quad x > A, \delta > 0, A \geq 0$$

$= 0$ jinak.

Distribuční funkce:
$$F(x) = 1 - e^{-(x-A)/\delta}, \quad x > A.$$

$$E(X) = A + \delta$$

$$D(X) = \delta^2.$$

Např.: NV X je doba čekání zákazníka na obsluhu v prodejně, doba realizace dvou po sobě jdoucích telefonních hovorů, doba životnosti zařízení, u nichž dochází k poruše z náhodných příčin (ne v důsledku opotřebení).

Použití: V teorii spolehlivosti a životnosti, v teorii hromadné obsluhy (tzv. teorii front), v teorii obnovy.

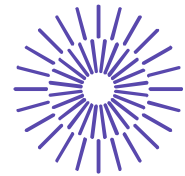
Normální rozdělení $N(\mu; \sigma^2)$

- Je vhodné tam, kde kolísání NV je způsobeno velkým počtem nepatrných a vzájemně nezávislých vlivů.
- Klasickým typem veličin, které se řídí tímto rozdělením, jsou náhodné chyby.
- Pomocí $N(\mu; \sigma^2)$ lze za jistých podmínek aproximovat řadu jiných rozdělení, a to i nespojitých.

Hustota pravděpodobnosti :
$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$-\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$$

Distribuční funkce :
$$F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad -\infty < x < \infty.$$



$$E(X) = \mu$$

$$D(X) = \sigma^2.$$

- Hustota pravděpodobnosti je zvonovitá křivka, symetrická podle $x = \mu$ a její tvar závisí na parametru σ^2 .
- Rozdělení N je jednovrcholové, vrchol je v bodě $x = \mu$.
- $\mu = \text{modus} = \text{medián}$.

Normování NV s normálním rozdělením: Výpočet distribuční funkce normálního rozdělení je obtížný, navíc by bylo nutno počítat hodnotu distribuční funkce pro každý speciální případ (tj. pro různá x , μ , σ^2), proto se z důvodů usnadnění výpočtu transformuje náhodná veličina X , která má normální rozdělení s parametry μ a σ^2 , na *normovanou veličinu* U , která má **normované normální rozdělení**.

Normované normální rozdělení $N(0; 1)$

- Původní NV X , která má $N(\mu; \sigma^2)$ normujeme, tzn. transformujeme na NV U , která má $N(0, 1)$.
- Je tak zavedena normovaná veličina U , která má nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl.
- Hodnoty distribuční funkce a kvantilů $N(0, 1)$ je možno tabelovat.

$$U = \frac{x - \mu}{\sigma}, \quad E(U) = 0, \quad D(U) = 1.$$

Vztah pro výpočet $F(x)$:
$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(u)$$

Hustota pravděpodobnosti:
$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad \text{pro } -\infty < u < \infty$$

Distribuční funkce:
$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

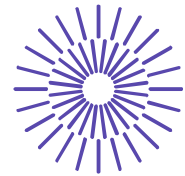
Tabulky normovaného normálního rozdělení

Vzhledem k symetrii $N(0, 1)$ podle bodu $\mu = 0$ platí:

$$\varphi(-u) = \varphi(u)$$

$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$$

$$u_p = -u_{1-p}.$$



Z důvodu symetrie $N(0, 1)$ kolem 0 jsou tabelovány hodnoty $\Phi(u)$ pouze pro $u \geq 0$ a kvantily pouze pro $P \geq 0,5$.

Rozdělení některých funkcí náhodných veličin

- Mají zvláštní význam pro řešení některých matematicko-statistických úloh (viz další výklad).
- Stejně značení pro náhodné veličiny i jejich hodnoty.
- V praxi se používají především kvantily těchto rozdělení, jsou tabelovány.

Rozdělení χ^2 $\chi^2(v)$

- NV χ^2 je součtem v nezávislých NV s normovaným normálním rozdělením.
- Rozdělení má 1 parametr: v ... počet stupňů volnosti.
- Kvantily jsou tabelovány pro $v = 1, 2, \dots, 30$ a pro vybrané pravděpodobnosti P .

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^v U_i^2 = U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_v^2$$

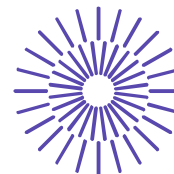
- Kvantily rozdělení χ^2 jsou tabelovány pro různá p a v . Pokud $v > 30$, lze kvantily χ_p^2 stanovit pomocí kvantilů normovaného normálního rozdělení podle přibližného vztahu:

$$\chi_p^2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2v-1} + u_p \right)^2$$

Rozdělení Studentovo (t) $t(v)$

- NV t je podílem dvou nezávislých NV: NV U s rozdělením $N(0; 1)$ a NV χ^2 s rozdělením $\chi^2(v)$.
- Rozdělení má 1 parametr: v ... počet stupňů volnosti.
- Kvantily jsou tabelovány pro $v = 1, 2, \dots, 30$ a pro vybrané pravděpodobnosti P .
- Používá se především pro výběry malého rozsahu ($n < 30$).
- Rozdělení je symetrické podle bodu $t = 0$, pro kvantily proto platí vztah $t_p = -t_{1-p}$.

$$t = \frac{U}{\sqrt{\frac{\chi^2}{v}}}$$



Rozdělení Fisherovo-Snedecorovo $F(v_1, v_2)$

- NV F je podílem dvou nezávislých NV: NV χ_1^2 s rozdělením $\chi^2(v_1)$ a NV χ_2^2 s rozdělením $\chi^2(v_2)$.
- Má 2 parametry: v_1 ... počet stupňů volnosti NV χ_1^2 (v čitateli);

v_2 ... počet stupňů volnosti NV χ_2^2 (ve jmenovateli).

$$F = \frac{\frac{\chi_1^2}{v_1}}{\frac{\chi_2^2}{v_2}}$$

- Kvantily rozdělení F jsou tabelovány pro danou pravděpodobnost $p > 0,5$ a stupně volnosti v_1 a v_2 . Pro $p < 0,5$ se kvantily F_p vypočítají podle vztahu:

$$F_p(v_1, v_2) = \frac{1}{F_{1-p}(v_2, v_1)}$$