TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Nové možnosti rozvoje vzdělávání na Technické univerzitě v Liberci

Specifický cíl A3: Tvorba nových profesně zaměřených studijních programů

NPO_TUL_MSMT-16598/2022

Pravděpodobnost – část 2

Ing. Vladimíra Hovorková Valentová, Ph.D.

Financováno Evropskou unií
NextGenerationEU

Národní plán obnovy

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Některá rozdělení náhodných veličin

Rozdělení náhodné veličiny = pravděpodobnostní model chování náhodné veličiny.

1. Rozdělení diskrétních náhodných veličin

Binomické rozdělení Bi (n; π)

- NV X je počet výskytů náhodného jevu A v *n* nezávislých náhodných pokusech, je-li pravděpodobnost nastoupení jevu A ve všech pokusech stejná (π);
- rozdělení má 2 parametry: *n* ... počet nezávislých náhodných pokusů;
  π ... pravděpodobnost nastoupení sledovaného jevu v 1 pokusu.

Pravděpodobnostní funkce

$$P(x) = \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x} \quad , \quad x = 0, 1, ..., n; \ 0 < \pi < 1$$

$$= 0 \qquad \text{jinak.}$$

$$E(X) = n\pi$$

$$D(X) = n\pi(1-\pi).$$

Např.: NV X je počet „šestek“, které padnou při deseti hodech kostkou.

Poissonovo rozdělení Po (λ)

- NV X je počet výskytů náhodného jevu A v určitém časovém intervalu délky *t* (tzn. za jednotku času), v jednotce plochy nebo objemu (v prostorové jednotce);
- Rozdělení má 1 parametr : λ ... střední hodnota rozdělení.

Pravděpodobnostní funkce

$$P(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \quad , \quad x = 0, 1, 2, ...; \ \lambda > 0$$

$$= 0 \qquad \text{jinak.}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$D(X) = \lambda .$$

Např.: NV X je počet poruch stroje za směnu, počet telefonních hovorů za hodinu, počet vad na m^2 koberce.

Aproximace Binomického rozdělení rozdělením Poissonovým

Podmínky: Počet pokusů n musí být dostatečně velký (alespoň $n > 30$) a pravděpodobnost π velmi malá (alespoň $\pi \leq 0{,}1$).

Při aproximaci udává P(x) přibližnou pravděpodobnost, že ve velkém počtu n nezávislých náhodných pokusů se sledovaný jev A vyskytne x-krát, je-li pravděpodobnost výskytu jevu v jednom pokusu velmi malá.

Např.: NV X je počet vadných výrobků ve velké sérii, je-li pravděpodobnost výroby zmetku velmi malá.

Hypergeometrické rozdělení H (N; M; n)

- Používá se v případě závislých pokusů, tzn. při výběru bez vracení.
- NV X je počet vybraných prvků se sledovanou vlastností při závislých pokusech.
- má 3 parametry: N ... rozsah souboru, z něhož vybíráme;

  M ... počet prvků v základním souboru, které mají sledovanou vlastnost;

  n ... rozsah výběru (= počet závislých pokusů).

Pravděpodobnostní funkce

$$P(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$$

$$D(X) = n \cdot \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}.$$

Použití: Např. při kontrole jakosti u malého počtu výrobků nebo v případě, kdy kontrola má ráz destrukční zkoušky (výrobek je zničen).

2. Rozdělení spojitých náhodných veličin

Exponenciální rozdělení E (A; δ)

- NV X je doba čekání do nastoupení sledovaného jevu, může-li tento jev nastat v kterémkoli okamžiku.
- Parametr A = počáteční doba, během které sledovaný jev nastat nemůže.

Hustota pravděpodobnosti: $f(x) = \frac{1}{\delta} \cdot e^{-(x-A)/\delta}$, x > A , δ> 0, A ≥ 0

$= 0$ jinak.

Distribuční funkce: $F(x) = 1 - e^{-(x-A)/\delta}$, $x > A$.

$E(X) = A + \delta$

$D(X) = \delta^2$.

Např.: NV X je doba čekání zákazníka na obsluhu v prodejně, doba realizace dvou po sobě jdoucích telefonních hovorů, doba životnosti zařízení, u nichž dochází k poruše z náhodných příčin (ne v důsledku opotřebení).

Použití: V teorii spolehlivosti a životnosti, v teorii hromadné obsluhy (tzv. teorii front), v teorii obnovy.

Normální rozdělení N (μ; σ²)

- Je vhodné tam, kde kolísání NV je způsobeno velkým počtem nepatrných a vzájemně nezávislých vlivů.
- Klasickým typem veličin, které se řídí tímto rozdělením, jsou náhodné chyby.
- Pomocí N (μ; σ²) lze za jistých podmínek aproximovat řadu jiných rozdělení, a to i nespojitých.

Hustota pravděpodobnosti : $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$,

$-\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$

Distribuční funkce : $F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$, $-\infty < x < \infty$.

$E(X) = \mu$

$D(X) = \sigma^2$.

- Hustota pravděpodobnosti je zvonovitá křivka, symetrická podle $x = \mu$ a její tvar závisí na parametru σ^2.
- Rozdělení N je jednovrcholové, vrchol je v bodě $x = \mu$.
- μ = *modus* = *medián.*

Normování NV s normálním rozdělením: Výpočet distribuční funkce normálního rozdělení je obtížný, navíc by bylo nutno počítat hodnotu distribuční funkce pro každý speciální případ (tj. pro různá x, μ, σ^2), proto se z důvodů usnadnění výpočtu transformuje náhodná veličina X, která má normální rozdělení s parametry μ a σ^2, na *normovanou veličinu U*, která má **normované normální rozdělení**.

Normované normální rozdělení N (0; 1)

- Původní NV X, která má N (μ; σ^2) normujeme, tzn. transformujeme na NV U, která má N (0, 1).
- Je tak zavedena normovaná veličina U, která má nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl.
- Hodnoty distribuční funkce a kvantilů N (0, 1) je možno tabelovat.

$U = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$, $\quad E(U) = 0$, $\quad D(U) = 1$.

Vztah pro výpočet F(x): $\quad F(x) = \Phi\left(\dfrac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(u)$

Hustota pravděpodobnosti: $\quad \varphi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$, pro $-\infty < u < \infty$

Distribuční funkce: $\quad \Phi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Tabulky normovaného normálního rozdělení

Vzhledem k symetrii N (0, 1) podle bodu $\mu = 0$ platí:

$\varphi(-u) = \varphi(u)$

$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$

$u_P = -u_{1-P}$.

Z důvodu symetrie N (0, 1) kolem 0 jsou tabelovány hodnoty $\Phi(u)$ pouze pro u $\geq$ 0 a kvantily pouze pro $P \geq 0{,}5$.

Rozdělení některých funkcí náhodných veličin

- Mají zvláštní význam pro řešení některých matematicko-statistických úloh (viz další výklad).
- Stejné značení pro náhodné veličiny i jejich hodnoty.
- V praxi se používají především kvantily těchto rozdělení, jsou tabelovány.

Rozdělení χ^2 $\chi^2(\nu)$

- NV χ^2 je součtem v nezávislých NV s normovaným normálním rozdělením.
- Rozdělení má 1 parametr: v ... počet stupňů volnosti.
- Kvantily jsou tabelovány pro v = 1, 2, ... , 30 a pro vybrané pravděpodobnosti P.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\nu} U_i^2 = U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_\nu^2$$

- Kvantily rozdělení χ^2 jsou tabelovány pro různá p a v. Pokud v > 30, lze kvantily χ_p^2 stanovit pomocí kvantilů normovaného normálního rozdělení podle přibližného vztahu:

$$\chi_p^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2\nu - 1} + u_p\right)^2$$

Rozdělení Studentovo (t) $t(\nu)$

- NV t je podílem dvou nezávislých NV: NV U s rozdělením N (0; 1) a NV χ^2 s rozdělením $\chi^2(\nu)$.
- Rozdělení má 1 parametr: v ... počet stupňů volnosti.
- Kvantily jsou tabelovány pro v = 1, 2, ... , 30 a pro vybrané pravděpodobnosti P.
- Používá se především pro výběry malého rozsahu (n < 30).
- Rozdělení je symetrické podle bodu t = 0, pro kvantily proto platí vztah $t_p = -t_{1-p}$.

$$t = \frac{U}{\sqrt{\frac{\chi^2}{\nu}}}$$

Rozdělení Fisherovo-Snedecorovo $F(\nu_1, \nu_2)$

- NV F je podílem dvou nezávislých NV: NV χ_1^2 s rozdělením $\chi^2(\nu_1)$ a NV χ_2^2 s rozdělením $\chi^2(\nu_2)$.
- Má 2 parametry: ν_1 ... počet stupňů volnosti NV χ_1^2 (v čitateli);

  ν_2 ... počet stupňů volnosti NV χ_2^2 (ve jmenovateli).

$$F = \frac{\frac{\chi_1^2}{\nu_1}}{\frac{\chi_2^2}{\nu_2}}$$

- Kvantily rozdělení F jsou tabelovány pro danou pravděpodobnost p>0,5 a stupně volnosti ν_1 a ν_2. Pro p<0,5 se kvantily F_p vypočítají podle vztahu:

$$F_p(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{F_{1-p}(\nu_2, \nu_1)}$$