Jakákoliv distribuce a nakládání s textem bez písemného souhlasu autora je nepřípustné.
©Jiří Břehovský 2020

Přirozená čísla N – kardinální číslo, ordinální číslo, Peanova množina, vlastnosti přirozených čísel, vytváření pojmu přirozené číslo, numerace na ZŠ

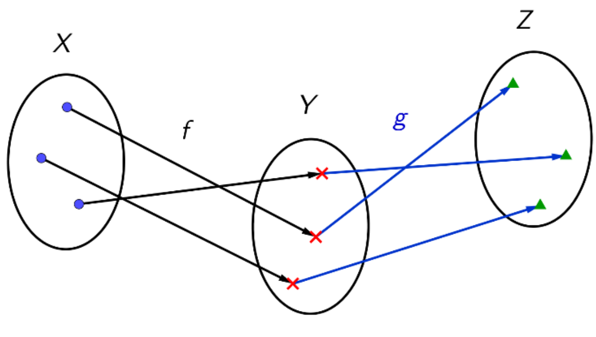
Přirozená čísla jsou nejdůležitější abstrakcí, kterou lidstvo vynalezlo. Udávají počet nějakých objektů (například číslo 5 udává, že jsme našli 5 jahod, číslo 365 udává počet dní v roce 2019, číslo 3600 počet sekund v jedné hodině, číslo 7 udává počet dní v týdnu, číslo 7 také udává počet barev spektra (červená, oranžová, žlutá, zelená, tyrkysová, modrá, fialová).

Množinu přirozených čísel můžeme zkonstruovat pomocí kardinálních a ordinálních čísel nebo ji vybudovat axiomaticky.

Kardinální čísla
Mezi množinami dní v týdnu nebo počtu spektrálních barev existuje vzájemně jednoznačné zobrazení. Obecně lze říci, všem dalším množinám, ekvivalentním s těmito množinami, přiřadíme jedno konkrétní kardinální číslo. Pro vyjádření kardinálních čísel konečných množin používáme základní číslovky. V tomto případě není mezi přirozenými čísly a čísly kardinálními rozdíl.
V neprázdném systému množin definujme relaci $\sim$ takto, $X \sim Y$ právě tehdy když existuje prosté zobrazení $f: X \overset{na}{\rightarrow} Y$

Vlastnosti relace $\sim$:

- **reflexivní**: $(\forall X)\ X \sim X$, každou množinu mohu zobrazit samu na sebe (identické zobrazení),
- **symetrická**: $(\forall X, Y)\ X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$, Protože je f prosté, tak k němu existuje i inverzní zobrazení f^{-1},
- **tranzitivní**: $(\forall X, Y, Z)\ X \sim Y \wedge Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$, mezi množinami X, Y a Y, Z existují po řadě prostá zobrazení f a g. K nalezení zobrazení h mezi množinami X, Z stačí zobrazení f a g sloučit $h = f \circ g$.

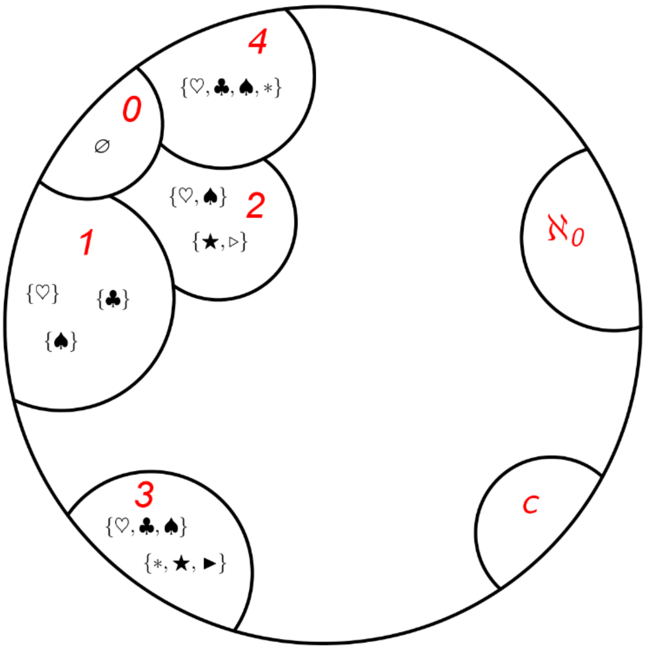


Relace $\sim$ je tedy relace typu **ekvivalence**. Ta způsobí rozklad vybrané množiny množin (nemůžeme říkat množiny všech množin, protože to způsobuje rozpory) na bloky navzájem ekvivalentních množin, tj. množin, které mají stejný počet prvků. Uvažujeme-li nejprve konečné množiny, pak každému takovému bloku přiřadíme jedno **kardinální číslo**.

Jakákoliv distribuce a nakládání s textem bez písemného souhlasu autora je nepřípustné.
©Jiří Břehovský 2020

Těmto blokům tedy říkáme kardinální čísla. Jedná se tedy o jisté zobecnění pojmu přirozené číslo, kde každé konečné množině odpovídá příslušné přirozené číslo.

V případě nekonečných množin je tomu jinak. Množině všech přirozených $\boldsymbol{N}$ *čísel a všem množinám s touto množinou ekvivalentní přiřadíme nové kardinální číslo, které označujeme symbolem* $\aleph_0$ *(alef nula). To už není žádné z přirozených čísel a tímto symbolem označujeme takzvané spočetné množiny.*
George Cantor dokázal takzvaným diagonálním důkazem, že množina $\boldsymbol{R}$ *všech reálných čísel je nespočetná (což znamená, že reálných čísel je více než čísel přirozených). Říkáme, že množina reálných čísel má mohutnost kontinua a značíme c.*



Kardinální čísla můžeme značit několika způsoby: $cardX$, $\bar{X}$, nebo $|X|$. Tyto zápisy vždy čteme jako kardinální číslo množiny X. V dalším textu budeme používat třetí způsob $|X|$.
Vlastnosti kardinálních čísel

- **rovnost**:

$$|X| = |Y| \Leftrightarrow X \sim Y$$

- **nerovnost**:

$$|X| < |Y| \Leftrightarrow \exists Y_1 \subset Y \wedge Y_1 \sim X \wedge X \nsim Y$$

kde Y_1 je tedy vlastní podmnožina množiny Y.

Def (**Konečná množina**) Množina X je konečná množina právě tehdy, když neexistuje její vlastní podmnožina, která je s ní ekvivalentní.

Operace s kardinálními čísly:

- **sčítání**:

$$X \cap Y = \emptyset \Rightarrow |X| + |Y| = |X \cup Y|$$

Určeno pro studenty předmětu PEA_1 FP TUL
Jakákoliv distribuce a nakládání s textem bez písemného souhlasu autora je nepřípustné.
©Jiří Břehovský 2020

- **násobení**:

$$X \cap Y = \emptyset \Rightarrow |X| \cdot |Y| = |X \times Y|$$

Vlastnosti sčítání a násobení kardinálních čísel (červeně je označeno zdůvodnění)

$$(\forall X, Y);\ |X| + |Y| = |Y| + |X|$$

$$X \cup Y = Y \cup X$$

$$(\forall X, Y, Z); (|X| + |Y|) + |Z| = |X| + (|Y| + |Z|)$$

$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$$

$$(\forall X); 0 + |X| = |X|$$

$$\emptyset \cup X = X$$

$$(\forall X, Y);\ |X| \cdot |Y| = |Y| \cdot |X|$$

$$X \times Y \sim Y \times X$$

$$(\forall X, Y, Z); (|X| \cdot |Y|) \cdot |Z| = |X| \cdot (|Y| \cdot |Z|)$$

$$(X \times Y) \times Z \sim X \times (Y \times Z)$$

$$(\forall X, Y, Z); |X| \cdot (|Y| + |Z|) = |X| \cdot |Y| + |X| \cdot |Z|$$

$$X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$$

Přirozená čísla jsou kardinální čísla konečných množin.