**Nové možnosti rozvoje vzdělávání na Technické univerzitě v Liberci**

**Specifický cíl A3: Tvorba nových profesně zaměřených studijních programů**

**NPO\_TUL\_MSMT-16598/2022**



**Lineární programování**

Ing. Natalie Pelloneová, Ph.D.

1. Co je lineární programování?

**Lineární programování** je jednoduchá technika, při které znázorňujeme složité vztahy pomocí lineárních funkcí a následně hledáme optimální body. Důležitým slovem v předchozí větě je znázornění. Skutečné vztahy mohou být mnohem složitější - můžeme je však zjednodušit na lineární vztahy.

**Lineární programování** je proces, který se používá k určení nejlepšího výsledku lineární funkce. Je to nejlepší metoda pro provádění lineární optimalizace na základě několika jednoduchých předpokladů. **Lineární funkce se nazývá účelová funkce**. Vztahy v reálném světě mohou být velmi komplikované. Pomocí lineárního programování však lze takové vztahy znázornit, a tím usnadnit jejich analýzu.

**Lineární programování** je matematický pojem, který se používá k nalezení optimálního řešení lineární funkce. Tato metoda využívá jednoduché předpoklady pro optimalizaci dané funkce. Lineární programování má obrovské uplatnění v reálném světě a používá se k řešení různých typů problémů.

Lineární programování se používá **v různých odvětvích**, například v lodním průmyslu, výrobním průmyslu, dopravě, telekomunikacích a dalších. Pojem "lineární programování" se skládá ze dvou slov lineární a programování, slovo lineární vypovídá o vztahu mezi různými typy proměnných stupně jedna použitých v problému a slovo programování nám říká postup řešení těchto problémů krok za krokem.

Lineární programování pomáhá najít optimální řešení daného problému, přičemž optimální řešení je takové řešení, které je nejlepším možným výsledkem daného problému. Zjednodušeně řečeno, je to metoda, jak zjistit, jak něco udělat co nejlépe s danými omezenými zdroji, které je třeba udělat tak, aby bylo optimálně využito zdrojů k dosažení nejlepšího možného výsledku v daném cíli: jako jsou nejmenší náklady, nejvyšší marže nebo nejkratší čas.

Problém lineárního programování má dvě základní části:

* **První část:** Je to účelová funkce, která popisuje primární účel tvorby maximalizovat nějaký výnos nebo minimalizovat nějaký.
* **Druhá část:** Je to soustava konstant, Je to soustava rovností nebo nerovností, které popisují podmínku nebo omezení, za kterých má být optimalizace provedena.
1. Typy problémů lineárního programování

V zásadě existuje mnoho různých problémů lineárního programování, ale budeme zabývat třemi hlavními problémy lineárního programování.

**Výrobní problémy**

Výrobní problémy jsou problémy, které se zabývají počtem jednotek, které by se měly vyrobit nebo prodat, aby se maximalizoval zisk, když každý výrobek vyžaduje pevně stanovenou pracovní sílu, strojní hodiny a suroviny.

**Dietní problémy**

Slouží k výpočtu počtu různých druhů složek, které mají být zahrnuty do stravy, aby se dosáhlo minimálních nákladů, s výhradou dostupnosti potravin a jejich cen.

**Dopravní problémy**

Používá se ke stanovení dopravního plánu, aby se našel nejlevnější způsob přepravy výrobku z provozů / továren umístěných na různých místech na různé trhy.

1. Vzorec pro lineární programování

Problém lineárního programování se skládá z:

* Rozhodovací proměnné.
* Cílové = účelové funkce.
* Omezení.
* Nezáporných omezení.

**Rozhodovací proměnné** jsou proměnné x a y, které rozhodují o výstupu problému lineárního programování a představují konečné řešení.

**Účelová funkce**, obvykle reprezentovaná symbolem Z, je lineární funkce, kterou je třeba optimalizovat podle dané podmínky, aby bylo dosaženo konečného řešení.

**Omezení** kladená na rozhodovací proměnné, která omezují jejich hodnoty, se nazývají omezení.

Nyní je obecný vzorec problému lineárního programování následující,

Cílová funkce: *Z = ax + by (1)*

Omezení: *cx + dy ≥ e, px + qy ≤ r (2)*

Nezáporná omezení: *x ≥ 0, y ≥ 0 (3)*

Ve výše uvedené podmínce jsou x a y rozhodovací proměnné.

1. Jak řešit úlohy lineárního programování?

Před řešením úloh lineárního programování musíme nejprve formulovat úlohy podle standardních parametrů. Kroky pro řešení problémů lineárního programování jsou následující,

1. Krok 1: Označte v problému rozhodovací proměnné.
2. Krok 2: Sestavte účelovou funkci problému a zkontrolujte, zda je třeba funkci minimalizovat nebo maximalizovat.
3. Krok 3: Zapište všechna omezení lineárních problémů.
4. Krok 4: Zajistěte nezáporná omezení rozhodovacích proměnných.
5. Krok 5: Nyní vyřešte problém lineárního programování libovolnou metodou, obecně používáme buď simplexovou, nebo grafickou metodu.
6. Metody lineárního programování

Pro řešení problémů lineárního programování používáme různé metody. Nejčastěji se používají dvě metody,

* Simplexová metoda
* Grafická metoda

**Simplexní metoda lineárního programování**

Jednou z nejběžnějších metod řešení problému lineárního programování je simplexová metoda. Při této metodě opakujeme určitou podmínku "n" krát, dokud nedosáhneme optimálního řešení.

Kroky potřebné k řešení problémů lineárního programování pomocí simplexové metody jsou následující,

1. Krok 1: Formulujte problémy lineárního programování na základě zadaných omezení.
2. Krok 2: Převedeme všechny zadané nerovnosti na rovnice nebo rovnosti problémů lineárního programování tak, že ke každé nerovnosti, kde je to zapotřebí, přidáme proměnnou slack.
3. Krok 3: Sestavte počáteční simplexovou tabulku. Tak, že každou rovnici s omezením znázorníte v řádku a do spodního řádku zapíšete účelovou funkci. Takto získaná tabulka se nazývá simplexová tabulka.
4. Krok 4: Určete největší zápornou položku ve spodním řádku sloupec prvku s největší zápornou položkou se nazývá pivotní sloupec.
5. Krok 5: Vydělte položky nejpravějšího sloupce položkami příslušného pivotního sloupce s vyloučením položek nejspodnějšího řádku. Nyní se řádek obsahující nejmenší položku nazývá pivotní řádek. Prvek pivot získáme průsečíkem pivotního řádku a pivotního sloupce.
6. Krok 6: Pomocí maticové operace a s využitím pivotního prvku nastavíme všechny položky v pivotním sloupci na nulu.
7. Krok 7: Zkontrolujte, zda jsou v nejspodnějším řádku nezáporné položky, pokud v dolním řádku nejsou žádné záporné položky, ukončete proces, jinak začněte proces znovu od kroku 4.
8. Krok 8: Takto získaná konečná simplexová tabulka poskytuje řešení našeho problému.

**Grafická metoda lineárního programování**

Grafická metoda je jiná metoda než simplexová metoda, která se používá k řešení problémů lineárního programování. Jak již název napovídá, tato metoda využívá k řešení daných problémů lineárního programování grafy. Jedná se o nejlepší metodu řešení problémů lineárního programování, která vyžaduje méně úsilí než simplexová metoda.

Při použití této metody vykreslujeme všechny nerovnosti, které podléhají omezením v daných problémech lineárního programování. Jakmile jsou všechny nerovnosti daného LPP vyneseny do grafu XY, společná oblast všech nerovností dává optimální řešení. Vypočítají se všechny rohové body proveditelné oblasti a vypočítá se hodnota účelové funkce ve všech těchto bodech a porovnáním těchto hodnot se získá optimální řešení LPP.

1. Aplikace lineárního programování

Lineární programování se uplatňuje v různých oblastech. Používá se k nalezení minimálních nákladů procesu, pokud jsou dána všechna omezení problémů. Používá se k optimalizaci dopravních nákladů vozidla atd. Různé aplikace lineárního programování jsou

**Strojírenský průmysl**

Strojírenský průmysl používá lineární programování k řešení konstrukčních a výrobních problémů a k získání maximálního výstupu z dané podmínky.

**Výrobní odvětví**

Výrobní odvětví používají lineární programování k maximalizaci zisku společností a ke snížení výrobních nákladů.

**Energetický průmysl**

Energetické společnosti používají lineární programování k optimalizaci svého výrobního výstupu.

**Dopravní odvětví**

Lineární programování se používá také v dopravních odvětvích k nalezení cesty k minimalizaci nákladů na dopravu.

1. Význam lineárního programování

Lineární programování má obrovský význam v různých průmyslových odvětvích, maximalizuje výstupní hodnotu a zároveň minimalizuje vstupní hodnoty podle různých omezení.

LP je velmi dobře použitelné, když máme při řešení problému více podmínek a musíme optimalizovat výstup problému, tj. buď musíme najít minimální, nebo maximální hodnotu podle dané podmínky.

1. Typy úloh lineárního programování včetně příkladů

**Dietní problém**

Jak již název sám o sobě napovídá, tyto problémy se týkají optimalizace příjmu určitých druhů potravin bohatých na určité typy živin, které by mohly pomoci dodržovat určitý dietní plán. Přesněji řečeno, cílem dietního problému je vybrat soubor potravin, které uspokojí soubor denních nutričních požadavků s minimálními náklady.

**Omezení** - specifikované nutriční požadavky, kterými může být konkrétní příjem kalorií nebo množství cukru či cholesterolu ve stravě.

**Cílová funkce** - náklady na příjem potravin.

**Příklad č. 1:** Vedoucí kuchyně v nemocnici musí rozhodnout o skladbě jídel pro pacienty. Podle pokynů k dietě musí každý pacient dostat minimálně:

* jeden gram bílkovin,
* jeden gram tuku,
* tři gramy sacharidů,

Další pokyny zmiňují, že obsah sacharidů u žádného pacienta by náhodou neměl překročit 6 gramů. Dostupnost bílkovin, tuků a sacharidů v g na kg kuřecího masa, rýže a chleba; spolu s tržními cenami každé z těchto potravin je uvedena níže:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Bílkoviny | Tuky | Sacharidy | Cena/kg |
| Kuřecí maso | 10 | 2 | 1 | 30 |
| Rýže | 2 | 1 | 15 | 5 |
| Chléb | 2 | 0 | 10 | 4 |

Sestavte vhodnou skladbu stravy tak, abyste minimalizovali náklady při dodržení daných omezení a za předpokladu, že v daný den bude hospitalizováno 100 pacientů.

**Výrobní problém**

Tento problém se týká optimalizace rychlosti výroby nebo čistého zisku vyráběných produktů, který může být funkcí dostupného pracovního prostoru, počtu pracovníků, strojových hodin, použitého obalového materiálu, potřebných surovin, tržní hodnoty výrobku atd. Ty nacházejí uplatnění v průmyslových odvětvích, a tedy i v předpovědi možného navýšení kapitálu podniku v průběhu let.

**Příklad č. 2:** Společnost vyrábí dva výrobky (X a Y) na dvou strojích (A a B). Každá vyrobená jednotka výrobku X vyžaduje 50 minut času na zpracování na stroji A a 30 minut času na zpracování na stroji B. Každá vyrobená jednotka výrobku Y vyžaduje 24 minut času na zpracování na stroji A a 33 minut času na zpracování na stroji B.

Na začátku běžného týdne je na skladě 30 jednotek výrobku X a 90 jednotek výrobku Y. Předpokládaná doba zpracování na stroji „A“ je 40 hodin a na stroji „B“ 35 hodin.

Předpokládaná poptávka po stroji X v běžném týdnu je 75 jednotek a po stroji Y 95 jednotek. Politikou společnosti je maximalizovat kombinovaný součet jednotek X a jednotek Y na skladě na konci týdne.

Formulujte problém rozhodování o tom, kolik každého výrobku vyrobit v běžném týdnu, jako lineární program.

**Přiřazovací problém**

Problém přiřazení lze chápat jako dopravní problém, kdy počet dodavatelů je roven počtu spotřebitelů (čtvercová matice sazeb je řádu n), kapacita všech dodavatelů a požadavky všech spotřebitelů je rovna jedné, přičemž se hledá celočíselné řešení.

**Příklad č. 3:** Fiktivní letecká společnost disponuje čtyřmi nákladními letadly, která se nachází v hangárech čtyřech různých evropských letišť. Náklad je potřeba dopravit k odběratelům do čtyř jiných evropských měst. Přepravované zboží je identické a každé letadlo tedy může letět do jakékoliv cílové destinace.

Přehled aktuální polohy jednotlivých letadel, odběratelských míst a vzdušné vzdálenosti mezi nimi, je zobrazen v následující tabulce. Číselná data jsou uvedena v kilometrech.

|  |  |
| --- | --- |
| Letadlo | Letiště |
| Londýn | Frankfurt | Barcelona | Budapešť |
| č. 1 – Praha | 1 050 | 380 | 1 360 | 470 |
| č. 2 – Bratislava | 1 315 | 661 | 1 413 | 178 |
| č. 3 – Paříž | 346 | 451 | 858 | 1 252 |
| č. 4 – Oslo | 1 204 | 1 138 | 2 190 | 1 516 |

Cílem společnosti je dopravit na každé letiště právě jedno letadlo, s co nejmenšími možnými celkovými náklady. Optimálním výsledkem je tedy minimální součet kilometrů vzdušné trasy všech čtyř letadel, za omezující podmínky přiřazení pouze jednoho letadla k jednomu letišti.

1. Použité zdroje

[1] GeeksforGeeks. (2023, June 16). *Linear Programming: Definition, formula, examples, problems*. GeeksforGeeks. https://www.geeksforgeeks.org/linear-programming/

[2] Toppr (2020a, April 20). *Types of linear programming problems: Concepts, videos and examples*. Toppr. https://www.toppr.com/guides/maths/linear-programming/types-of-linear-programming-problems/