

## Nové možnosti rozvoje vzdělávání na Technické univerzitě v Liberci

Specifický cíl A3: Tvorba nových profesně zaměřených studijních programů

NPO\_TUL\_MSMT-16598/2022



# Matematická statistika (statistická indukce) – část 2

Ing. Vladimíra Hovorková Valentová, Ph.D.



## Testování statistických hypotéz

- Testování hypotéz je postup, sloužící k ověření předpokladů o ZS (hypotéz) na základě výběrových dat (tj. hodnot z výběrového souboru).
- *Hypotéza* = určitý předpoklad o základním souboru; tvrzení o neznámém parametru ZS (parametrické testy) nebo o různých vlastnostech ZS (neparametrické testy).
- Testování umožňuje rozhodnout, zda určitou hypotézu zamítneme (event. přijmeme), a to s malým, předem zvoleným rizikem.

Symbolika:  $H_0$  ... nulová (testovaná ) hypotéza

$H_1$  ... alternativní hypotéza

**Testové kritérium (t):** - vhodná charakteristika, která má při platnosti  $H_0$  známé pravděpodobnostní rozdělení;

- prostor hodnot testového kritéria rozdělíme na dva disjunktní obory ( $W$  a  $V$ ).

**Kritický obor ( $W$ ):** je tvořen hodnotami TK, které jsou při platnosti  $H_0$  tak extrémní, že pravděpodobnost jejich výskytu je velmi malá. Jde tedy o oblast přijetí  $H_1$ .

**Obor přijetí ( $V$ ):** je tvořen těmi hodnotami TK, které svědčí ve prospěch  $H_0$ .

**Hladina významnosti ( $\alpha$ )= pravděpodobnost chyby 1. druhu:** pravděpodobnost že zamítneme  $H_0$ , ačkoli platí.

**Pravděpodobnost chyby 2. druhu ( $\beta$ ):** pravděpodobnost, že nezamítneme  $H_0$ , ačkoli neplatí.

**Síla testu ( $1- \beta$ ):** pravděpodobnost správného zamítnutí  $H_0$  (schopnost testu zamítnout neplatnou  $H_0$ ).

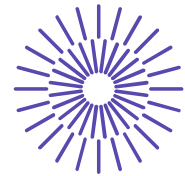
Standardní testovací postup:

- obecný, bez ohledu na konkrétní typ testu;
- provádí se v několika krocích.

**1. Formulace hypotéz  $H_0$  a  $H_1$ .**

**2. Volba testového kritéria:** zvolíme vhodnou charakteristiku, jejíž rozdělení při platnosti  $H_0$  známe.

**3. Vymezení kritického oboru:** je omezen kvantily rozdělení TK při platnosti  $H_0$  (= kritické hodnoty).



#### 4. Výpočet hodnoty TK z výběrových dat.

#### 5. Formulace závěru o výsledku testu: velmi důležité, existují dvě možnosti.

I. TK leží v kritickém oboru ( $TK \in W$ ): pak zamítáme  $H_0$ , tzn. prokázali jsme  $H_1$ .

II. TK leží v oboru přijetí ( $TK \in V$ ): pak nezamítáme  $H_0$ , tzn. neprokázali jsme  $H_1$ .

Některé parametrické testy hypotéz

*Test parametru  $\mu$  normálního rozdělení*

#### 1. Formulace hypotéz

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

a)  $H_1 : \mu \neq \mu_0$       *oboustranná alternativní hypotéza*

b)  $H_1 : \mu > \mu_0$       *pravostranná alternativní hypotéza*

c)  $H_1 : \mu < \mu_0$       *levostranná alternativní hypotéza*

#### 2. Volba testového kritéria

*Rozlišujeme tři případy:*

##### 1) známe rozptyl ZS $\sigma^2$

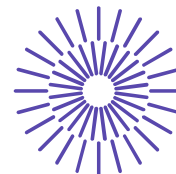
$$U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \approx N(0,1)$$

##### 2) neznáme rozptyl ZS $\sigma^2$ ; výběr má velký rozsah

$$U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s'}{\sqrt{n}}} \approx N(0,1)$$

##### 3) neznáme rozptyl ZS $\sigma^2$ ; výběr má malý rozsah

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s'}{\sqrt{n}}} \approx t(n-1)$$



### 3. Stanovení kritického oboru

**Pro případy 1) a 2) a různé typy alternativních hypotéz:**

$$a) W \equiv \left\{ U; U \leq u_{\frac{\alpha}{2}} \cup U \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$b) W \equiv \{U; U \geq u_{1-\alpha}\}$$

$$c) W \equiv \{U; U \leq u_{\alpha}\}$$

**Pro případ 3) a různé typy alternativních hypotéz:**

$$a) W \equiv \left\{ t; t \leq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cup t \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\}$$

$$b) W \equiv \{t; t \geq t_{1-\alpha}(n-1)\}$$

$$c) W \equiv \{t; t \leq t_{\alpha}(n-1)\}$$

### *Test parametru $\pi$ alternativního rozdělení*

Je třeba mít k dispozici výběr dostatečně velkého rozsahu; to je zajištěno splněním podmínky  $n\pi(1-\pi) > 9$ .

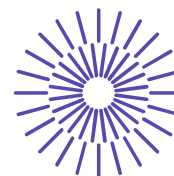
1.  $H_0 : \pi = \pi_0$

a)  $H_1 : \pi \neq \pi_0$

b)  $H_1 : \pi > \pi_0$

c)  $H_1 : \pi < \pi_0$

2. 
$$U = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}} \approx N(0,1)$$



$$3. \quad a) W \equiv \left\{ U; U \leq u_{\frac{\alpha}{2}} \cup U \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$b) W \equiv \{U; U \geq u_{1-\alpha}\}$$

$$c) W \equiv \{U; U \leq u_{\alpha}\}$$

### Test parametru $\sigma^2$ normálního rozdělení

$$1. \quad H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$a) H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

$$b) H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

$$c) H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

2. V praxi je častější případ, kdy neznáme parametr  $\mu$ , proto se na něj zaměříme.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s'^2}{\sigma_0^2} \approx \chi^2(n-1)$$

$$3. \quad a) W \equiv \left\{ \chi^2; \chi^2 \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) \cup \chi^2 \geq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) \right\}$$

$$b) W \equiv \{ \chi^2; \chi^2 \geq \chi_{1-\alpha}^2(n-1) \}$$

$$c) W \equiv \{ \chi^2; \chi^2 \leq \chi_{\alpha}^2(n-1) \}$$