TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Nové možnosti rozvoje vzdělávání na Technické univerzitě v Liberci

Specifický cíl A3: Tvorba nových profesně zaměřených studijních programů

NPO_TUL_MSMT-16598/2022

Matematická statistika (statistická indukce) – část 2

Ing. Vladimíra Hovorková Valentová, Ph.D.

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU

Národní plán obnovy

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Testování statistických hypotéz

- Testování hypotéz je postup, sloužící k ověření předpokladů o ZS (hypotéz) na základě výběrových dat (tj. hodnot z výběrového souboru).

- *Hypotéza* = určitý předpoklad o základním souboru; tvrzení o neznámém parametru ZS (parametrické testy) nebo o různých vlastnostech ZS (neparametrické testy).

- Testování umožňuje rozhodnout, zda určitou hypotézu zamítneme (event. přijmeme), a to s malým, předem zvoleným rizikem.

Symbolika: H_0 ... nulová (testovaná) hypotéza

H_1 ... alternativní hypotéza

Testové kritérium (t): - vhodná charakteristika, která má při platnosti H_0 známé pravděpodobnostní rozdělení;

- prostor hodnot testového kritéria rozdělíme na dva disjunktní obory (W a V).

Kritický obor (W): je tvořen hodnotami TK, které jsou při platnosti H_0 tak extrémní, že pravděpodobnost jejich výskytu je velmi malá. Jde tedy o oblast přijetí H_1.

Obor přijetí (V): je tvořen těmi hodnotami TK, které svědčí ve prospěch H_0.

Hladina významnosti (α)= pravděpodobnost chyby 1. druhu: pravděpodobnost že zamítneme H_0, ačkoli platí.

Pravděpodobnost chyby 2. druhu (β): pravděpodobnost, že nezamítneme H_0, ačkoli neplatí.

Síla testu (1- β): pravděpodobnost správného zamítnutí H_0 (schopnost testu zamítnout neplatnou H_0).

Standardní testovací postup:

- obecný, bez ohledu na konkrétní typ testu;
- provádí se v několika krocích.

1. Formulace hypotéz H_0 a H_1.

2. Volba testového kritéria: zvolíme vhodnou charakteristiku, jejíž rozdělení při platnosti H_0 známe.

3. Vymezení kritického oboru: je omezen kvantily rozdělení TK při platnosti H_0 (= kritické hodnoty).

4. Výpočet hodnoty TK z výběrových dat.

5. Formulace závěru o výsledku testu: velmi důležité, existují dvě možnosti.

I. TK leží v kritickém oboru (TK Є W): pak zamítáme H_0, tzn. prokázali jsme H_1.

II. TK leží v oboru přijetí (TK Є V): pak nezamítáme H_0, tzn. neprokázali jsme H_1.

Některé parametrické testy hypotéz

Test parametru μ normálního rozdělení

1. Formulace hypotéz

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$a)\ H_1 : \mu \neq \mu_0$ *oboustranná alternativní hypotéza*

$b)\ H_1 : \mu > \mu_0$ *pravostranná alternativní hypotéza*

$c)\ H_1 : \mu < \mu_0$ *levostranná alternativní hypotéza*

2. Volba testového kritéria

Rozlišujeme tři případy:

1) známe rozptyl ZS σ^2

$$U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad \approx N(0,1)$$

2) neznáme rozptyl ZS σ^2 ; výběr má velký rozsah

$$U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s'}{\sqrt{n}}} \qquad \approx N(0,1)$$

3) neznáme rozptyl ZS σ^2; výběr má malý rozsah

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s'}{\sqrt{n}}} \qquad \approx t(n-1)$$

3. Stanovení kritického oboru

Pro případy 1) a 2) a různé typy alternativních hypotéz:

$$a)\ W \equiv \left\{U; U \le u_{\frac{\alpha}{2}} \cup U \ge u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$$

$$b)\ W \equiv \{U; U \ge u_{1-\alpha}\}$$

$$c)\ W \equiv \{U; U \le u_{\alpha}\}$$

Pro případ 3) a různé typy alternativních hypotéz:

$$a)\ W \equiv \left\{t; t \le t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cup t \ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$$

$$b)\ W \equiv \{t; t \ge t_{1-\alpha}(n-1)\}$$

$$c)\ W \equiv \{t; t \le t_{\alpha}(n-1)\}$$

Test parametru π alternativního rozdělení

Je třeba mít k dispozici výběr dostatečně velkého rozsahu; to je zajištěno splněním podmínky $n\pi(1-\pi) > 9$.

1. $H_0 : \pi = \pi_0$

$$a)\ H_1 : \pi \ne \pi_0$$

$$b)\ H_1 : \pi > \pi_0$$

$$c)\ H_1 : \pi < \pi_0$$

2. $$U = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}} \approx N(0,1)$$

3. $a)\ W \equiv \left\{U; U \leq u_{\frac{\alpha}{2}} \cup U \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$

$b)\ W \equiv \{U; U \geq u_{1-\alpha}\}$

$c)\ W \equiv \{U; U \leq u_{\alpha}\}$

Test parametru σ² normálního rozdělení

1. $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

$a)\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

$b)\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

$c)\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$

2. V praxi je častější případ, kdy neznáme parametr μ, proto se na něj zaměříme.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s'^2}{\sigma_0^2} \qquad \approx \chi^2(n-1)$$

3. $a)\ W \equiv \left\{\chi^2; \chi^2 \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cup \chi^2 \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$

$b)\ W \equiv \{\chi^2;\ \chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\}$

$c)\ W \equiv \{\chi^2; \chi^2 \leq \chi^2_{\alpha}(n-1)\}$