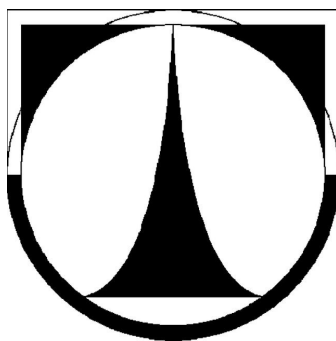


Matematika I (Fakulta strojní)

Cvičení z matematické analýzy

TU v Liberci



Jiří Hozman

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

20. ledna 2022

Kapitola 1

Množinové operace, číselné obory a výrokový počet

Příklad 1.1. Určete všechny podmnožiny množiny M :

- a) $M = \{-4, 3, 5\}$ $[\emptyset, \{-4\}, \{3\}, \{5\}, \{-4, 3\}, \{-4, 5\}, \{3, 5\}, \{-4, 3, 5\}]$
b) $M = \{0, 1, 2\}$ $[\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}]$

Příklad 1.2. Rozhodněte o rovnosti množin:

- a) $M = \emptyset, N = \{\emptyset\}$ \square
b) $M = \{-2, -1, 0\}, N = \{x \in \mathbb{Z} : |x + 1| < 1\}$ $[M \neq N]$
c) $M = \{-4, -3, -2, -1, 0\}, N = \{x \in \mathbb{Z} : |x + 2| < 2\}$ \square
d) $M = \{-2, -1, 0\}, N = \{x \in \mathbb{Z} : |x + 1| \leq 1\}$ $[M = N]$
e) $M = \{-2, -1, 0\}, N = \{x \in \mathbb{Z} : |x + 2| < 2\}$ \square

Příklad 1.3. Zakreslete následující množiny a určete jejich sjednocení, průnik, rozdíl a doplněk v množině D :

- a) $M = \{1, 2, 3\}, N = \{x \in \mathbb{Z} : |x - 2| \leq 2\}, D = \mathbb{Z}$
 \square
b) $M = (-4, -3), N = \langle -2, 2 \rangle, D = \mathbb{R}$
 $[M \cup N = (-4, -3) \cup \langle -2, 2 \rangle, M \cap N = \emptyset, M \setminus N = (-4, -3), N \setminus M = \langle -2, 2 \rangle,$
 $M'_D = (-\infty, -4) \cup \langle -3, +\infty \rangle, N'_D = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)]$
c) $M = \langle 1, 2 \rangle, N = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| < 1\}, D = \mathbb{R}_0^+$
 $[M \cup N = \langle 1, 4 \rangle - \{2\}, M \cap N = \emptyset, M \setminus N = \langle 1, 2 \rangle, N \setminus M = (2, 4), M'_D = \langle 0, 1 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle,$
 $N'_D = \langle 0, 2 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle]$
d) $M = \{2, 3, 5, 11, \dots\}$ (mn. všech prvočísel), $N = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ (mn. všech sudých čísel), $D = \mathbb{Z}$
 \square
e) $M = \mathbb{R}_0^-, N = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| - 2x + 3 < 0\}, D = \mathbb{R}$
 \square
f) $M = (4, 8), N = \{x \in \mathbb{R} : |x - 6| \leq 2\}, D = \mathbb{R}^+$
 \square
g) $M = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 4\}, N = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 25\}, D = \mathbb{Z}$
 \square
h) $M = \mathbb{Q}^+, N = \mathbb{I}^+, D = \mathbb{R}^+$
 \square
i) $M = \mathbb{R}, N = \mathbb{R}^*, D = \mathbb{R}^*$
 \square

Příklad 1.4. Pro množiny $A = (-\infty, 2)$, $B = \langle 1, 3 \rangle$ a $C = \langle -1, 1 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$ určete:

- a) $(A \cup B) \cap C$ $[\langle -1, 1 \rangle \cup \langle 2, 3 \rangle]$
- b) $(C \cup B) \cap A$ $[\langle -1, 2 \rangle]$
- c) $A \cup B \cup C$ $[(-\infty, +\infty)]$
- d) $A \cap B \cap C$ $[\{1\}]$

Příklad 1.5. Necht A, B, C jsou množiny. Ověřte platnost de Morganových pravidel:

- a) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$,
- b) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

Příklad 1.6. Určete minimum, maximum, infimum a supremum následujících množin v \mathbb{R}^* :

- a) $M = (0, 1)$ $[\min M \text{ neex.}, \max M \text{ neex.}, \inf M = 0, \sup M = 1]$
- b) $M = \langle 0, 1 \rangle$ $[\min M = 0, \max M = 1, \inf M = 0, \sup M = 1]$
- c) $M = \langle 1, 2 \rangle$ $[\min M = 1, \max M \text{ neex.}, \inf M = 1, \sup M = 2]$
- d) $M = \langle -1, +\infty \rangle$ $[\min M = -1, \max M \text{ neex.}, \inf M = -1, \sup M = +\infty]$
- e) $M = (-\infty, 1)$ $[\min M \text{ neex.}, \max M \text{ neex.}, \inf M = -\infty, \sup M = 1]$
- f) $M = \emptyset$ $[\min M \text{ neex.}, \max M \text{ neex.}, \inf M = +\infty, \sup M = -\infty]$
- g) $M = \langle 0, 1 \rangle \cup \langle 2, 3 \rangle$ $[\min M = 0, \max M = 3, \inf M = 0, \sup M = 3]$

Příklad 1.7. Utvořte negaci výroků, je-li:

- a) $A : \forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0$ $[\neg A : \exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \leq 0]$
- b) $A : \text{Všichni lidé jsou menší než 280 cm.}$ $[\neg A : \text{Existuje alespoň jeden člověk větší nebo roven 280 cm.}]$

Příklad 1.8. Necht A a B je dvojice následujících výroků:

- a) $A : x \in \mathbb{R} : x < 2, B : x \in \mathbb{R} : x \geq -1$ $[p(A \wedge B) = 1 \text{ pro } x \in \langle -1, 2 \rangle, p(A \vee B) = 1 \text{ pro } x \in \mathbb{R}]$

Pro která $x \in \mathbb{R}$ je konjunkce $A \wedge B$ pravdivá a pro která $x \in \mathbb{R}$ je disjunkce $A \vee B$ pravdivá?

Příklad 1.9. Utvořte disjunkci dvou výroků p a q a určete pravdivost složeného výroku, je-li:

- a) $A : 2|12, B : 5|12$ $[p(A \vee B) = 1]$
- b) $A : \forall n \in \mathbb{N} : n^2 + n + 11 \text{ je prvočíslo}, B : \forall n \in \mathbb{N} : n^2 + n + 11 \text{ je liché}$ $[p(A \vee B) = 1]$

Příklad 1.10. Určete pravdivost níže uvedených složených výroků pro $A : \sqrt{4} = -2$ a $B : 3 + 4 = 7$:

- a) $A \Rightarrow B$ \square b) $\neg A \Rightarrow B$ \square
- c) $\neg B \Rightarrow A$ \square d) $\neg B \Rightarrow \neg A$ \square

Příklad 1.11. Určete pravdivost níže uvedených složených výroků pro $p : e = 6, q : \pi^2 = 16$ a $r : 1 < 2$:

- a) $(p \vee q) \wedge r$ \square b) $(p \wedge q) \vee r$ \square

Příklad 1.12. Utvořte pravdivostní tabulku hodnot složeného výroku a rozhodněte o platnosti ekvivalence:

- a*) $(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg X \vee Y)$ [tautologie]
- b) $\neg(\neg X) \Leftrightarrow X$ \square
- c) $\neg(X \wedge Y) \Leftrightarrow (\neg X \vee \neg Y)$ \square
- d) $\neg(X \vee Y) \Leftrightarrow (\neg X \wedge \neg Y)$ \square
- e*) $\neg(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (X \wedge \neg Y)$ [tautologie]
- f) $\neg(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow [(X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y)]$ \square

Kapitola 2

Posloupnosti

Příklad 2.1. Určete, zda jsou následující posloupnosti ohraničené a rozhodněte o jejich monotonii:

- | | | | |
|---------------------------------|---------------------|--------------------------|----------------------|
| a) $a_n = 3 \cos(n^2)$ | [] | b) $a_n = 2^{1-n}$ | [kles., omez.] |
| c) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ | [] | d) $a_n = \frac{n}{2^n}$ | [nerost., omez.] |
| e) $a_n = (-1)^n n^2$ | [osciluje, neomez.] | f) $a_n = n^3 - n^2$ | [rost., zdola omez.] |
| g) $a_n = \frac{2^n}{n!}$ | [kles., omez.] | h) $a_n = \frac{1}{n^2}$ | [kles., omez.] |
| i) $a_n = \sqrt[n]{2}$ | [kles., omez.] | j) $a_n = \sqrt{n}$ | [rost., zdola omez.] |

Příklad 2.2. Vypočtěte:

- | | | | |
|--|-----------------------------|---|----------------------------|
| a*) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^3 - 5n + 7}{5n^2 + n - 8}$ | $[-\infty]$ | b*) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 8n + 1}{7n^2 + 8n - 1}$ | $\left[\frac{5}{7}\right]$ |
| c*) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 3}{n^3 - 1}$ | $[0]$ | d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 5n - 2}{1 - 2n + 6n^2}$ | $[1]$ |
| e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 - 3n + 1}$ | $[2]$ | f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 5}{n^3 + 1}$ | $[0]$ |
| g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{n^2 + 2n + 5}$ | $[+\infty]$ | h*) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{(n + 1)^3}$ | $[0]$ |
| i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 2)^5(2n - 1)}{(n - 1)^6}$ | $[2]$ | j) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 5n - 1)$ | $[+\infty]$ |
| k) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 5n - 1)$ | $[+\infty]$ | l) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2 + 5n)$ | $[-\infty]$ |
| m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n^2 + 8n + 4}{1 + 2n + 3n^2}$ | $\left[-\frac{5}{3}\right]$ | n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-8n^2 + 6n + 7}{2n + 5}$ | $[-\infty]$ |
| o) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-8n + 3}{9 - 2n - 4n^2}$ | $[0]$ | p) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n + 1)(3n + 2)(3n - 8)}{n^3 - n^2 + 1}$ | $[18]$ |
| q) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)^4 - (n - 1)^4}{(n + 1)^3 - (n - 1)^3}$ | $[+\infty]$ | r*) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^5 + 3n - 2}{n^5 - 3n^2 + 1} \right)^2$ | $[4]$ |

Příklad 2.3. Vypočtete:

<p>a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2 - 4} - 2n)$ [$+\infty$]</p>	<p>b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2 - 4} - 3n)$ [0]</p>
<p>c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 2}}$ [2]</p>	<p>d*) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2})$ [0]</p>
<p>e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{2n+1})$ [$-\infty$]</p>	<p>f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 - 5} - 2n)$ [0]</p>
<p>g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}$ [$+\infty$]</p>	<p>h) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 - n} - n)$ [$+\infty$]</p>
<p>i*) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 - n} - 2n)$ [$-\frac{1}{4}$]</p>	<p>j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n + \sqrt{2n+1}}{n - \sqrt{n}}$ [-3]</p>
<p>k) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n-1} - \sqrt{n})$ [0]</p>	<p>l) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{5n^2 + 3n} - \sqrt{5n^2 + 2n})$ [$\frac{1}{2\sqrt{5}}$]</p>
<p>m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n}}{n}$ [1]</p>	<p>n) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n})$ [$\frac{1}{2}$]</p>
<p>o) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n+1}$ [1]</p>	<p>p) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 - 1}}{n+1}$ [$+\infty$]</p>

Příklad 2.4. Vypočtete:

<p>a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$ [e^3]</p>	<p>b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5}$ [e]</p>
<p>c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{7n+4}$ [e^7]</p>	<p>d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^n$ [$\sqrt[5]{e}$]</p>
<p>e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{5n+8}$ [$\sqrt[4]{e^5}$]</p>	<p>f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{7n+6}$ [$\sqrt{e^7}$]</p>
<p>g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{6n}$ [e^6]</p>	<p>h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n+2}$ [e^3]</p>
<p>i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n$ [$e^{\frac{1}{3}}$]</p>	<p>j*) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n+6}$ [$e^{\frac{3}{2}}$]</p>
<p>k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^n$ [$e^{\frac{1}{3}}$]</p>	<p>l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k, k \in \mathbb{Z}$ [1]</p>
<p>m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ [$e^{\frac{1}{2}}$]</p>	<p>n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ [e^{-1}]</p>
<p>o) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1}$ [e^{-1}]</p>	<p>p*) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^n$ [e^{-4}]</p>
<p>q*) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n+2}$ [e^6]</p>	<p>r) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2n+1}\right)^{1-n}$ [e^{-1}]</p>
<p>s*) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{3n}$ [e]</p>	<p>t) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n-1}\right)^{2n}$ [$+\infty$]</p>
<p>u) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{3n-1}\right)^n$ [0]</p>	<p>v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^{4n-1}$ [$+\infty$]</p>
<p>v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-n}{n+2}\right) \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2-n}$ [$-e^{-1}$]</p>	<p>w) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+5}{5-n}\right) \left(\frac{2n-3}{2n+5}\right)^{2n+5}$ [$-2e^{-8}$]</p>

Příklad 2.5. Vypočtěte:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a*) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 4n + 5} & [0] \\
 \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n^2 + 1)}{n} & [0] \\
 \text{e*) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n + 1} & [0] \\
 \text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(e^{n^2 + n + 1})}{n} & [0] \\
 \text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} & [0] \\
 \text{k) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 5n}{n^2} & [0] \\
 \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cos \left(\frac{n^2 + 1}{2n - 1} \right) \right) & [0] \\
 \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \sin n^2}{n^2 + 1} & [0] \\
 \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 5n + 1} & [0] \\
 \text{h) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n!}{n^2 + 1} & [0] \\
 \text{j) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cos n}{3n + 7} & [0] \\
 \text{l) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{n} & [+ \infty]
 \end{array}$$

Příklad 2.6. Vypočtěte:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a*) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} & [1] & \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^7} & [1] \\
 \text{d*) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^{n+1}} & [3] & \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{n} & [1] \\
 \text{g*) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{9^n + 4^n} & [3] & \text{h*) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n + 5} & [1] \\
 \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n} & [\sqrt{3}] & \text{f*) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[7]{6^n} & [\sqrt[7]{6}] \\
 \text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 1} & [1] & &
 \end{array}$$

Příklad 2.7. Vypočtěte:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a*) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + 2}{(-1)^n - 2} & [\text{neex.}] \\
 \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + 2}{3^n(2 - (-1)^n)} & [0] \\
 \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt[n]{2} - 2} & [0] \\
 \text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n}{1 - 3^n} + \sqrt[n]{3} \right) & [0] \\
 \text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} & \left[\frac{1}{3} \right] \\
 \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + (-2)^n}{2 \cdot 4^n} & [0] \\
 \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} & [+ \infty] \\
 \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 2} & [1] \\
 \text{h*) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n + 4^n - 2^n}{6^{n+1} - 3^n} & \left[\frac{1}{6} \right] \\
 \text{j) } \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n^2 + 2n + 1} & [\text{neex.}]
 \end{array}$$

Příklad 2.8. Vypočtěte:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! - 3n!}{(n+2)! + 1} & [1] \\
 \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - 2n!}{3(n+1)! + 1} & \left[\frac{1}{3} \right] \\
 \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+2)! - (n+1)!}{(n+3)!} & [0] \\
 \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n-1)!}{(2n+1)! - (2n)!} & [1]
 \end{array}$$

Příklad 2.9. Vypočtěte:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2} & \left[\frac{1}{2} \right] \\
 \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) & \left[\frac{1}{2} \right] \\
 \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n}} & \left[\frac{9}{8} \right] \\
 \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right) & \left[-\frac{1}{2} \right] \\
 \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}} & \left[\frac{3}{4} \right] \\
 \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)} & [1]
 \end{array}$$

Kapitola 3

Reálné funkce reálné proměnné

Příklad 3.1. Určete definiční obory funkcí:

a) $f : y = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{x-3}{x+3} \right)$ $[D_f = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)]$

b) $f : y = \log_{\frac{1}{3}}(x-3) - \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$ $[D_f = (3; +\infty)]$

c) $f : y = \sqrt{\ln(x^2-1)}$ $[D_f = (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)]$

d) $f : y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\ln(2x-3)}$ $[D_f = \left(\frac{3}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)]$

e) $f : y = \ln(2-x)$ $[D_f = (-\infty; 2)]$

f) $f : y = \ln(x^2-4)$ $[D_f = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)]$

g) $f : y = e^{\sqrt{x^2-1}}$ $[D_f = (-\infty; -1) \cup \langle 1; +\infty \rangle]$

h) $f : y = \ln(e^x - e^{-x})$ $[D_f = (0; +\infty)]$

i) $f : y = \ln \left| \sqrt{1-|x|} \right| + \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{2}}}$ $[D_f = \left(-\frac{1}{2}; 1\right)]$

j) $f : y = \log_a(x-4)(x-1)$ $[D_f = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty), a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)]$

k) $f : y = \ln \frac{e^x-1}{e^x}$ $[D_f = (0; +\infty)]$

l) $f : y = \ln e^x + \ln \sqrt{3-2x-x^2}$ $[D_f = (-3; 1)]$

m) $f : y = \log_a(1-x^2)$ $[D_f = (-1; 1), a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)]$

n) $f : y = \log_a \sqrt{x+2}$ $[D_f = (-2; +\infty), a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)]$

o) $f : y = \log_a \frac{x-3}{x+2}$ $[D_f = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty), a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)]$

p) $f : y = \frac{1}{x^2-9} - \ln(x^3-x)$ $[D_f = (-1; 0) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)]$

q) $f : y = 1 - \ln(x^2-5x+6)$ $[D_f = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)]$

r) $f : y = \ln(-x^2+x+2)$ $[D_f = (-1; 2)]$

s) $f : y = \ln \frac{x-1}{x+3} + \sqrt{x^2-4}$ $[D_f = (-\infty; -3) \cup \langle 2; +\infty \rangle]$

t) $f : y = \sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x+2}} + 2 \ln \frac{x^2+1}{x}$ $[D_f = (0; 1) \cup \langle 4; +\infty \rangle]$

u) $f : y = \ln |\ln(-\ln x)|$ $[D_f = (0; 1)]$

v) $f : y = \ln(2 - |2x^2 + 10x + 12|)$ $[D_f = \left(\frac{-5-\sqrt{5}}{2}; \frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right)]$

Příklad 3.2. Určete definiční obory funkcí:

- a) $f : y = \frac{1}{x}$ $[D_f = \mathbb{R} - \{0\}]$
- b) $f : y = \frac{x-1}{x^2-4}$ $[D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}]$
- c) $f : y = \sqrt{x-1}$ $[D_f = \langle 1; +\infty \rangle]$
- d) $f : y = \sqrt{x^2-3x+2}$ $[D_f = (-\infty; 1) \cup \langle 2; +\infty \rangle]$
- e) $f : y = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}$ $[D_f = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)]$
- f) $f : y = \frac{1}{x+1} + \sqrt[6]{x+3}$ $[D_f = \langle -3; -1 \rangle \cup (-1; +\infty)]$
- g) $f : y = \sqrt{x+4} + \sqrt[4]{x^2-5x+6}$ $[D_f = \langle -4; 2 \rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle]$
- h) $f : y = x^2 + \sqrt[3]{x}$ $[D_f = \mathbb{R}]$
- i) $f : y = \sqrt{2+x-x^2}$ $[D_f = \langle -1; 2 \rangle]$
- j) $f : y = \sqrt{\frac{x}{3-x^2}}$ $[D_f = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup \langle 0; \sqrt{3} \rangle]$
- k*) $f : y = \sqrt{x^2+x-6}$ $[D_f = (-\infty; -3) \cup \langle 2; +\infty \rangle]$
- l) $f : y = \frac{4-x^2}{x^2-2x-3}$ $[D_f = \mathbb{R} - \{-1; 3\}]$
- m) $f : y = \frac{\sqrt{3-|x|}}{||x|-2|}$ $[D_f = \langle -3; -2 \rangle \cup (-2; 2) \cup (2; 3)]$
- n) $f : y = \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}$ $[D_f = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)]$
- o) $f : y = \frac{-1}{1-\sqrt{x}}$ $[D_f = \langle 0; 1 \rangle \cup (1; +\infty)]$
- p) $f : y = \frac{1}{x-\sqrt{x}}$ $[D_f = (0; 1) \cup (1; +\infty)]$

Příklad 3.3. Určete definiční obory funkcí:

- a) $f : y = \sqrt{\ln(\cos x)}$ $\left[D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{0 + 2k\pi\} \right]$
- b) $f : y = \arcsin \frac{x-3}{2} + \ln(x^3 - x)$ $[D_f = (1; 5)]$
- c) $f : y = \sqrt{\ln\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)} + \arcsin \frac{3}{x}$ $[D_f = \langle 3; 4 \rangle]$
- d) $f : y = \operatorname{tg}(x + \pi)$ $\left[D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{3\pi}{2} + k\pi \right) \right]$
- e) $f : y = \frac{1}{\cos x}$ $\left[D_f = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \right]$
- f) $f : y = \frac{1}{\sin x}$ $\left[D_f = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\} \right]$
- g) $f : y = \ln(\sin x)$ $\left[D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \right]$
- h) $f : y = \sin(\ln x)$ $[D_f = (0; +\infty)]$
- i) $f : y = \arcsin(x^2 - 1)$ $[D_f = \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle]$
- j) $f : y = \arccos(\ln x)$ $[D_f = \langle e^{-1}; e \rangle]$
- k) $f : y = \frac{1}{1 - \cos x}$ $\left[D_f = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{0 + 2k\pi\} \right]$
- l) $f : y = \operatorname{tg}(2x)$ $\left[D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right) \right]$
- m) $f : y = 1 - \operatorname{cotg}\left(\frac{x}{2}\right)$ $\left[D_f = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{0 + 2k\pi\} \right]$
- n) $f : y = 1 + \frac{1}{\cos x}$ $\left[D_f = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \right]$
- o) $f : y = \frac{1}{1 - \sin x}$ $\left[D_f = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\} \right]$
- p) $f : y = \operatorname{cotg}(2x)$ $\left[D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(0 + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2} \right) \right]$
- q) $f : y = \sqrt{\cos x}$ $\left[D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle \right]$
- r) $f : y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ $[D_f = \langle 0; 1 \rangle]$
- s) $f : y = \log(\cos x)$ $\left[D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right]$
- t) $f : y = e^{\sqrt{\frac{1}{2} - \sin x}}$ $\left[D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{13\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle \right]$
- u) $f : y = \sqrt{\operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$ $\left[D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right) \right]$

Příklad 3.4. Určete definiční obory funkcí:

- | | |
|---|--|
| a) $f : y = \arcsin(2 - 3x)$ | $\left[D_f = \left\langle \frac{1}{3}, 1 \right\rangle \right]$ |
| b) $f : y = \arccos \frac{1 - 2x}{4}$ | $\left[D_f = \left\langle -\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right\rangle \right]$ |
| c) $f : y = \arcsin \frac{1}{2x - 1}$ | $\left[D_f = \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle \cup \left(\frac{1}{2}, 1 \right) \right]$ |
| d) $f : y = \sqrt{3 - x} + \arcsin \left(\frac{3 - 2x}{5} \right)$ | $[D_f = \langle -1, 3 \rangle]$ |
| e) $f : y = \arcsin(1 - x) + \ln(\ln x)$ | $[D_f = (1, 2)]$ |
| f) $f : y = \sqrt{\operatorname{arctg} \left(\frac{x + 3}{2} \right) - \frac{\pi}{4}}$ | $[D_f = \langle -1, +\infty \rangle]$ |
| g) $f : y = \frac{\ln(2x - 3)}{\sqrt{x^2 - 1}} + \arcsin \frac{x - 4}{7}$ | $\left[D_f = \left(\frac{3}{2}, 11 \right) \right]$ |
| h) $f : y = \arcsin \frac{2x}{1 + x}$ | $\left[D_f = \left\langle -\frac{1}{3}, 1 \right\rangle \right]$ |
| i) $f : y = \arcsin(x) + x\sqrt{1 - x^2}$ | $[D_f = \langle -1, 1 \rangle]$ |
| j) $f : y = \arccos(\ln x^3)$ | $\left[D_f = \left\langle e^{-\frac{1}{3}}, e^{\frac{1}{3}} \right\rangle \right]$ |
| k) $f : y = \frac{1}{1 - \cos x}$ | $\left[D_f = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{2k\pi\} \right]$ |
| l) $f : y = \operatorname{tg}(4x)$ | $\left[D_f = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \right\} \right]$ |
| m) $f : y = \left(\frac{x - 2}{x + 1} \right)^{\arccos \sqrt{x^2 - 1}}$ | $[D_f = \langle -\sqrt{2}, -1 \rangle]$ |
| n) $f : y = \arccos \frac{3x + 2}{4}$ | $\left[D_f = \left\langle -2, \frac{2}{3} \right\rangle \right]$ |
| o) $f : y = \frac{1}{\arccos(\ln x^3)}$ | $\left[D_f = \left\langle e^{-\frac{1}{3}}, e^{\frac{1}{3}} \right\rangle \right]$ |
| p) $f : y = \arcsin \left(\frac{2 - x}{2x + 1} \right)$ | $\left[D_f = (-\infty, -3) \cup \left\langle \frac{1}{3}, +\infty \right\rangle \right]$ |
| q) $f : y = \sqrt{1 - \operatorname{cotg}^2 x}$ | $\left[D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle \frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right\rangle \right]$ |

Příklad 3.5. Zjistěte, zda jsou dané funkce sudé nebo liché, příp. ani sudé ani liché:

- a*) $f : y = \ln \left(\frac{2-x}{2+x} \right)$ [$D_f = (-2; 2)$, lichá]
- b) $f : y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ [$D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, lichá]
- c) $f : y = \frac{x}{|x|}$ [$D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, lichá]
- d) $f : y = 4x^2 + 1$ [$D_f = \mathbb{R}$, sudá]
- e) $f : y = \operatorname{tg} x$ [$D_f = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$, lichá]
- f) $f : y = \sin x - \cos x$ [$D_f = \mathbb{R}$, ani sudá, ani lichá]
- g) $f : y = \cosh x$ [$D_f = \mathbb{R}$, sudá]
- h) $f : y = \sinh x$ [$D_f = \mathbb{R}$, lichá]
- i) $f : y = x \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ [$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, sudá]
- j) $f : y = \frac{1}{2}x^3 + x$ [$D_f = \mathbb{R}$, lichá]
- k) $f : y = \frac{5x^3}{|x|}$ [$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, lichá]
- l) $f : y = x \sin x$ [$D_f = \mathbb{R}$, sudá]
- m*) $f : y = x \sin(3x) + x^2 \cos x + \frac{1}{x^2}$ [$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, sudá]
- n) $f : y = \sqrt[5]{x^2}$ [$D_f = \mathbb{R}$, sudá]
- o) $f : y = \sqrt[4]{x^3}$ [$D_f = \langle 0; +\infty \rangle$, ani sudá, ani lichá]
- p) $f : y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ [$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, lichá]

Příklad 3.6. Zjistěte, zda jsou dané funkce periodické a v kladném případě určete jejich nejmenší periodu:

- | | | | |
|---|--------------------------------|--|---------------------------------|
| a) $f : y = \operatorname{tg}(3x) + \sin(6x)$ | $\left[\frac{\pi}{3} \right]$ | b) $f : y = \sin^2 x$ | $[\pi]$ |
| c) $f : y = 1 + \cos x$ | $[2\pi]$ | d) $f : y = \sin(2x)$ | $[\pi]$ |
| e) $f : y = \cos \left(\frac{x}{2} + \pi \right)$ | $[4\pi]$ | f) $f : y = 2 \sin(2x - \pi)$ | $[\pi]$ |
| g) $f : y = 1 + \cos(2x + \pi)$ | $[\pi]$ | h) $f : y = \cos \left(\frac{x}{2} \right)$ | $[4\pi]$ |
| i) $f : y = \sin(2x - \pi)$ | $[\pi]$ | j) $f : y = -3 \sin(3x)$ | $\left[\frac{2\pi}{3} \right]$ |
| k) $f : y = -3 + 2 \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$ | $[4\pi]$ | l) $f : y = \operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$ | $\left[\frac{\pi}{2} \right]$ |
| m) $f : y = \operatorname{cotg}(x + \pi)$ | $[\pi]$ | n) $f : y = \operatorname{tg}(2x) + \operatorname{cotg}(2x)$ | $\left[\frac{\pi}{2} \right]$ |
| o) $f : y = e^{\sin x}$ | $[2\pi]$ | p) $f : y = 5 + \sin(5x)$ | $\left[\frac{2\pi}{5} \right]$ |

Příklad 3.7. K daným funkcím sestrojte inverzní funkce a určete příslušné definiční obory D_f a $D_{f^{-1}}$:

- a) $f : y = e^{x-1} + 2$ $[D_f = \mathbb{R}, f^{-1} : y = \ln(x-2) + 1, D_{f^{-1}} = (2, +\infty)]$
- b) $f : y = 4x + 2$ $\left[D_f = \mathbb{R}, f^{-1} : y = \frac{x-2}{4}, D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \right]$
- c) $f : y = \frac{1-x}{1+x}$ $\left[D_f = \mathbb{R} - \{-1\}, f^{-1} : y = \frac{1-x}{1+x}, D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{-1\} \right]$
- d) $f : y = \sqrt{1+e^{2x}}$ $\left[D_f = \mathbb{R}, f^{-1} : y = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1), D_{f^{-1}} = (1, +\infty) \right]$
- e) $f : y = \ln(2-x)$ $[D_f = (-\infty, 2), f^{-1} : y = 2 - e^x, D_{f^{-1}} = \mathbb{R}]$
- f) $f : y = 1 + \sqrt{3 + e^{2x}}$ $\left[D_f = \mathbb{R}, f^{-1} : y = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x - 2), D_{f^{-1}} = (1 + \sqrt{3}, +\infty) \right]$
- g) $f : y = \frac{4 + e^x}{4 - e^x}$ $\left[D_f = \mathbb{R} - \{\ln 4\}, f^{-1} : y = \ln \left(\frac{4x-4}{1+x} \right), D_{f^{-1}} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \right]$
- h) $f : y = \ln(5-2x)$ $\left[D_f = \left(-\infty, \frac{5}{2} \right), f^{-1} : y = \frac{5 - e^x}{2}, D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \right]$
- i) $f : y = \sqrt{3 + e^x}$ $[D_f = \mathbb{R}, f^{-1} : y = \ln(x^2 - 3), D_{f^{-1}} = (\sqrt{3}, +\infty)]$
- j) $f : y = \frac{2 + e^x}{e^x}$ $\left[D_f = \mathbb{R}, f^{-1} : y = \ln \left(\frac{2}{x-1} \right), D_{f^{-1}} = (1, +\infty) \right]$
- k) $f : y = 1 + \frac{1}{x}$ $\left[D_f = \mathbb{R} - \{0\}, f^{-1} : y = \frac{1}{x-1}, D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{1\} \right]$
- l) $f : y = 3 - 5x$ $\left[D_f = \mathbb{R}, f^{-1} : y = \frac{3-x}{5}, D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \right]$
- m) $f : y = x^3 + 2$ $[D_f = \mathbb{R}, f^{-1} : y = \sqrt[3]{x-2}, D_{f^{-1}} = \mathbb{R}]$
- n*) $f : y = \frac{1}{\ln x}$ $[D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty), f^{-1} : y = e^{\frac{1}{y}}, D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{0\}]$
- o) $f : y = \frac{1 - e^x}{2}$ $\left[D_f = \mathbb{R}, f^{-1} : y = \ln(1 - 2x), D_{f^{-1}} = \left(-\infty, \frac{1}{2} \right) \right]$
- p) $f : y = e^{-x} + 1$ $[D_f = \mathbb{R}, f^{-1} : y = -\ln(x-1), D_{f^{-1}} = (1, +\infty)]$
- q) $f : y = 2 - \ln x$ $[D_f = (0, +\infty), f^{-1} : y = e^{2-x}, D_{f^{-1}} = \mathbb{R}]$
- r) $f : y = 1 - \sqrt{-x}$ $[D_f = (-\infty, 0), f^{-1} : y = -(1-x)^2, D_{f^{-1}} = (-\infty, 1)]$
- u) $f : y = -\sqrt{1-x}$ $[D_f = (-\infty, -1), f^{-1} : y = 1 - x^2, D_{f^{-1}} = (-\infty, 0)]$
- v) $f : y = 2 \arcsin(x+1)$ $\left[D_f = \langle -2; 0 \rangle, f^{-1} : y = \sin \frac{x}{2} - 1, D_{f^{-1}} = \langle -\pi; \pi \rangle \right]$
- w) $f : y = \arccos(2x+1)$ $\left[D_f = \langle -1; 1 \rangle, f^{-1} : y = \frac{\cos x - 1}{2}, D_{f^{-1}} = \langle 0; \pi \rangle \right]$
- x) $f : y = 3 \arcsin \left(1 - \frac{x}{2} \right)$ $\left[D_f = \langle 0; 4 \rangle, f^{-1} : y = 2 - 2 \sin \left(\frac{x}{3} \right), D_{f^{-1}} = \left\langle -\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle \right]$
- y) $f : y = \operatorname{arctg}(1-x)$ $[D_f = \mathbb{R}, f^{-1} : y = 1 - \operatorname{tg} x, D_{f^{-1}} = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)]$
- z) $f : y = e^{1-x} + \sqrt{2}$ $[D_f = \mathbb{R}, f^{-1} : y = 1 - \ln(x - \sqrt{2}), D_{f^{-1}} = (-\sqrt{2}; +\infty)]$

Příklad 3.8. K daným funkcím sestrojte inverzní funkce v daném definičním oboru a určete $D_{f^{-1}}$:

- | | |
|--|---|
| a) $f : y = \frac{x-1}{x+1}, D_f = (-\infty; -1)$ | $\left[f^{-1} : y = \frac{x+1}{1-x}, D_{f^{-1}} = (1; +\infty) \right]$ |
| b) $f : y = 1 + x^2, D_f = (-\infty; 0)$ | $[f^{-1} : y = -\sqrt{x-1}, D_{f^{-1}} = (1; +\infty)]$ |
| c) $f : y = 1 + \sin x, D_f = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ | $[f^{-1} : y = \arcsin(x-1), D_{f^{-1}} = (0; 2)]$ |
| d) $f : y = \sqrt{1-x^2}, D_f = \langle -1; 0 \rangle$ | $[f^{-1} : y = -\sqrt{1-x^2}, D_{f^{-1}} = \langle 0; 1 \rangle]$ |
| e) $f : y = \sqrt{9-x^2}, D_f = \langle -3; 0 \rangle$ | $[f^{-1} : y = -\sqrt{9-x^2}, D_{f^{-1}} = \langle 0; 3 \rangle]$ |
| f) $f : y = \sqrt{9-x^2}, D_f = \langle 0; 3 \rangle$ | $[f^{-1} : y = \sqrt{9-x^2}, D_{f^{-1}} = \langle 0; 3 \rangle]$ |
| g) $f : y = \sin^2 x + \sin x - 2, D_f = (0; \pi)$ | □ |
| h) $f : y = \cos x, D_f = \langle 11\pi; 12\pi \rangle$ | $\left[f^{-1} : y = \arcsin x + \frac{23\pi}{2}, D_{f^{-1}} = \langle -1; 1 \rangle \right]$ |
| i) $f : y = 4 \arcsin(\sqrt{1-x^2}), D_f = \langle 0; 1 \rangle$ | $\left[f^{-1} : y = \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{x}{4}\right)}, D_{f^{-1}} = \langle 0; 2\pi \rangle \right]$ |
| j) $f : y = \ln(\cos x), D_f = \left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle$ | $\left[f^{-1} : y = \arccos(e^x), D_{f^{-1}} = \left\langle \ln \frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right\rangle \right]$ |
| k) $f : y = 2 \sin(3x), D_f = \left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right\rangle$ | $\left[f^{-1} : y = \frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{x}{2}\right), D_{f^{-1}} = \langle 0; 2 \rangle \right]$ |
| l) $f : y = \sqrt{1 + \sin x}, D_f = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ | $[f^{-1} : y = \arcsin(x^2 - 1), D_{f^{-1}} = \langle 0; \sqrt{2} \rangle]$ |
| m) $f : y = \frac{1}{5} e^{\cotg x}, D_f = (0; \pi)$ | $[f^{-1} : y = \operatorname{arccotg}(\ln 5x), D_{f^{-1}} = (0; +\infty)]$ |
| n) $f : y = \sin x, D_f = \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$ | $[f^{-1} : y = \arccos x + \frac{\pi}{2}, D_{f^{-1}} = \langle 0; 1 \rangle]$ |
| o) $f : y = 1 + 2 \operatorname{tg} x, D_f = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ | $\left[f^{-1} : y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right), D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \right]$ |
| p) $f : y = \arcsin(\sin x), D_f = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ | $[f^{-1} : y = \arcsin(\sin x), D_{f^{-1}} = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle]$ |
| q) $f : y = 2 \sin(4x), D_f = \left\langle -\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8} \right\rangle$ | $[f^{-1} : y = \frac{1}{4} \arcsin\left(\frac{x}{2}\right), D_{f^{-1}} = \langle -2; 2 \rangle]$ |
| r) $f : y = 4 \operatorname{tg}(4x), D_f = \left(-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}\right)$ | $\left[f^{-1} : y = \frac{1}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{4}\right), D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \right]$ |

Kapitola 4

Limita a spojitost funkce

Příklad 4.1. Vypočítejte limity:

a)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 1}{2x + 1}$	$\left[-\frac{3}{5} \right]$	b)	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin(2x)}{1 - \cos(4x)}$	$[1]$
c)	$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$	$[1]$	d)	$\lim_{x \rightarrow 4} \log(x^2 - 2x + 2)$	$[1]$
e)	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 x}{x}$	$\left[\frac{1}{\pi} \right]$	f*)	$\lim_{x \rightarrow 1} x \operatorname{arctg} x$	$\left[\frac{\pi}{4} \right]$
g*)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}$	$[1]$	h)	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2 + 11x + 6}{x^3 + 27}$	$\left[-\frac{7}{27} \right]$
i)	$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin(2x)}$	$\left[\frac{1}{2} \right]$	j)	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos(2x)}$	$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \right]$
k)	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x}$	$\left[\frac{3}{2} \right]$	l)	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 3x - 6}{2x^2 - 2x - 12}$	$\left[\frac{9}{10} \right]$
m)	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$	$\left[-\frac{2}{5} \right]$	m)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$	$\left[-\frac{1}{2} \right]$
o*)	$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2 - x} - \frac{x + 10}{8 - x^3} \right)$	$\left[-\frac{5}{12} \right]$	p)	$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x - 6}{\sqrt{x + 3} - 3}$	$[6]$
q*)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$	$[4]$	r*)	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2x}}$	$[4]$
s)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x + 3}}{x^3 - 1}$	$\left[-\frac{1}{12} \right]$	t)	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x - 1} - 2}{x^2 - 4x - 5}$	$\left[\frac{1}{24} \right]$
u)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$	$[0]$	v)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x}$	$\left[\frac{1}{2} \right]$
w)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$	$\left[\frac{1}{2} \right]$	x)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x} - 1}$	$[2]$
y)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^4 - 16}$	$\left[\frac{3}{8} \right]$	z)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$	$\left[\frac{1}{2} \right]$

Příklad 4.2. Vypočítejte limity:

<p>a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x}{x^4 + 3x^2 + 1}$ [0]</p>	<p>b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{5x^2 - x + 1}$ $\left[\frac{3}{5}\right]$</p>
<p>c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^2 + 2}{x^3 - x^2 + 1}$ $[+\infty]$</p>	<p>d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x - 1}{2x^2 + 5}$ $[+\infty]$</p>
<p>e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^5 - 2x + 2}$ [0]</p>	<p>f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x^2 + 1}{5x^3 + 2x - 1}$ $\left[\frac{2}{5}\right]$</p>
<p>g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ [-1]</p>	<p>h*) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4} + x)$ [0]</p>
<p>i*) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}$ [-1]</p>	<p>j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x - \sqrt{x}} - \sqrt{x})$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$</p>
<p>k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 + x - 3}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$</p>	<p>l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3}{\sqrt{3x^4 - 1}}$ $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$</p>
<p>m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x (\sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{x^2 - 9})$ [-9]</p>	<p>n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3}$ $\left[\frac{3}{7}\right]$</p>
<p>o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{\sqrt{2x^3 - 2x}}$ [0]</p>	<p>p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{1 + x^2} - x)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$</p>
<p>q*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 3}{2x + 1}\right)^{x+1}$ [e]</p>	<p>r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$</p>
<p>s) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + e^{1/x}}$ [1]</p>	<p>t) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg} x$ [0]</p>

Příklad 4.3. Vypočítejte limity:

<p>a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ [0]</p>	<p>b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos e^{x^2 + x + 1}}{x}$ [0]</p>
<p>c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(5x)}{2x}$ [0]</p>	<p>d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x^2}$ [0]</p>
<p>e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos(4x - \pi)}{2x}$ [0]</p>	<p>f) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg}(-x) \cdot \sin\left(\frac{2}{27x^3}\right)$ [0]</p>

Příklad 4.4. Vypočítejte limity:

<p>a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ [1]</p>	<p>b*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\sin x + x}$ [0]</p>
<p>c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x) + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin x}$ [3]</p>	<p>d) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)$ [1]</p>
<p>e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}$ [5]</p>	<p>f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(3x^2)}{x \cdot \operatorname{tg}(3x)}$ [1]</p>
<p>g*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{\sin(4x)}$ $\left[\frac{7}{4}\right]$</p>	<p>h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x^2)}{x \sin(3x)}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$</p>
<p>i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ [1]</p>	<p>j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^4(2x)}{x \operatorname{tg}(2x^3)}$ [8]</p>

Příklad 4.5. Vypočítejte limity:

<p>a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+x} - 2}{x}$ $\left[\frac{1}{12}\right]$</p>	<p>b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - 3}{x}$ $\left[\frac{1}{27}\right]$</p>
<p>c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt[3]{x+1}}$ [-3]</p>	<p>d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{1 - \sqrt[3]{x+1}}$ [-15]</p>
<p>e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$ [3]</p>	<p>f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$</p>

Příklad 4.6. Existují-li následující limity, určete jejich hodnotu:

a*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^2}$ $[-\infty]$	b*) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x + 1}$ [neex.]
c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x + 4}{x^2} - 2 \right)$ $[+\infty]$	d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x}$ [neex.]
e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 2)}{\operatorname{arctg} x}$ [neex.]	f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - 4}$ [neex.]
g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 1}{\sin x}$ [neex.]	h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1}$ [neex.]
i) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3}{(x + 2)^2}$ $[+\infty]$	j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}}{x}$ [neex.]

Příklad 4.7. Vypočítejte jednostranné limity:

a) $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{1 - x}$ $[-\infty]$	b) $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{1 - x}$ $[+\infty]$
c) $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ [2]	d) $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ [2]
e) $\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{1}{x + 1}$ $[+\infty]$	f) $\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{1}{x + 1}$ $[-\infty]$
g) $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{ x - 2 }{x - 2}$ [1]	h) $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{ x - 2 }{x - 2}$ [-1]
i) $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x}{x - 2}$ $[+\infty]$	j) $\lim_{x \rightarrow \pi+} \frac{1}{\sin x}$ $[-\infty]$
k) $\lim_{x \rightarrow 1-} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{1 - x} \right)$ $\left[\frac{\pi}{2} \right]$	l) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x$ $[+\infty]$

Příklad 4.8. Najděte všechny asymptoty grafu funkcí:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $[x = 0, y = 0]$

b) $f(x) = 5x + \frac{\sin x}{x}$ $[y = 5x]$

c) $f(x) = \frac{3x^2}{x-1}$ $[x = 1, y = 3x + 3]$

d) $f(x) = \frac{4+x^3}{4-x^2}$ $[x = \pm 2, y = -x]$

e) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ $[x = -1, y = 0]$

f) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ $[x = \pm 1, y = x]$

g) $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$ $[y = x \pm \frac{\pi}{2}]$

h) $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$ $[x = \pm 3, y = 0]$

i) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ $[x = 0, y = 0]$

j) $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$ $[x = 0, y = x]$

k) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ $[x = 1, y = 1]$

l) $f(x) = 3x + \frac{3}{x-2}$ $[x = 2, y = 3x]$

m) $f(x) = x + \frac{2x}{x^2-1}$ $[x = \pm 1, y = x]$

n) $f(x) = xe^{\frac{1}{x^2}}$ $[x = 0, y = x]$

o) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 4x^2}$ $[y = x + \frac{4}{3}]$

p) $f(x) = x + \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$ $[x = -\frac{1}{e}, y = x + \frac{1}{e}]$

q) $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 1}$ $[x = \pm 1, y = 2x + 1]$

r) $f(x) = \frac{4x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ $[x = \pm 1, y = \pm 4x]$

s) $f(x) = 2x - \arccos \frac{1}{x}$ $[y = 2x - \frac{\pi}{2}]$

t) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ $[x = 0, y = x + 1]$

u) $f(x) = \operatorname{arctg} x + 3x$ $[y = 3x \pm \frac{\pi}{2}]$

v) $f(x) = \sqrt{x^2 + x^{3/2}}$ $[\text{neex.}]$

w) $f(x) = x + e^{-x}$ $[y = x]$

x) $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ $[y = \pi]$

y) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ $[y = 0]$

z) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x-1}\right)$ $[y = \frac{\pi}{4}]$

Kapitola 5

Derivace funkce a geometrický význam derivace

Příklad 5.1. Vypočtete f' (výsledek upravte) a určete D_f a $D_{f'}$, jsou-li funkce f zadány předpisem:

- a) $f(x) = \frac{5}{3}x - 2 + \frac{2}{3x^2}$ $\left[\frac{5x^3 - 4}{3x^3} \right]$
- b) $f(x) = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x} + \frac{5}{3\sqrt[3]{x}}$ $\left[\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{5}{9\sqrt[3]{x^4}} \right]$
- c) $f(x) = \frac{5}{3\sqrt[4]{x^3}}$ $\left[\frac{-5}{4\sqrt[4]{x^7}} \right]$
- d) $f(x) = 3x^3 - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x^3}$ $\left[9x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^4} \right]$
- e) $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{3}\cotg x$ $\left[\frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{3\sin^2 x} \right]$
- f) $f(x) = 2x^3 + 5\sin x$ $\left[6x^2 + 5\cos x \right]$
- g) $f(x) = (x^2 - 1)(x^3 - 5)$ $\left[5x^4 - 3x^2 - 10x \right]$
- h) $f(x) = x^2\text{tg } x$ $\left[\frac{x(x + \sin(2x))}{\cos^2 x} \right]$
- i) $f(x) = (x^2 + 1)\ln x$ $\left[2x\ln x + x + \frac{1}{x} \right]$
- j) $f(x) = x^2\cotg x$ $\left[2x\cotg x - \frac{x^2}{\sin^2 x} \right]$
- k) $f(x) = \sqrt{x}\cos x$ $\left[\frac{\cos x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\sin x \right]$
- l) $f(x) = \sin x \cos x$ $\left[\cos(2x) \right]$
- m) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\arctg x$ $\left[\frac{2\arctg x}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+x^2} \right]$
- n) $f(x) = 2^x \log_2 x$ $\left[2^x \left(\ln 2 \cdot \log_2 x + \frac{1}{x \ln 2} \right), x > 0 \right]$
- o) $f(x) = \pi\sqrt{x}\arcsin x$ $\left[\frac{\pi \arcsin x}{2\sqrt{x}} + \frac{\pi\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (0, 1) \right]$
- p) $f(x) = \frac{x^3}{3}(e^x + e)$ $\left[x^2 \left(e^x \left(1 + \frac{x}{3} \right) + e \right), x \in \mathbb{R} \right]$
- q) $f(x) = xe^x \cos x$ $\left[e^x (\cos x + x(\cos x - \sin x)) \right]$

Příklad 5.2. Vypočítejte f' (výsledek upravte) a určete D_f a $D_{f'}$, jsou-li funkce f zadány předpisem:

a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$	$\left[\frac{1}{(1+x)^2} \right]$
b) $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$	$\left[\frac{1}{1 - \sin x} \right]$
c) $f(x) = \frac{e^x}{\sin x}$	$\left[\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x} \right]$
d) $f(x) = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$	$\left[\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2} \right]$
e) $f(x) = \frac{x + \sqrt[3]{x}}{x - \sqrt[3]{x}}$	$\left[\frac{-4\sqrt[3]{x}}{3(x - \sqrt[3]{x})^2} \right]$
f) $f(x) = \frac{\arctg x}{\log x}$	$\left[\frac{x \ln(10) \log x - (1+x^2) \arctg x}{(x+x^3) \ln(10) \log^2 x} \right]$
g) $f(x) = \frac{xe^x}{1+x^2}$	$\left[\frac{e^x(1+x-x^2+x^3)}{(1+x^2)^2} \right]$
h) $f(x) = \frac{(x^2+1)\arctg x}{\ln x}$	$\left[\frac{x(2x\arctg x + 1) \ln x - (x^2+1)\arctg x}{x \ln^2 x} \right]$
i) $f(x) = \frac{x^2 \ln x}{x+1}$	$\left[\frac{(2 \ln x + 1)(x^2 + x) - x^2 \ln x}{(x+1)^2} \right]$
j) $f(x) = 2e^{3x}$	$[6e^{3x}]$
k) $f(x) = 3 \ln(5x)$	$\left[\frac{3}{x} \right]$
l) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$	$\left[\frac{2x}{x^2 - 1} \right]$
m) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)$	$\left[\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} \right]$
n) $f(x) = \arctg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$\left[\frac{1}{1+x^2} \right]$
o) $f(x) = \frac{1}{(x^3-1)^2}$	$\left[\frac{-6x^2}{(x^3-1)^3} \right]$
p) $f(x) = 4 \ln\left(\frac{2}{x}\right)$	$\left[-\frac{4}{x}, x > 0 \right]$
q) $f(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$	$\left[\frac{2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(1+x^2)^4}}, x \in \mathbb{R} \right]$
r) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{(2-x)^2}\right)$	$\left[\frac{2}{2-x}, x \neq 2 \right]$
s) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$	$\left[\frac{-1}{x^2+x}, x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty) \right]$

Příklad 5.3. Vypočtete f' (výsledek upravte) a určete D_f a $D_{f'}$, jsou-li funkce f zadány předpisem:

- a) $f(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln(\cos x)$ $[\operatorname{tg}^3 x]$
- b) $f(x) = \arccos(1 - x^2)$ $\left[\frac{2\operatorname{sgn} x}{\sqrt{2 - x^2}} \right]$
- c) $f(x) = \ln(4 - x^2) + \arcsin\left(\frac{x - 2}{2}\right)$ $\left[\frac{2x}{x^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} \right]$
- d) $f(x) = \ln(1 + \cos x)$ $\left[\frac{-\sin x}{1 + \cos x} \right]$
- e) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{6x - 1}$ $\left[\frac{1}{2x\sqrt{6x - 1}} \right]$
- f) $f(x) = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{2x - x^2}$ $\left[\sqrt{\frac{x}{2 - x}} \right]$
- g) $f(x) = (x^2 + 4)\operatorname{arctg} \frac{x}{2} - 2x$ $\left[2x\operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right]$
- h) $f(x) = (x - 2)\sqrt{1 + e^x} - \ln\left(\frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1}\right)$ $\left[\frac{xe^x}{2\sqrt{1 + e^x}} \right]$
- i) $f(x) = \sqrt{\frac{1 - e^x}{1 + e^x}}$ $\left[\frac{-e^x}{(1 + e^x)\sqrt{1 - e^{2x}}} \right]$
- j) $f(x) = 2\sqrt{x + 1} + \ln\left(\frac{x + 2 - 2\sqrt{x + 1}}{x}\right)$ $\left[\frac{\sqrt{1 + x}}{x} \right]$
- k) $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$ $\left[\frac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}} \right]$
- l) $f(x) = \left(\frac{1}{1 - x}\right)^x$ $\left[\left(\frac{1}{1 - x}\right)^x \left(\frac{x}{1 - x} - \ln(1 - x)\right) \right]$
- m) $f(x) = (x^2 + 1)^{\operatorname{arctg} x}$ $\left[(x^2 + 1)^{\operatorname{arctg} x - 1} (2x\operatorname{arctg} x + \ln(x^2 + 1)) \right]$
- n) $f(x) = x^{\sin x}$ $\left[x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) \right]$
- o) $f(x) = (2x)^{3x+1}$ $\left[(2x)^{3x+1} \left(3 \ln(2x) + \frac{3x+1}{x} \right), x > 0 \right]$

Příklad 5.4. Vypočtete druhou derivaci f'' (výsledek upravte), jsou-li funkce f zadány předpisem:

- a) $f(x) = \sin^2 x$ $[2 \cos(2x)]$
- b) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$ $\left[\frac{2 \cos^2 x + 6 \sin^2 x}{\cos^4 x} \right]$
- c) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ $\left[\frac{1}{\sqrt{(1 + x^2)^3}} \right]$
- d) $f(x) = \ln(1 + \cos x)$ $\left[\frac{-1}{1 + \cos x} \right]$
- e) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ $\left[\frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} \right]$

Příklad 5.5. Vypočtete třetí derivaci f''' (výsledek upravte), jsou-li funkce f zadány předpisem:

- a) $f(x) = \cos^2 x$ $[4 \sin(2x)]$
- b) $f(x) = x \ln x$ $\left[-\frac{1}{x^2} \right]$
- c) $f(x) = xe^{2x}$ $[(12 + 8x)e^{2x}]$

Příklad 5.6. Určete rovnici tečny a normály v dotykovém bodě T ke grafu funkcí f daných předpisy:

- a) $f(x) = \frac{8}{4+x^2}$, $T[2, ?]$ $[t : x + 2y - 4 = 0, n : 2x - y - 3 = 0]$
- b) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1}$, $T[\sqrt{2}, ?]$ $\left[t : -\sqrt{2}x + 2y + \frac{4-\pi}{2} = 0 \right]$
- c) $f(x) = 4 - x^2$, $T[2, ?]$ $[t : 4x + y - 8 = 0, n : x - 4y + 2 = 0]$
- d) $f(x) = \operatorname{arccotg} \left(\frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} \right)$, $T[1, ?]$ $\left[t : y - x + 1 - \frac{\pi}{4} = 0 \right]$
- e) $f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}$, $T[1, ?]$ $[t : y + x - 1 = 0]$
- f) $f(x) = (x^2 - 1)^{\sin x}$, $T[\pi, ?]$ $[t : y + x \ln(\pi^2 - 1) + \pi \ln(\pi^2 - 1) - 1 = 0]$
- g) $f(x) = (\cos x)^{\cosh x} + 3x$, $T[0, ?]$ $[t : y - 3x - 1 = 0]$
- h) $f(x) = \ln x$, $T[e, ?]$ $[t : x - ey = 0, n : ex + y - 1 - e^2 = 0]$
- i) $f(x) = \left(\frac{1}{1-x^2} \right)^{\cosh x} + e^{2x}$, $T[0, ?]$ $\left[n : y + \frac{x}{2} + 2 = 0 \right]$
- j) $f(x) = (\sin x)^{2x} + x^2$, $T\left[\frac{\pi}{2}, ?\right]$ $\left[n : y + \frac{x}{\pi} - \frac{\pi^2}{4} - \frac{3}{2} = 0 \right]$
- k) $f(x) = (\cos x)^{\cosh x} + 3x$, $T[0, ?]$ $\left[n : y + \frac{x}{3} - 1 = 0 \right]$
- l) $f(x) = \ln \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)^{2x} + x^2$, $T\left[\frac{1}{2}, ?\right]$ $\left[n : y + \frac{3x}{8} - \frac{3}{16} + \frac{\ln 3}{2} = 0 \right]$
- m) $f(x) = (\sin x)^{x^2} + 3 \cos x$, $T\left[\frac{\pi}{2}, ?\right]$ $\left[n : y - \frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} - 1 = 0 \right]$
- n) $f(x) = (4 - x^2)^{\sin x} + 3 \cos x$, $T[0, ?]$ $\left[n : y + \frac{x}{\ln 4} - 4 = 0 \right]$

Příklad 5.7. Určete rovnice tečen ke grafu funkce f , které jsou rovnoběžné s přímkou p :

- a) $f(x) = x^3 - 12x$, $p : y = 2$ $[y = \pm 16]$
- b) $f(x) = x^3 + x - 2$, $p : y = 4x - 1$ $[y = 4x - 4, y = 4x + 15]$
- c) $f(x) = x^2 + 4x - 5$, $p : x + 4y = 0$ $\left[y = -\frac{1}{4}x - \frac{609}{64} \right]$

Příklad 5.8. Určete rovnice tečen ke grafu funkce f , které jsou kolmé k přímkě p :

- a) $f(x) = \frac{x^3}{6} + 2$, $p : x + 2y + 3 = 0$ $\left[y = 2x - \frac{5}{3}, y = 2x + \frac{11}{3} \right]$
- b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$, $p : 2x - 6y + 1 = 0$ $[y = -3x - 6]$
- c) $f(x) = \ln x$, $p : y - 2x - 1$ $\left[y = \frac{x}{2} - 1 + \ln 2 \right]$
- d) $f(x) = -\sqrt{x} + 2$, $p : y = -\frac{x}{2} + 4$ $[\text{nemá řešení}]$

Příklad 5.9. Určete derivaci $y'(x)$ funkce definované parametricky následujícími rovnicemi:

- a) $x = \operatorname{tg} t$, $y = \frac{\sin 2t}{2}$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\left[\frac{1 - \operatorname{tg}^2 t}{(1 + \operatorname{tg}^2 t)^2} \right]$
- b) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in (0, 2\pi)$ $[-\operatorname{tg} t]$

Příklad 5.10. Určete derivace $y'(x)$ a $y''(x)$ funkce definované parametricky následujícími rovnicemi:

- a) $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in (0, 2\pi)$ $\left[y' = -\frac{b}{a} \cotg t, y'' = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t} \right]$

Kapitola 6

Diferenciál, Taylorův polynom a další užití derivace

Příklad 6.1. Najděte diferenciál $df(x_0; h)$ v příslušném bodě x_0 pro následující funkce:

a) $f(x) = (\sin x)^{x^2} + x, x_0 = \frac{\pi}{2}$ [h]

b) $f(x) = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\cosh x} + e^{2x}, x_0 = 0$ [$2h$]

c) $f(x) = \left(\frac{1}{e^2-x^2}\right)^{\cosh x} + e^{-3x}, x_0 = 0$ [$-3h$]

d) $f(x) = (\sin x)^x + 2x, x_0 = \frac{\pi}{2}$ [$2h$]

e) $f(x) = \sqrt{x^2+1}, x_0 = 1$ [$\frac{1}{\sqrt{2}}h$]

f) $f(x) = 4x^2 + \sqrt[3]{x}, x_0 = -1$ [$-\frac{23}{3}h$]

g) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), x_0 = -1$ [h]

h) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ []

i) $f(x) = \sin^4 x$ []

j) $f(x) = \arcsin \frac{1}{x}$ []

k) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}, x_0 = 2$ [$-\frac{4}{9}h$]

Příklad 6.2. Pomocí diferenciálu určete přibližnou hodnotu (na 4 platné cifry):

a) $\sqrt{80}$ [$\doteq 8.9445$] b) $\ln(1.1)$ [$\doteq 0.1$] c*) $2^{1.003}$ [$\doteq 2.004$]

d) $\sqrt[3]{28}$ [$\doteq 3.037$] e) $e^{0.1}$ [$\doteq 1.1$] f) $3^{0.997}$ [$\doteq 2.990$]

g*) $\sqrt[4]{82}$ [$\doteq 3.009$] h) $\sqrt{382}$ [$\doteq 19.55$] i) $\sin(-0.01)$ [$\doteq -0.01$]

i) $\sqrt[3]{9}$ [$\doteq 2.083$] j) $\sqrt[5]{1.5}$ [$\doteq 1.1$] k) $\operatorname{arctg}(1.1)$ [$\doteq 0.8353$]

m) $\sqrt[4]{267}$ [$\doteq 4.043$] n) 1.04^5 [$\doteq 1.2$] k) $\sqrt[3]{30}$ [$\doteq 3.111$]

Příklad 6.3. Napište Taylorův polynom n -tého stupně $T_n(x)$ v okolí bodu x_0 pro následující funkce:

- a) $f : y = \ln x, x_0 = 1, n = 3$ $\left[\frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + (x-1) \right]$
- b) $f : y = \cos \frac{x}{2}, x_0 = \frac{\pi}{2}, n = 3$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{192} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{\sqrt{2}}{16} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$
- c) $f : y = e^{2x}, x_0 = 1, n = 3$ $\left[\frac{4}{3}e^2(x-1)^3 + 2e^2(x-1)^2 + 2e^2(x-1) + e^2 \right]$
- d) $f : y = \frac{1+x}{1-x}, x_0 = 0, n = 3$ $[1 + 2x + 2x^2 + 2x^3]$

Příklad 6.4. Napište Maclaurinův polynom n -tého stupně ($n \in \mathbb{N}$), funkce:

- a) $f : y = e^x$ $\left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right]$
- b) $f : y = \cos x$ $\left[1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}, n = 2m \right]$
- c) $f : y = \sin x$ $\left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{m+1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}, n = 2m-1 \right]$
- d) $f : y = \ln(1+x)$ \square
- e) $f : y = \frac{1}{1-x}$ \square
- f) $f : y = e^{x^2}$ \square
- g) $f : y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ \square

Příklad 6.5. Rozviňte podle mocnin $x - x_0$ následující polynomy:

- a) $f : y = x^3 - 2x + 5, x_0 = 1$ $[(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + (x-1) + 4]$
- b) $f : y = x^4 - 3x^2 - 10x - 11, x_0 = 2$ $[(x-2)^4 + 8(x-2)^3 + 21(x-2)^2 + 10(x-2) - 27]$
- c) $f : y = x^4 - 2x^2 + x + 2, x_0 = -1$ $[(x+1)^4 - 4(x+1)^3 + 4(x+1)^2 + (x+1)]$

Příklad 6.6. Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočítejte limity:

<p>a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(2x)} \quad \left[\frac{1}{2} \right]$</p>	<p>b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln x} \quad [1]$</p>
<p>c*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad \left[\frac{1}{2} \right]$</p>	<p>d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 8x + 15} \quad \left[-\frac{1}{2} \right]$</p>
<p>e*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad \left[\frac{1}{6} \right]$</p>	<p>f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{\sin^2(3x)} \quad \left[\frac{2}{9} \right]$</p>
<p>g*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} \quad [+\infty]$</p>	<p>h) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\cotg x} \quad [0]$</p>
<p>i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{\ln x} \quad [+\infty]$</p>	<p>j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} \quad [0]$</p>
<p>k) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right) \quad \left[\frac{1}{6} \right]$</p>	<p>l) $\lim_{x \rightarrow 1-} \ln x \cdot \ln(1 - x) \quad [0]$</p>
<p>m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x \quad [0]$</p>	<p>n) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \quad [1]$</p>
<p>o) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x} - \cotg x \right) \quad [0]$</p>	<p>p) $\lim_{x \rightarrow 0+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \quad [1]$</p>
<p>q*) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x} \quad [1]$</p>	<p>r) $\lim_{x \rightarrow 0+} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x)^{\cotg(2x)} \quad [e^3]$</p>
<p>s) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{x^4} \quad [0]$</p>	<p>t) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(3x))^{\frac{1}{x^2}} \quad \left[e^{-\frac{9}{2}} \right]$</p>
<p>u) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \right)^{\cotg(2x)} \quad [e]$</p>	<p>v) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - x} \quad [-1]$</p>
<p>w) $\lim_{x \rightarrow 1+} x^{\frac{1}{1-x}} \quad \left[\frac{1}{e} \right]$</p>	<p>x) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{arcsin} x}{3x} \quad \left[\frac{2}{3} \right]$</p>
<p>y) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\cotg x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right) \quad [-1]$</p>	<p>z) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2} \quad [1]$</p>

Kapitola 7

Průběh funkce

Příklad 7.1. Určete maximální intervaly ryzí momotonie následujících funkcí:

a) $f(x) = x^2 e^x$ [rostoucí na $(-\infty; -2)$, $\langle 0; +\infty$, klesající na $\langle -2; 0$]

b) $f(x) = 12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 60$ [rostoucí na $(-\infty; -1)$, $\langle 2; +\infty$, klesající na $\langle -1; 0$, $\langle 0; 2$]

c) $f(x) = x e^{-x^2}$ [rostoucí na $\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$, klesající na $(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\langle \frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty \rangle$]

d) $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$ [rostoucí na $\langle \sqrt{e}; +\infty$, klesající na $(0; 1) \cup (1; \sqrt{e}]$]

e*) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ [rostoucí na $\langle -1; 1$, klesající na $(-\infty; -1)$, $\langle 1; +\infty$]

f) $f(x) = x + |\sin(2x)|$ [rostoucí na $\langle \frac{3k-1}{3}\pi; \frac{3k+1}{3}\pi \rangle$, klesající na $\langle \frac{3k+1}{3}\pi; \frac{2k+2}{3}\pi \rangle$]

g) $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$ [rostoucí na $\langle 0; \frac{2}{\ln 2} \rangle$, klesající na $(-\infty; 0)$, $\langle \frac{2}{\ln 2}; +\infty \rangle$]

h) $f(x) = \sqrt[3]{(x^4 - 1)^2}$ [rostoucí na , klesající na]

i) $f(x) = x \ln^2 x$ [rostoucí na , klesající na]

j) $f(x) = x - \frac{1}{x}$ [rostoucí na $(-\infty; 0)$, $\langle 0; +\infty$]

k) $f(x) = \ln(1 + x - 4x^2)$ [rostoucí na $\langle \frac{1 - \sqrt{17}}{8}; \frac{1}{8} \rangle$, klesající na $\langle \frac{1}{8}; \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \rangle$]

Příklad 7.2. Určete lokální extrémy následujících funkcí:

- a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ [lok. min. $x = 3$, lok. max. $x = 1$]
 b) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ [lok. min. $x = e^{-2}$]
 c) $f(x) = \frac{10}{1 + \sin^2 x}$ [lok. min. $x = \frac{2k+1}{2}\pi$, lok. max. $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$]
 d) $f(x) = \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$ [lok. max. $x = 1$]
 e) $f(x) = e^x \sin x$ [lok. min. $x = \frac{8k-1}{4}\pi$, lok. max. $x = \frac{8k+3}{4}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$]
 f) $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$ [lok. min. $x = 0$, lok. max. $x = 1$]
 g) $f(x) = x^3 e^{x^2}$ [lok. extrém neex.]
 h) $f(x) = x + 2\operatorname{arccotg} x$ [lok.]
 i) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ [lok. min. $x = -1$, lok. max. $x = 1$]
 j) $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-1}$ [lok. max. $x = e + 1$]
 k) $f(x) = \frac{1-x^3}{x^2}$ [lok. min. $x = \sqrt[3]{-2}$]

Příklad 7.3. Určete maximální intervaly ryzí monotonie a lokální extrémy funkce f (pokud existují):

- a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ [rostoucí na $\langle \frac{5}{4}; +\infty \rangle$, klesající na $(-\infty; \frac{5}{4})$, $\frac{5}{4}$]
 b*) $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ [rostoucí na $\langle 1; e^2 \rangle$, klesající na $(0; 1)$, $\langle e^2; +\infty \rangle$, e^2]
 c) $f(x) = \frac{x-1}{x}$ [rostoucí na $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$]
 d) $f(x) = \sqrt[3]{(x^4 - 1)^2}$ [rostoucí na $\langle -1; 0 \rangle$, $\langle 1; +\infty \rangle$, klesající na $(-\infty; -1)$, $\langle 0; 1 \rangle$, 0 , 1]
 e) $f(x) = 3 - 2\sqrt[3]{x^2}$ [rostoucí na $(-\infty; 0)$, klesající na $\langle 0; +\infty \rangle$, 0]
 f*) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ [rostoucí na $(-\infty; 0)$, $\langle 1; +\infty \rangle$, klesající na $(0; 1)$, 1]
 g*) $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$ [rostoucí na $\langle 0; 4 \rangle$, klesající na $\langle 4; 8 \rangle$, 4]
 h*) $f(x) = e^{x^3 - 12x}$ [rostoucí na $(-\infty; -2)$, $\langle 2; +\infty \rangle$, klesající na $\langle -2; 2 \rangle$, -2 , 2]
 i) $f(x) = 2x + 9\sqrt[3]{(1-x)^2}$ [rostoucí na $(-\infty; -26)$, $\langle 1; +\infty \rangle$, klesající na $\langle -26; 1 \rangle$, -26 , 1]

Příklad 7.4. Najděte maximální intervaly ryzí konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkcí:

- a) $f(x) = x^3 + 3x$ [konvexní na $\langle 0; +\infty \rangle$, konkávní na $(-\infty; 0)$, 0]
- b) $f(x) = \ln(x + 2)$ [konkávní na $(-2; +\infty)$]
- c) $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1}$ [konvexní na $(-\infty; -\sqrt[3]{2})$, $(1; +\infty)$, konkávní na $\langle -\sqrt[3]{2}; 1 \rangle$, $-\sqrt[3]{2}$]
- d) $f(x) = x^2 - 1 + \sqrt[3]{x^2}$ [konvexní na $\left(-\infty; -\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$, $\left\langle \frac{1}{3\sqrt{3}}; +\infty \right\rangle$,
konkávní na $\left\langle -\frac{1}{3\sqrt{3}}; 0 \right\rangle$, $\left\langle 0; \frac{1}{3\sqrt{3}} \right\rangle$, $\pm \frac{1}{3\sqrt{3}}$]
- e) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$ [konvexní na $\langle -\sqrt{3}; 0 \rangle$, $\langle \sqrt{3}; +\infty \rangle$,
konkávní na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $\langle 0; \sqrt{3} \rangle$, $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$]
- f) $f(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ [konvexní na $\left\langle \frac{4k+1}{2}\pi; \frac{4k+3}{2}\pi \right\rangle$,
konkávní na $\left\langle 2k\pi; \frac{4k+1}{2}\pi \right\rangle$, $\left\langle \frac{4k+3}{2}\pi; (2k+2)\pi \right\rangle$, $\frac{4k+1}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$]
- g) $f(x) = x - \ln(x^2 - 9)$ [konvexní na $(-\infty; -3)$, $(3; +\infty)$]
- h) $f(x) = e^{2x-x^2}$ [konvexní na $\left(-\infty; 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$, $\left\langle 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}; +\infty \right\rangle$,
konkávní na $\left\langle 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}; 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \right\rangle$, $1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$]
- i) $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$ [konvexní na $\langle -4; 1 \rangle$, $(1; +\infty)$, konkávní na $(-\infty; -4)$, -4]
- j) $f(x) = 3x^2 - x^3$ [konvexní na $(-\infty; 1)$, konkávní na $(1; +\infty)$, 1]
- k) $f(x) = x + x^{5/3}$ [konvexní na $(-\infty; 0)$, konkávní na $(0; +\infty)$, 0]
- l) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ [konvexní na $(-\infty; +\infty)$]
- m) $f(x) = x + \sin x$ [konvexní na $\langle (2k-1)\pi; 2k\pi \rangle$, konkávní na $\langle 2k\pi; (2k+1)\pi \rangle$, $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$]
- n) $f(x) = x^x$ [konvexní na $(0; +\infty)$]

Příklad 7.5. Vyšetřete průběh funkcí:

- a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$
 $[D_f = \mathbb{R}$, rostoucí na $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$, klesající na $(-1; 1)$, lok. min. $x = 1$, lok. max. $x = -1$,
konvexní na $(0; +\infty)$, konkávní na $(-\infty; 0)$]
- b) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$
 $[D_f = \mathbb{R}$, rostoucí na $(-1; 1)$, klesající na $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$, lok. min. $x = -1$, lok. max. $x = 1$,
konvexní na $(-\sqrt{3}; 0)$, $(\sqrt{3}; +\infty)$, konkávní na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(0; \sqrt{3})$, asymptoty $y = 0$]
- c) $f(x) = \frac{x}{3 - x^2}$
 $[D_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$, rostoucí na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; +\infty)$,
konvexní na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(0; \sqrt{3})$, konkávní na $(-\sqrt{3}; 0)$, $(\sqrt{3}; +\infty)$, asymptoty $x = \pm\sqrt{3}$, $y = 0$]
- d) $f(x) = \ln(4 - x^2)$
 $[D_f = (-2; 2)$, rostoucí na $(-2; 0)$, klesající na $(0; 2)$, lok. max. $x = 0$, konkávní na $(-2; 2)$,
asymptoty $x = \pm 2$]
- e) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$
 $[D_f = (-1; 1)$, rostoucí na $(-1; 1)$, konkávní na $(-1; 0)$, konvexní na $(0; 1)$, asymptoty $x = \pm 1$]
- f) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$ □
- g) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$
 $[D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, rostoucí na $(-\infty; 0)$, $(1; +\infty)$, klesající na $(0; 1)$, lok. min. $x = 1$,
konvexní na $(0; +\infty)$, konkávní na $(-\infty; 0)$]
- h) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ □
- i) $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ □
- j) $f(x) = (x+1)(x-2)^2$
 $[D_f = \mathbb{R}$, rostoucí na $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$, klesající na $(0; 2)$, lok. min. $x = 2$, lok. max. $x = 0$,
konvexní na $(1; +\infty)$, konkávní na $(-\infty; 1)$]
- k) $f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$
 $\left[D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$, rostoucí na $\left(-\infty; \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}\right)$, $(-1; 0)$, $\left(\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}; +\infty\right)$,
klesající na $\left(\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}; -1\right)$, $\left(0; \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}\right)$ lok. min. $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$,
lok. max. $x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$, 0 , konvexní na $(-\infty; -1)$, $\left(-1; \frac{1}{5}\right)$, konkávní na $\left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$,
asymptoty $x = -1$, $y = x - 3$]
- l) $f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$
 $[D_f = (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$, rostoucí na $(-2\sqrt{2}; -2)$, $(0; 2)$, klesající na $(-2; 0)$, $(2; 2\sqrt{2})$, lok. min. $x = 0$,
lok. max. $x = \pm 2$, konkávní na $(-2\sqrt{2}; 0)$, $(0; 2\sqrt{2})$]

m) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

$[D_f = \mathbb{R}, \text{ rostoucí na } \langle -\frac{1}{2}; +\infty \rangle, \text{ klesající na } \langle -\infty; -\frac{1}{2} \rangle, \text{ lok. min. } x = -\frac{1}{2},$

konvexní na $\langle \frac{-3-\sqrt{41}}{8}; \frac{-3+\sqrt{41}}{8} \rangle, \text{ konkávní na } \langle -\infty; \frac{-3-\sqrt{41}}{8} \rangle, \langle \frac{-3+\sqrt{41}}{8}; +\infty \rangle,$

asymptoty $y = \pm 1$]

n) $f(x) = \cos x - \sin x$ □

o) $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$

$[D_f = \mathbb{R}, 2\pi\text{-periodická, rostoucí na } \langle -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \rangle, \text{ klesající na } \langle \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \rangle,$

lok. min. $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \text{ lok. max. } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$

konvexní na $\langle (2k+1)\pi; 2(k+1)\pi \rangle, \text{ konkávní na } \langle 2k\pi; (2k+1)\pi \rangle, k \in \mathbb{Z}$]

p) $f(x) = (1+x^2)e^{-x^2}$ □

q) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

$[D_f = \mathbb{R}, \text{ rostoucí na } \mathbb{R}, \text{ konkávní na } \langle 0; +\infty \rangle, \text{ konvexní na } \langle -\infty; 0 \rangle]$

r) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$

$[D_f = \mathbb{R}, \text{ rostoucí na } \langle -\infty; 0 \rangle, \text{ klesající na } \langle 0; +\infty \rangle, \text{ lok. max. } x = 0,$

konvexní na $\langle -\infty; 1 \rangle, \langle -1; +\infty \rangle, \text{ konkávní na } \langle -1; 1 \rangle,]$

s) $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$

$[D_f = (0; +\infty), \text{ rostoucí na } (0; +\infty), \text{ konvexní na } \langle e^{\frac{3}{2}}; +\infty \rangle, \text{ konkávní na } (0; e^{\frac{3}{2}}),$

asymptoty $x = 0, y = x]$

t) $f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}$

$[D_f = \mathbb{R} - \{-1\}, \text{ rostoucí na } \langle -\infty; -4 \rangle, \langle 0; +\infty \rangle, \text{ klesající na } \langle -4; -1 \rangle, \langle -1; 0 \rangle,$

konkávní na $\langle -\infty; -1 \rangle, \text{ konvexní na } \langle -1; +\infty \rangle, \text{ asymptoty } x = -1, y = x - 3]$

u) $f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$ □

- v) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$
 $[D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$, klesající na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; \infty)$, konkávní na $(-\infty; -1)$, $\langle 0; 1$,
konvexní na $(-1; 0)$, $(1; \infty)$, asymptoty $x = \pm 1$, $y = 0]$
- w) $f(x) = 3 - \sqrt[3]{x - 2}$
 $[D_f = \mathbb{R}$, klesající na \mathbb{R} , konkávní na $(-\infty; 2)$, konvexní na $\langle 2; \infty)$]
- x) $f(x) = (x^2 - 1)e^x$
 $[D_f = \mathbb{R}$, rostoucí na $(-\infty; -\sqrt{2} - 1)$, $\langle \sqrt{2} - 1; +\infty)$, klesající na $\langle -\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} - 1)$,
lok. max. $x = -\sqrt{2} - 1$, lok. min. $x = \sqrt{2} - 1$, konkávní na $\langle -\sqrt{3} - 2; \sqrt{3} - 2)$,
konvexní na $(-\infty; -\sqrt{3} - 2)$, $\langle \sqrt{3} - 2; \infty)$, asymptoty $y = 0]$
- y) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$
 $[D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$, rostoucí na $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, klesající na $\langle 0; 1)$, $(1; \infty)$, lok. max. $x = 0$,
konkávní na $(-1; 1)$, konvexní na $(-\infty; -1)$, $(1; \infty)$, asymptoty $x = \pm 1$, $y = 1]$
- z) $f(x) = \frac{x^3}{3 - x^2}$
 $[D_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$, rostoucí na $\langle -3; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; 3)$, klesající na $(-\infty; -3)$, $\langle 3; \infty)$,
lok. max. $x = 3$, lok. min. $x = -3$, konkávní na $(-\sqrt{3}; 0)$, $(\sqrt{3}; \infty)$, konvexní na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $\langle 0; \sqrt{3})$,
asymptoty $x = \pm\sqrt{3}$, $y = -x]$

Kapitola 8

Primitivní funkce

Příklad 8.1. Integrujte rozkladem a přímou metodou dané funkce:

a*) $\int \left(x^3 - \frac{1}{x} + \frac{\sqrt[4]{x}}{2} \right) dx$	$\left[\frac{x^4}{4} - \ln x + \frac{2}{5} x \sqrt[4]{x} \right]$
b) $\int \frac{(x+2)^3}{x^3} dx$	$\left[x + 6 \ln x - \frac{12}{x} - \frac{4}{x^2} \right]$
c) $\int \frac{x^5 + 2x^4 - x^2}{x^3} dx$	$\left[\frac{x^3}{3} + x^2 - \ln x \right]$
d*) $\int \left(\frac{3}{x^4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$	$\left[-\frac{1}{x^3} + 2\sqrt{x} \right]$
e) $\int (3\sqrt[5]{x} - 7x) dx$	$\left[\frac{5x^{6/5} - 7x^2}{2} \right]$
f) $\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3} dx$	$\left[x - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x} \right]$
g) $\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx$	$\left[x - 2 \ln x - \frac{1}{x} \right]$
h) $\int \left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$	$\left[\frac{x^2}{2} + \ln x + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + 2\sqrt{x} \right]$
i) $\int \left(\frac{14\sqrt{x^3}}{3} - \frac{11}{x^{5/3}} - \frac{4}{3x^2} \right) dx$	$\left[\frac{28x^{5/2}}{15} + \frac{33}{2x^{2/3}} + \frac{4}{3u} \right]$
j) $\int (x^3 - 3x^2 + 4x - 7) dx$	$\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x^2 - 7x \right]$
k) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{3x}} + (3-2x)^2 \right) dx$	$\left[\frac{8}{3} \sqrt{3x} + 9x - 6x^2 + \frac{4}{3} x^3 \right]$
l) $\int x(2x-5) dx$	$\left[\frac{2}{3} x^3 - \frac{5}{2} x^2 \right]$
m) $\int \frac{x^4 - 10x^2 + 5}{x^2} dx$	$\left[\frac{x^3}{3} - 10x - \frac{5}{x} \right]$
n) $\int \left(\sqrt{2x} + \sqrt{\frac{2}{x}} \right) dx$	$\left[2\sqrt{2x} \left(\frac{x}{3} + 1 \right) \right]$
o) $\int \frac{4x - 2\sqrt{x}}{x} dx$	$[4(x - \sqrt{x})]$
p) $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$	$\left[\frac{2}{5} x^{5/2} + x \right]$

Příklad 8.2. Integrujte rozkladem a přímou metodou dané funkce:

- a) $\int \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$ $[x - 3x^{2/3} + 3x^{1/3}]$
- b) $\int \sqrt{x}(1 - x^2) dx$ $\left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{3}x^{7/2}\right]$
- c) $\int \frac{\sqrt{x^4 + 2 + x^{-4}}}{x^3} dx$ $\left[\ln|x| - \frac{1}{4x^4}\right]$
- d) $\int \frac{2 - x^2}{x + \sqrt{2}} dx$ $\left[\sqrt{2}x - \frac{x^2}{2}\right]$
- e) $\int \left(\frac{(2\sqrt{x} + 1)^2}{x^2} + \cos^{-2} x\right) dx$ $\left[4 \ln|x| - \frac{8}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + \operatorname{tg} x\right]$
- f) $\int \left(\sin x - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$ $[-\cos x - \operatorname{tg} x]$
- g) $\int \frac{5 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}{2 \sin^2 x \cos^2 x} dx$ $\left[\frac{5 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{cotg} x}{2}\right]$
- h) $\int \frac{1}{2} \sqrt{e^x} dx$ $[\sqrt{e^x}]$
- i*) $\int \frac{3 - 2 \operatorname{cotg}^2 x}{\cos^2 x} dx$ $[3 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{cotg} x]$
- j) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ $[\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x]$
- k) $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right) dx$ $[e^x + \operatorname{tg} x]$
- l) $\int \frac{4}{\sqrt{4 - 4x^2}} dx$ $[2 \arcsin x]$
- m) $\int e^x \left(1 + \frac{e^x}{3}\right) dx$ $\left[e^x + \frac{e^{2x}}{6}\right]$
- n) $\int \frac{3 + e^{-x} \sin x}{e^{-x}} dx$ $[3e^x - \cos x]$
- o) $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x} dx$ $[e^x + e^{-x}]$
- p) $\int \frac{-4}{\sqrt{16 - 16x^2}} dx$ $[\arccos x]$
- q) $\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 - x^4}} dx$ $[\arcsin x]$

Příklad 8.3. Integrujte metodou per partes dané funkce:

- a) $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$ $\left[\frac{(x^2 + 1)}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} \right]$
- b*) $\int x \cos x \, dx$ $[x \sin x + \cos x]$
- c) $\int x \sin x \, dx$ $[\sin x - x \cos x]$
- d) $\int (3x + 2) \cos x \, dx$ $[3 \cos x + (3x + 2) \sin x]$
- e*) $\int x^3 e^x \, dx$ $[x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x]$
- f) $\int x^2 \cos x \, dx$ $[x^2 \sin x - 2 \sin x + 2x \cos x]$
- g) $\int x^2 \cos^2 x \, dx$ $\left[\frac{x^3}{6} + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} \right) \sin(2x) + \frac{x}{4} \cos^2 x \right]$
- h) $\int (x^2 - 3x + 2) e^x \, dx$ $[e^x (x^2 - 5x + 7)]$
- i) $\int x^2 \ln x \, dx$ $\left[\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{x^3}{9} \right]$
- j) $\int x^3 \operatorname{arctg} x \, dx$ $\left[\frac{\operatorname{arctg} x}{4} (x^4 - 1) - \frac{x^3 - 3x}{12} \right]$
- k) $\int \operatorname{arctg} x \, dx$ $\left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]$
- l) $\int x \arcsin x \, dx$ $\left[\frac{x^2 \arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} - \frac{\arcsin x}{4} \right]$
- m) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ $\left[\frac{1}{2} \arcsin^2 x \right]$
- n) $\int e^x \cos x \, dx$ $\left[\frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) \right]$
- o) $\int e^x \sin x \, dx$ $\left[\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \right]$
- p) $\int e^x \sin^2 x \, dx$ $\left[\frac{1}{5} e^x \sin x (\sin x - 2 \cos x) + \frac{2}{5} e^x \right]$
- q) $\int x e^x \, dx$ $[e^x (x - 1)]$
- r) $\int \ln x \, dx$ $[x \ln x - x]$
- s) $\int x \ln x \, dx$ $\left[\frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) \right]$
- t) $\int \cos^2 x \, dx$ $\left[\frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) \right]$
- u) $\int \sin^2 x \, dx$ $\left[\frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) \right]$

Příklad 8.4. Integrujte pomocí substituční metody dané funkce:

- a) $\int \sin^3 x \cos x \, dx$ $\left[\frac{1}{4} \sin^4 x \right]$
- b) $\int 6x \sin(3x^2) \, dx$ $[-\cos(3x^2)]$
- c) $\int \frac{4 \operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} \, dx$ $[\operatorname{tg}^4 x]$
- d) $\int \cos x \cdot \sqrt{\sin x} \, dx$ $\left[\frac{2(\sin x)^{3/2}}{3} \right]$
- e) $\int -4xe^{-2x^2} \, dx$ $[e^{-2x^2}]$
- f) $\int 6x^2 e^{-2x^3} \, dx$ $[-e^{-2x^3}]$
- g) $\int 2e^{2 \sin x} \cos x \, dx$ $[e^{2 \sin x}]$
- h) $\int \frac{3 \ln^2 x}{x} \, dx$ $[\ln^3 x]$
- i) $\int \frac{3\sqrt{\ln x}}{x} \, dx$ $[2 \ln^{3/2} x]$
- j) $\int \frac{2x}{(1+x^2)^2} \, dx$ $\left[\frac{-1}{1+x^2} \right]$
- k) $\int \frac{8x^2}{\sqrt[3]{(8x^3+27)^2}} \, dx$ $[\sqrt[3]{8x^3+27}]$
- l) $\int \frac{5x^4}{2\sqrt{4+x^5}} \, dx$ $[\sqrt{4+x^5}]$
- m) $\int \frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+6}} \, dx$ $[\sqrt{3x^2-5x+6}]$
- n) $\int \frac{3 \cos x}{\sin^4 x} \, dx$ $\left[\frac{-1}{\sin^3 x} \right]$
- o) $\int \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos^3 x}} \, dx$ $\left[\frac{1}{\sqrt{\cos x}} \right]$
- p) $\int \frac{4 \cos x}{\sqrt[3]{1+2 \sin x}} \, dx$ $[3(1+2 \sin x)^{2/3}]$
- q) $\int \frac{\sin(2x)}{2\sqrt{1+\cos^2 x}} \, dx$ $[-\sqrt{1+\cos^2 x}]$
- r) $\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} \, dx$ $[\ln |\ln(\ln x)|]$
- s) $\int \frac{6x}{\sqrt{4-9x^4}} \, dx$ $\left[\arcsin \frac{3x^2}{2} \right]$
- t) $\int \frac{2e^x}{\sqrt{2-4e^{2x}}} \, dx$ $[\arcsin(\sqrt{2}e^x)]$
- u) $\int 6 \operatorname{tg}(3x) \, dx$ $[-2 \ln |\cos(3x)|]$

Příklad 8.5. Integrujte pomocí substituční metody dané funkce:

- a) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$ [arcsin(ln x)]
- b) $\int \frac{30x}{3x^4+5} dx$ [$\sqrt{15} \operatorname{arctg} \frac{x^2\sqrt{15}}{5}$]
- c) $\int \frac{18x}{9+(3x^2+1)^2} dx$ [$\operatorname{arctg} \left(x^2 + \frac{1}{3}\right)$]
- d) $\int \frac{-2}{\operatorname{tg} x \sin^2 x} dx$ [$\frac{1}{\sin^2 x}$]
- e) $\int 4 \sin x \cos^3 x dx$ [-cos⁴ x]
- f) $\int \frac{2 \ln x}{x} dx$ [ln² x]
- g) $\int \frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$ [arctg² x]
- h) $\int \sqrt{1+2x} dx$ [$\frac{(1+2x)^{3/2}}{3}$]
- i) $\int \frac{1}{\sqrt{5-4x}} dx$ [$-\frac{\sqrt{5-4x}}{2}$]
- j) $\int \frac{3x}{(x^2+1)^2} dx$ [$-\frac{3}{2(x^2+1)}$]
- k) $\int x\sqrt{2x^2+7} dx$ [$\frac{(2x^2+7)^{3/2}}{6}$]
- l) $\int 9x^2\sqrt[3]{x^3+10} dx$ [$\frac{9(x^3+10)^{4/3}}{4}$]
- m) $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{8-x^2}} dx$ [-3(8-x²)^{2/3}]
- n) $\int \frac{7}{(1+2x)^3} dx$ [$\frac{-7}{4(1+2x)^2}$]
- o) $\int 3 \cos^4 x \sin x dx$ [$-\frac{3}{5} \cos^5 x$]
- p) $\int \frac{x}{x^2-1} dx$ [$\frac{1}{2} \ln |x^2-1|$]
- q) $\int \frac{1}{\cos^2(1-x)} dx$ [tg(x-1)]
- r) $\int \frac{\cos x}{3 \sin^{2/3} x} dx$ [$\sqrt[3]{\sin x}$]
- s) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x} dx$ [ln |arcsin x|]
- t) $\int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$ [$\frac{1}{2} (-\operatorname{arctg}^2 x + \ln(1+x^2))$]
- u) $\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} dx$ [arctg(ln x)]

Příklad 8.6. Integrujte pomocí substituční metody dané funkce:

- a) $\int (4x - 3)^4 dx$ $\left[\frac{(4x - 3)^5}{20} \right]$
- b) $\int (2x + 1)^3 dx$ $\left[\frac{(2x + 1)^4}{8} \right]$
- c) $\int \frac{1}{6} \left(1 - \frac{x}{6}\right)^{-2} dx$ $\left[\frac{6}{6 - x} \right]$
- d) $\int \frac{12}{(3x - 7)^5} dx$ $\left[-\frac{1}{(3x - 7)^4} \right]$
- e) $\int \frac{1}{x^2 - 6x + 9} dx$ $\left[-\frac{1}{x - 3} \right]$
- f) $\int 33(8 - 3x)^{6/5} dx$ $\left[-5(8 - 3x)^{11/5} \right]$
- g) $\int \sqrt[3]{5 - 6x} dx$ $\left[-\frac{(5 - 6x)^{4/3}}{8} \right]$
- h) $\int \frac{1}{\sqrt{4x + 9}} dx$ $\left[\frac{\sqrt{4x + 9}}{2} \right]$
- i) $\int \frac{1}{\sqrt{3 - 2x}} dx$ $\left[-\sqrt{3 - 2x} \right]$
- j) $\int \sin(2x - 5) dx$ $\left[-\frac{1}{2} \cos(2x - 5) \right]$
- k) $\int \frac{1}{\sin^2(3x - 7)} dx$ $\left[-\frac{1}{3} \cotg(3x - 7) \right]$
- l) $\int \frac{1}{\cos^2(8x)} dx$ $\left[\frac{1}{8} \operatorname{tg}(8t) \right]$
- m) $\int \frac{4}{1 - \cos(4x)} dx$ $\left[-\cotg(2x) \right]$
- n) $\int 14e^{7x-8} dx$ $\left[2e^{7x-8} \right]$
- o) $\int 3e^{-3x+1} dx$ $\left[-e^{-3x+1} \right]$
- p) $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x} dx$ $\left[e^x + \frac{1}{e^x} \right]$
- q) $\int \frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{2} dx$ $\left[e^{x/2} + e^{-x/2} \right]$

Příklad 8.7. Integrujte pomocí substituční metody dané funkce:

- a) $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$ $[\operatorname{arctg}(x + 2)]$
- b) $\int \frac{3}{x^2 + 3x + 3} dx$ $\left[2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}(2x + 3)}{3} \right]$
- c) $\int \frac{2}{1 - 3x + 3x^2 - x^3} dx$ $\left[\frac{1}{(1 - x)^2} \right]$
- d) $\int \frac{2}{x^2 - 2x + 5} dx$ $\left[\operatorname{arctg} \frac{x - 1}{2} \right]$
- e) $\int \frac{1}{\sqrt{1 - (2x + 3)^2}} dx$ $\left[\frac{1}{2} \arcsin(2x + 3) \right]$
- f) $\int \frac{50}{\sqrt{1 - (25x)^2}} dx$ $[2 \arcsin(25x)]$
- g) $\int \frac{2}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} dx$ $\left[2 \arcsin \frac{x - 1}{2} \right]$
- h) $\int \frac{1}{\sqrt{-2x - x^2}} dx$ $[\arcsin(x + 1)]$
- i) $\int \frac{3}{\sqrt{2x - x^2}} dx$ $[3 \arcsin(x - 1)]$
- j) $\int \frac{5}{\sqrt{36 - (5x)^2}} dx$ $\left[\arcsin \frac{5x}{6} \right]$
- k) $\int \frac{1}{1 + (x + 1)^2} dx$ $[\operatorname{arctg}(x + 1)]$
- l) $\int \frac{2}{x^2 - 2x + 5} dx$ $\left[\operatorname{arctg} \frac{x - 1}{2} \right]$
- m) $\int \frac{5}{1 + (2 - 5x)^2} dx$ $[\operatorname{arctg}(5x - 2)]$

Příklad 8.8. Integrujte pomocí rozkladu na parciální zlomky dané funkce:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} & \int \frac{x}{(x+1)(2x+1)} dx \quad \left[\ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|2x+1| \right] \\
 \text{b)} & \int \frac{x}{2x^2-3x-2} dx \quad \left[\frac{2}{5} \ln|x-2| + \frac{1}{10} \ln|2x+1| \right] \\
 \text{c)} & \int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4} dx \quad [-\ln|x-2| + 3\ln|x-1| - 2\ln|x+2|] \\
 \text{d)} & \int \frac{33}{6x^3-7x^2-3x} dx \quad [9\ln|3x+1| - 11\ln|x| + 2\ln|2x-3|] \\
 \text{e)} & \int \frac{1}{x(2+x)} dx \quad \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{2+x} \right| \right] \\
 \text{f)} & \int \frac{12(x-1)}{(x+1)(x^2-4)} dx \quad [\ln|x-2| + 8\ln|x+1| - 9\ln|x+2|] \\
 \text{g)} & \int \frac{32x}{(2x-1)(4x^2-16x+15)} dx \quad [\ln|2x-1| + 5\ln|2x-5| - 6\ln|2x-3|] \\
 \text{h)} & \int \frac{6(x^3+1)}{x^3-5x^2+6x} dx \quad [6x - 27\ln|x-2| + \ln|x| + 56\ln|x-3|] \\
 \text{i)} & \int \frac{1}{6+x-x^2} dx \quad \left[\frac{1}{5} \ln \left| \frac{2+x}{3-x} \right| \right] \\
 \text{j)} & \int \frac{18(3x^2+1)}{x^4-3x^2+2x} dx \quad \left[\frac{-24}{x-1} + \ln \frac{|x|^9|x-1|^4}{|x+2|^{13}} \right] \\
 \text{k)} & \int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x} dx \quad \left[2\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} \right] \\
 \text{l)} & \int \frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} dx \quad \left[-\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} \right] \\
 \text{m)} & \int \frac{2(x^2-4x+5)}{x+3} dx \quad [x^2 - 14x + 52\ln|x+3|] \\
 \text{n)} & \int \frac{x}{x^2-x-2} dx \quad \left[\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{2}{3} \ln|x-2| \right] \\
 \text{o)} & \int \frac{1}{(3+x)(1+2x+x^2)} dx \quad \left[\frac{-1}{2(1+x)} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{3+x}{1+x} \right| \right] \\
 \text{p)} & \int \frac{x}{4-4x+x^2} dx \quad \left[\frac{2}{2-x} + \ln|2-x| \right] \\
 \text{q)} & \int \frac{1}{x(16-24x+9x^2)} dx \quad \left[\frac{1}{16} \left(\frac{4}{4-3x} + \ln \left| \frac{x}{3x-4} \right| \right) \right] \\
 \text{r)} & \int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2} dx \quad \left[\frac{-1}{x+2} + 2\ln \left| \frac{x+4}{x+2} \right| - \frac{4}{x+4} \right] \\
 \text{s)} & \int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x^2-x-12)} dx \quad \left[\ln \left| \frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7} \right| \right] \\
 \text{t)} & \int \frac{1}{2x^2+9x-5} dx \quad \left[\frac{1}{11} \ln \left| \frac{2x-1}{x+5} \right| \right] \\
 \text{u)} & \int \frac{3x^3-5x^2+8x}{(x^2-2x+1)(x^2-1)} dx \quad \left[-\frac{3}{2(x-1)} - \frac{2}{x-1} + \ln|(x-1)(x+1)^2| \right]
 \end{array}$$

Příklad 8.9. Integrujte pomocí rozkladu na parciální zlomky dané funkce:

- a) $\int \frac{9x - 5}{9x^2 - 6x + 1} dx$ $\left[\frac{2}{3(3x - 1)} + \ln |3x - 1| \right]$
- b) $\int \frac{x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 - 2}{x^4 - 1} dx$ $\left[\frac{x^2}{2} + x + \ln(|x^2 - 1|\sqrt{x^2 + 1}) + \operatorname{arctg} x \right]$
- c) $\int \frac{x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x - 2} dx$ $\left[\frac{x^3}{3} + \ln \sqrt[3]{|x - 1|^5 |x + 2|} \right]$
- d) $\int \frac{x + 3}{(x^2 - x + 1)^2} dx$ $\left[\frac{7x - 5}{3(x^2 - x + 1)} + \frac{14}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right]$
- e) $\int \frac{3x + 1}{(x^2 + 2)^3} dx$ $\left[\frac{x - 6}{8(x^2 + 2)^2} + \frac{3x}{32(x^2 + 2)} + \frac{3}{32\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right]$
- f) $\int \frac{5x + 3}{(x^2 - 2x + 5)^3} dx$ $\left[\frac{2x - 7}{4(x^2 - 2x + 5)^2} + \frac{3x - 3}{16(x^2 - 2x + 5)} + \frac{3}{32} \operatorname{arctg} \frac{x - 1}{2} \right]$
- g) $\int \frac{2x + 2}{(x - 1)(x^2 + 1)^2} dx$ $\left[\frac{1}{2} \ln \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} - \operatorname{arctg} x \right]$
- h) $\int \frac{x^2}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} dx$ $\left[\ln |x + 1| + \frac{4}{x + 2} \right]$
- i) $\int \frac{5x - 1}{x^3 - 3x - 2} dx$ $\left[\ln \left| \frac{x - 2}{x + 1} \right| - \frac{2}{x + 1} \right]$
- j) $\int \frac{4x^2}{1 - x^4} dx$ $\left[\ln \left| \frac{x + 1}{x - 1} \right| - 2 \operatorname{arctg} x \right]$
- k) $\int \frac{10(7x^2 + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5} dx$ $\left[12\sqrt{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| \right]$
- l) $\int \frac{6x}{x^3 + 1} dx$ $\left[-2 \ln |x + 1| + \ln(x^2 - x + 1) + 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right]$
- m) $\int \frac{x^2}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} dx$ $\left[\ln |x + 1| + \frac{4}{x + 2} \right]$
- n) $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx$ $\left[x - \ln |x| + \frac{1}{x} + 2 \ln |x - 1| \right]$
- o) $\int \frac{x^2}{x^2 + 2} dx$ $\left[x - \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right]$
- p) $\int \frac{3x^4}{x^2 + 2} dx$ $\left[x^3 - 6x + 6\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right]$
- q) $\int \frac{1}{x^3 - x^2} dx$ $\left[\frac{1}{x} + \ln \left| \frac{x - 1}{x} \right| \right]$
- r) $\int \frac{2}{x(x^2 + 1)} dx$ $[2 \ln |x| - \ln(x^2 + 1)]$
- s) $\int \frac{6x}{x^3 - 1} dx$ $\left[2 \ln |x - 1| - \ln(x^2 + x + 1) + 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right]$
- t) $\int \frac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x} dx$ $[4 \ln |x + 1| - \ln |x| + 3 \ln |x - 1|]$
- u) $\int \frac{4}{(x^2 + 1)(x^2 + x)} dx$ $[4 \ln |x| - 2 \ln |x + 1| - \ln(x^2 + 1) - 2 \operatorname{arctg} x]$

Příklad 8.10. Integrujte pomocí rozkladu na parciální zlomky dané funkce:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} & \int \frac{4}{(x+1)^2(x^2+1)} dx \quad \left[2 \ln|x+1| - \frac{2}{x+1} - \ln(x^2+1) \right] \\
 \text{b)} & \int \frac{2(x^3-6)}{x^4+6x^2+8} dx \quad \left[3 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \ln(x^2+2) - 3\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + 2 \ln(x^2+4) \right] \\
 \text{c)} & \int \frac{6x}{x^2+2x+4} dx \quad \left[3 \ln(x^2+2x+4) - 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} \right] \\
 \text{d)} & \int \frac{6(3x+8)}{x^2+2x+10} dx \quad \left[9 \ln(x^2+2x+10) - 10 \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} \right] \\
 \text{e)} & \int \frac{10}{(5x+4)^3} dx \quad \left[-\frac{1}{(5x+4)^2} \right] \\
 \text{f)} & \int \frac{28(-5x+16)}{2x^2+7} dx \quad \left[32\sqrt{14} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{14}} - 35 \ln(2x^2+7) \right] \\
 \text{g)} & \int \frac{28}{2x^2+4x+6} dx \quad \left[7\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right] \\
 \text{h)} & \int \frac{30}{4x^2+4x+16} dx \quad \left[\sqrt{15} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{15}} \right] \\
 \text{i)} & \int \frac{4x}{(x^2-1)(x^2+1)} dx \quad \left[\ln \left| \frac{x^2-1}{x^2+1} \right| \right]
 \end{array}$$

Příklad 8.11. Integrujte dané funkce:

- a) $\int e^x \cos \frac{x}{2} dx$ $\left[\frac{2}{5} e^x \left(\sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} \right) \right]$
- b) $\int (x+2)^2 e^{-x} dx$ $[e^{-x}(-x^2 - 6x - 10)]$
- c) $\int x e^{2x} dx$ $\left[\frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1) \right]$
- d) $\int x^2 \sin(3x) dx$ $\left[-\frac{x^2 \cos(3x)}{3} + \frac{2x \sin(3x)}{9} + \frac{2 \cos(3x)}{27} \right]$
- e) $\int \frac{3x}{e^x} dx$ $[-e^{-x}(3x + 1)]$
- f) $\int (1-x)e^{-x} dx$ $[xe^{-x}]$
- g) $\int 3x \sin(3x) dx$ $\left[-x \cos(3x) + \frac{1}{3} \sin(3x) \right]$
- h) $\int \sin(2x) \cos x dx$ $\left[-\frac{2}{3} \cos^3 x \right]$
- i) $\int x \ln(x-1) dx$ $\left[\frac{1}{2} (x^2 - 1) \ln(x-1) - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} \right]$
- j) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ $\left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]$
- k) $\int 4 \ln(2x) dx$ $[4x \ln(2x) - 4x]$
- l) $\int \frac{\sin \frac{x}{2}}{e^{-x}} dx$ $\left[-\frac{2}{5} e^x \cos \frac{x}{2} + \frac{4}{5} e^x \sin \frac{x}{2} \right]$
- m) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ $\left[\frac{1}{2} \ln^2 x \right]$
- n) $\int e^{-2x} \sin(3x) dx$ $\left[-\frac{e^{-2x}}{13} (3 \cos(3x) + 2 \sin(3x)) \right]$
- o) $\int e^{3x} \cos^2(3x) dx$ $\left[\frac{e^{3x}}{15} ((\cos(3x) + 2 \sin(3x)) \cos(3x) + 2) \right]$

Kapitola 9

Určitý integrál a jeho aplikace

Příklad 9.1. Vypočítejte určité integrály:

a) $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$	[1]	b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx$	[2]
c) $\int_{-1}^3 (x^3 - 3x^2 + 1) \, dx$	[-4]	d) $\int_0^{\pi} 5 \sin(4x) \, dx$	[0]
e) $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}} \, dx$	[3e - 3]	f) $\int_0^3 \left(\frac{12}{x^2} + 9 \right) \, dx$	[π]
g) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \sin^2(2x) \, dx$	[π]	h) $\int_0^4 \frac{x-1}{x+1} \, dx$	[4 - 2 ln 5]
i) $\int_2^5 \frac{4}{x} \, dx$	[4 ln $\frac{5}{2}$]	j) $\int_{1/2}^2 \frac{1}{x^2} \, dx$	[$\frac{1}{2}$]
k) $\int_{-1}^1 2x^3 \, dx$	[0]	l) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x-4} \, dx$	[ln $\frac{3}{5}$]
m) $\int_2^3 \left(\frac{1}{x^2} + x \right) \, dx$	[-3 ln 2 + 2 ln 3]	n) $\int_{-2}^2 \frac{6}{8+3x^2} \, dx$	[$\sqrt{6} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{6}}{2}$]
o) $\int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos x \sin x \, dx$	[0]	p) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 4 \sin^2 x \, dx$	[-2 + π]
q) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\cos(2x)} \, dx$	[2 tg 1]	r) $\int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{tg} x \, dx$	[0]
s) $\int_1^4 3\sqrt{x} \, dx$	[14]	t) $\int_1^{10} \frac{6}{9x} \, dx$	[$\frac{2}{3} \ln 10$]
u) $\int_{-2}^2 \frac{x^2}{x^2+1} \, dx$	[4 - 2 arctg 2]	v) $\int_0^{\pi} 2x \sin^2 x \, dx$	[$\frac{1}{2} \pi^2$]
w) $\int_0^1 x^2 e^{-\frac{x}{2}} \, dx$	[-26e ^{-1/2} + 16]	x) $\int_0^3 x e^{-\frac{x}{2}} \, dx$	[-10e ^{-3/2} + 4]
y) $\int_{-1}^1 4x^2 e^{-2x} \, dx$	[-5e ⁻² + e ²]	z) $\int_0^{\pi} x \cos x \, dx$	[-2]

Příklad 9.2. Vypočítejte určité integrály:

a) $\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$	$[\pi^2 - 4]$	b) $\int_0^2 \operatorname{arctg} x \, dx$	$\left[2 \operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{2} \ln 5\right]$
c) $\int_{-1}^1 4x \operatorname{arctg}(2x) \, dx$	$[5 \operatorname{arctg} 2 - 2]$	d) $\int_0^1 6 \arcsin \frac{x}{2} \, dx$	$[\pi + 6\sqrt{3} - 12]$
e) $\int_0^1 \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \, dx$	$[4 - \pi]$	f) $\int_2^3 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, dx$	$[-\sqrt[3]{e} + \sqrt{e}]$
g) $\int_0^3 \frac{3x}{\sqrt{4x+4}} \, dx$	$[4]$	h) $\int_1^2 \frac{2(1+\ln x)}{x} \, dx$	$[\ln^2 2 + 2 \ln 2]$
i) $\int_2^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \, dx$	$[6 - 2 \ln(\sqrt{2}-1) - 2\sqrt{2}]$	j) $\int_0^4 12\sqrt{x + \frac{1}{4}} \, dx$	$[17\sqrt{17} - 1]$
k) $\int_0^\pi \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} \, dx$	$[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$	l) $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}} \, dx$	$[\arcsin(\ln 2)]$
m) $\int_0^4 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \, dx$	$[4 - 2 \ln 3]$	n) $\int_0^\pi 8 \cos^2 x \sin^2 x \, dx$	$[\pi]$
o) $\int_0^\pi 2(1 - \cos x)^3 \, dx$	$[5\pi]$	p) $\int_1^2 \frac{6}{6x-1} \, dx$	$\left[\ln \frac{11}{5}\right]$
q) $\int_0^1 12\sqrt{x} \sqrt{\frac{4x+1}{4x}} \, dx$	$[5\sqrt{5} - 1]$	r) $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos x} \, dx$	$[4\sqrt{2}]$
s) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \, dx$	$[2 - \sqrt{3}]$	t) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin(2x) \, dx$	$\left[\frac{1}{2}\right]$
u) $\int_0^{\pi/2} 16 \sin^4 x \, dx$	$[3\pi]$	v) $\int_0^1 \frac{16}{8-4x^2} \, dx$	$[\sqrt{2} \ln(3 + 2\sqrt{2})]$
w) $\int_0^{\pi/2} 4 \sin x \cos^3 x \, dx$	$[1]$	x) $\int_0^\pi 3 \sin^3 x \, dx$	$[4]$
y) $\int_{-1}^1 \frac{2}{\sqrt{16-4x^2}} \, dx$	$\left[\frac{\pi}{3}\right]$	z) $\int_0^{1/2} \frac{2(1+x^2)}{1-x^2} \, dx$	$[-1 + 2 \ln 3]$

Příklad 9.3. Vypočítejte určité integrály:

a) $\int_0^2 \frac{1}{(5+4x)^3} \, dx$	$\left[\frac{18}{4225}\right]$	b) $\int_0^3 3\sqrt{x+1} \, dx$	$[14]$
c) $\int_{-1}^1 \frac{2}{x^2-4} \, dx$	$[-\ln 3]$	d) $\int_1^2 e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right) \, dx$	$[e^2 + \ln 2 - e]$
e) $\int_1^5 \frac{2 \ln x}{x} \, dx$	$[\ln^2 5]$	f) $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1} \, dx$	$[1 - 2 \ln 2]$
g) $\int_0^{\pi/8} (1 + \operatorname{tg}(2x)) \, dx$	$\left[\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln 2\right]$	h) $\int_2^3 \frac{6x}{x^2-1} \, dx$	$[9 \ln 2 - 3 \ln 3]$
i) $\int_4^9 \frac{3(x-1)}{\sqrt{x+1}} \, dx$	$[23]$	j) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos x} \, dx$	$[1]$
k) $\int_0^2 \frac{2x}{1+x^4} \, dx$	$[\operatorname{arctg} 4]$	l) $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} + x^3\right) \, dx$	$[3 \ln 2 - \ln 5]$
m) $\int_0^1 2\sqrt{2x+x^2} \, dx$	$[2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})]$	n) $\int_0^{\pi/2} \frac{10}{2 \cos x + 3} \, dx$	$\left[4\sqrt{5} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$
o) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{5 + \sin x} \, dx$	$[\ln 6 - \ln 5]$	p) $\int_0^\pi \frac{10}{4 + \cos^2 x} \, dx$	$[\sqrt{5}\pi]$

Příklad 9.4. Určete obsah rovinné plochy ohraničené křivkami:

- a) $y = 0, x = -1, y = x^2,$ $\left[\frac{1}{3}\right]$
- b) $y = e^x, x = 1, y = x^{-x},$ $\left[e + \frac{1}{e}\right]$
- c) $y = 4 - x^2, y = 0,$ $\left[\frac{32}{3}\right]$
- d) $yx = 1, x = 1, x = 3, y = 0,$ $[\ln 3]$
- e) $y^2 = 2x + 1, x - y - 1 = 0,$ $\left[\frac{16}{3}\right]$
- f) $y(1 + x^2) = 1, y = \frac{x^2}{2},$ $\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right]$
- g) $y = \ln x, x = 5, x = 7, y = 0,$ $\left[\ln \frac{7^7}{5^5} - 2\right]$
- h) $y = |\log x|, x = \frac{1}{10}, x = 10, y = 0,$ $\left[\frac{9.9 \ln 10 - 8.1}{\ln 10}\right]$
- i) $y = -x^2 + 4x - 2, x + y = 2,$ $\left[\frac{9}{2}\right]$
- j) $y = \arcsin x, x = 0, x = 1,$ $\left[\frac{\pi}{2} - 1\right]$
- k) $y = x \sin x, y = 0, x \in \langle 0; \pi \rangle,$ $[\pi]$
- l) $x = \frac{4}{y}, y = 1, y = 4, x = 0,$ $[6]$
- m) $y = 1 - x, y^2 + x^2 = 1, 0 \leq x, y > 0,$ $\left[\frac{\pi - 2}{4}\right]$
- n) $y^2 = x, y = x^2$ $\left[\frac{1}{3}\right]$
- o) $y = x^2 - x - 6, y = -x^2 + 5x + 14,$ $\left[\frac{343}{3}\right]$
- p) $yx = 4, x + y = 5,$ $\left[\frac{15}{2} - 8 \ln 2\right]$
- q) $y = e^{-x} \sin x, y = 0, x \in \langle 0; \pi \rangle,$ $\left[\frac{1 + e^{-\pi}}{2}\right]$
- r) $y = \ln^2 x, y = \ln x$ $[3 - e]$
- s) $y = \frac{2}{1 + x^2}, y = x^2,$ $\left[\pi - \frac{2}{3}\right]$
- t) $y = x^3 + x^2 - 6x, y = 0, x \in \langle -3; 3 \rangle,$ $[18]$
- u) $4x^2 + 9y^2 = 36,$ $[6\pi]$
- v) $y = 6x - x^2, y = 0$ $[36]$
- w) $x^2 + y^2 = 16, y^2 = 6x, x \geq 0,$ $\left[\frac{4}{3}(\sqrt{3} + 4\pi)\right]$
- x) $y = x^2 + 4x, y = x + 4,$ $\left[\frac{125}{6}\right]$
- y) $y^2 = 2x + 1, x - y - 1 = 0,$ $\left[\frac{16}{3}\right]$
- z) $y^2 = x^3, y = 8$ $\left[\frac{96}{5}\right]$

Příklad 9.5. Určete délku oblouku rovinné křivky:

- a) $y^3 = x^2, x \in \langle 0; 1 \rangle,$ $\left[\frac{8}{27} \left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1 \right) \right]$
- b) $y = \sqrt{x - x^2} - \arcsin \sqrt{x}, x \in \langle 0; 1 \rangle,$ [2]
- c) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), a > 0, t \in \langle 0; \pi \rangle$ (cykloida), [8a]
- d) $x = a \cos^3 t, y = \sin^3 t, a > 0, t \in \langle 0; \pi \rangle$ (asteroida), [6a]
- e) $y^2 = (x + 1)^3, x \leq 4$ (semikubická parabola), $\left[\frac{670}{27} \right]$
- f) $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, x \in \langle 1; 2 \rangle,$ $\left[\ln \frac{e^2 + 1}{e} \right]$
- g) $y = \ln(\sin x), x \in \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right\rangle,$ $\left[\frac{1}{2} \ln 3 \right]$
- h) $x = 2a(1 + \cos t) \cos t, y = 2a(1 + \cos t) \sin t, a > 0, t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ (kardioida), [16a]

Příklad 9.6. Určete délku oblouku prostorové křivky:

- a) $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, a, b > 0, t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ (šroubovice), $\left[2\pi \sqrt{a^2 + b^2} \right]$
- b) $x = t, y = \frac{1}{3} \sqrt{8t^3}, z = \frac{1}{2} t^2, t \in \langle 0; 1 \rangle,$ $\left[\frac{3}{2} \right]$
- c) $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4 \sin \frac{t}{2}, t \in \langle 0; \pi \rangle,$ [2 π]
- d) $x = e^t, y = e^{-t}, z = t\sqrt{2}, t \in \langle 0; 1 \rangle,$ $\left[e - e^{-1} \right]$

Příklad 9.7. Vypočítejte hmotnost a souřadnice těžiště rovinné křivky s délkovou hustotou ρ :

- a) $x = a \cos^3 t, y = \sin^3 t, y \geq 0, a > 0, \rho(t) = 1,$ $\left[3a; \left[0; \frac{2a}{5} \right] \right]$
- b) $x^2 + y^2 = r^2, y \geq 0, r > 0, \rho(x) = 1,$ $\left[\pi r; \left[0; \frac{2r}{\pi} \right] \right]$
- c) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), x \in \langle -1; 1 \rangle, \rho(x) = 1,$ $\left[e + \frac{1}{e}; \left[0; \frac{e^4 + 4e^2 - 1}{4e(e^2 - 1)} \right] \right]$
- d) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), a > 0, t \in \langle 0; 2\pi \rangle, \rho(t) = 1,$ $\left[8a; \left[\pi a; \frac{4a}{3} \right] \right]$
- e) $x = a \cos^3 t, y = \sin^3 t, x, y \geq 0, a > 0, \rho(t) = a \cos^3 t,$ $\left[\frac{3a^2}{5}; \left[\frac{5a}{8}; \frac{15\pi a}{256} \right] \right]$

Příklad 9.8. Vypočítejte hmotnost a souřadnice těžiště prostorové křivky s délkovou hustotou ρ :

- a) $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, a, b > 0, t \in \langle 0; 2\pi \rangle, \rho(t) = 1,$ $\left[2\pi \sqrt{a^2 + b^2}; [0; 0; \pi b] \right]$
- b) $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, a, b > 0, t \in \langle 0; 2\pi \rangle, \rho(x) = 2\pi - t,$ $\left[2\pi \sqrt{a^2 + b^2}; \left[0; 0; \frac{2\pi b}{3} \right] \right]$

Příklad 9.9. Vypočítejte hmotnost a souřadnice těžiště rovinné homogenní plochy omezené křivkami:

- a) $y = \frac{x^2}{8}, y = 0, x = 8,$ $\left[\frac{64}{3}; \left[6; \frac{12}{5} \right] \right]$
- b) $y^2 = 4x, x^2 = 4y,$ $\left[\frac{16}{3}; \left[\frac{9}{5}; \frac{9}{5} \right] \right]$
- c) $y = 4 - x^2, y = 0,$ $\left[\frac{32}{3}; \left[0; \frac{8}{5} \right] \right]$
- d) $y^2 = x, y = x^3,$ $\left[\frac{5}{12}; \left[\frac{12}{25}; \frac{3}{7} \right] \right]$

Příklad 9.10. Vypočítejte hmotnost a souřadnice těžiště nehomogenní rovinné plochy Ω s hustotou ρ :

- a) $\Omega : 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi, \rho(x) = |\cos x|,$ $\left[1; \left[\frac{\pi}{2}; \frac{1}{3}\right]\right]$
- b) $\Omega : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq y, \rho(x) = x,$ $\left[\frac{8 - 4\sqrt{2}}{3}; \left[\frac{3(\pi - 2)}{8(2 - \sqrt{2})}; \frac{3}{4(2 - \sqrt{2})}\right]\right]$
- c) $\Omega : x^2 + y^2 = ay, a \geq 0, \rho(y) = y,$ $\left[\frac{\pi a^3}{8}; \left[0; \frac{5a}{8}\right]\right]$
- d) $\Omega : -1 \leq x \leq |y - 1|, 0 \leq y \leq 2, \rho(y) = y^2,$ $\left[\frac{25}{6}; \left[-\frac{24}{125}; \frac{39}{25}\right]\right]$

Kapitola 10

Nevlastní integrál

Příklad 10.1. Vypočítejte nevlastní integrály:

- | | | | |
|---|------------------------------------|---|-----------------------|
| a) $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^3} dx$ | [1] | b) $\int_1^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{x^5}} dx$ | [2] |
| c) $\int_0^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx$ | [$+\infty$] | d) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx$ | [$\ln(1+\sqrt{2})$] |
| e) $\int_0^{+\infty} \frac{4}{1+x^4} dx$ | [$\pi\sqrt{2}$] | f) $\int_0^{+\infty} \frac{8}{8+2x^2} dx$ | [π] |
| g) $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2+2x+2} dx$ | [$\pi - \operatorname{arctg} 2$] | h) $\int_0^{+\infty} 3e^{-\frac{3}{10}x} dx$ | [10] |
| i) $\int_0^{+\infty} 4e^{-2x} \sin(2x) dx$ | [1] | j) $\int_1^{+\infty} \frac{3}{x+1} dx$ | [$+\infty$] |
| k) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2/2} dx$ | [1] | l) $\int_1^{+\infty} x \sin x dx$ | [diverguje] |
| m) $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} dx$ | [$\frac{2\ln 2 - \pi}{8}$] | n) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ | [$+\infty$] |
| o) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(x+1)} dx$ | [$-\ln 2 + 1$] | p) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$ | [$\frac{\pi}{12}$] |
| q) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ | [1] | r) $\int_0^{+\infty} \frac{2x}{2x^2+3} dx$ | [diverguje] |
| s) $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{(x^2+1)(x^2+3)} dx$ | [$-\frac{1}{4} \ln 3$] | t) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2}{x^2} dx$ | [2] |
| u) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$ | [$-\frac{1}{\ln 2}$] | v) $\int_0^{+\infty} \frac{2x}{(1+x)^3} dx$ | [1] |
| w) $\int_1^{+\infty} \frac{4 \operatorname{arctg} x}{x^2} dx$ | [$\pi + 2 \ln 2$] | x) $\int_0^{+\infty} 2x^3 e^{-x^2} dx$ | [1] |
| y) $\int_0^{+\infty} \frac{9}{1+x^3} dx$ | [$2\pi\sqrt{3}$] | z) $\int_0^2 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx$ | [π] |

Příklad 10.2. Vypočítejte nevlastní integrály:

- | | | | | | |
|----|--|---------------------------|----|--|---------------|
| a) | $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$ | [diverguje] | b) | $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ | [$+\infty$] |
| c) | $\int_0^2 (2x-1) \ln^2 x dx$ | $[2\ln^2 2 - 2]$ | d) | $\int_0^2 \frac{1}{2-x} dx$ | [$+\infty$] |
| e) | $\int_0^2 \frac{3x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx$ | [16] | f) | $\int_0^1 \ln x dx$ | [-1] |
| g) | $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ | [2] | h) | $\int_0^1 \frac{1}{x^2-4x+3} dx$ | [$+\infty$] |
| i) | $\int_1^2 \frac{3x}{\sqrt{x-1}} dx$ | [8] | j) | $\int_1^2 \frac{1}{x \ln x} dx$ | [$+\infty$] |
| k) | $\int_1^{+\infty} \frac{2 \operatorname{arctg} x}{x^3} dx$ | [1] | l) | $\int_1^{+\infty} \frac{4}{x^2(1+x^2)} dx$ | $[4 - \pi]$ |
| m) | $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln x)}{x^2} dx$ | $[\frac{1}{2}]$ | n) | $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$ | $[\pi]$ |
| o) | $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ | [není def.] | p) | $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx$ | [diverguje] |
| q) | $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ | $[\frac{\pi}{4}]$ | r) | $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx$ | $[\pi]$ |
| s) | $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx$ | $[\frac{\pi^3}{12}]$ | t) | $\int_{-1}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ | [$+\infty$] |
| u) | $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$ | [diverguje] | v) | $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{- x } dx$ | [2] |
| w) | $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ | [diverguje] | x) | $\int_{-2}^2 \frac{4x^3}{x^4-1} dx$ | [diverguje] |
| y) | $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(x+1)} dx$ | $[\frac{2\pi}{\sqrt{3}}]$ | z) | $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$ | [diverguje] |