Matematika I (KMD/MA1) - cvičení 1

FAKULTA STROJNÍ (akad. rok 2019/2020 a vyšší)

Příklad 1. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

a) $8(3x-5)-5(2x-8)=20+4x$ $\quad[2]$

b) $\dfrac{6+25x}{15}-(x-1)=\dfrac{2x}{3}+\dfrac{7}{5}$ $\quad[\mathbb{R}]$

c) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+4}=\dfrac{6}{x^2+2x-8}-1$ $\quad[\emptyset]$

d) $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{5}{x^2+6}$ $\quad[-12]$

e) $\dfrac{\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}x-1}+\dfrac{\frac{5}{3}x-\frac{4}{3}}{x-\frac{2}{3}}=2$ $\quad[2]$

f) $x^2-6x+8=4-x$ $\quad[1;4]$

g) $\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{4}{x-4}+\dfrac{x^2-20}{x^2-16}=0$ $\quad[-5;8]$

h) $\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{1}{x-2}$ $\quad\left[\dfrac{16}{5};8\right]$

Příklad 2. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnice:

a) $\dfrac{x+3}{2}-\dfrac{x-2}{3}-5<\dfrac{x-1}{2}$ $\quad[(-7;+\infty)]$

b) $-5(1-x)^2\leq 3x-11$ $\quad\left[\left(-\infty;-\dfrac{3}{5}\right\rangle\cup\langle 2;+\infty)\right]$

c) $2x^2-9x-35\leq 0$ $\quad\left[\left\langle-\dfrac{5}{2};7\right\rangle\right]$

d) $\dfrac{x+6}{x-1}<2$ $\quad[(-\infty;1)\cup(8;+\infty)]$

e) $\dfrac{x^2}{x-1}\geq x+2$ $\quad[(1;2\rangle]$

f) $\dfrac{x-1}{x+2}+\dfrac{x+3}{x-4}\leq 2$ $\quad\left[\left(-\infty;-\dfrac{13}{2}\right\rangle\cup(-2;4)\right]$

Příklad 3. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

a) $3^x+3^{x+1}=108$ $\quad[3]$

b) $4^{x+1}-8\cdot 4^{x-1}=32$ $\quad[2]$

c) $4^x-9\cdot 2^x+8=0$ $\quad[0;3]$

d) $4^{x+1}-8\cdot 4^{x-1}=33$ $\quad\left[\log_4\left(\dfrac{33}{2}\right)\right]$

e) $\log(7x+6)=1+\log(3x-4)$ $\quad[2]$

f) $\ln(x)+3=0$ $\quad[e^{-3}]$

Příklad 4. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnice:

a) $3^{2x}>2\cdot 3^x+3$ $\quad[(1;+\infty)]$

b) $25^x+2\cdot 5^{x+1}>11$ $\quad[\mathbb{R}^+]$

c) $\log_2(x+2)>3$ $\quad[(6;+\infty)]$

d) $\dfrac{\log(3x+1)}{\log(2x)}\geq 0$ $\quad\left[\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)\right]$

Příklad 5. Zakreslete následující množiny a určete jejich sjednocení, průnik, rozdíl a doplněk v množině D:

a) $M=\langle 1,2)$, $N=\{x\in\mathbb{R}:|x-3|<1\}$, $D=\mathbb{R}_0^+$
$[M\cup N=\langle 1,4)-\{2\}$, $M\cap N=\emptyset$, $M\backslash N=\langle 1,2)$, $N\backslash M=(2,4)$, $M'_D=\langle 0,1)\cup\langle 2,+\infty)$,
$N'_D=\langle 0,2\rangle\cup\langle 4,+\infty)]$

b) $M=(4,8)$, $N=\{x\in\mathbb{R}:|x-6|\leq 2\}$, $D=\mathbb{R}^+$
$[M\cup N=\langle 4,8\rangle$, $M\cap N=(4,8)$, $M\backslash N=\emptyset$, $N\backslash M=\{4,8\}$, $M'_D=(0,4\rangle\cup\langle 8,+\infty)$,
$N'_D=(0,4)\cup(8,+\infty)]$

c) $M=\{x\in\mathbb{Z}:|x|\leq 4\}$, $N=\{x\in\mathbb{Z}:x^2<25\}$, $D=\mathbb{Z}$
$[M=N=M\cup N=M\cap N=\{-4,-3,\dots,3,4\}$, $M\backslash N=N\backslash M=\emptyset$,
$M'_D=N'_D=\{\dots,-6,-5,5,6,\dots\}]$

Příklad 6. Pro množiny představující jednotlivá řešení z Příkladu 5 určete jejich minimum a maximum (pokud existují), dále infimum a supremum na rozšířené reálné ose $\mathbb{R}^*$. Rozhodněte také, zda jsou tyto množiny omezené (příp. shora/zdola) a konečné.