

Matematika 1

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

4. Přednáška

Limita a spojitost funkcí

Definice Okolí bodu

Předpokládáme, že $a \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0, \infty)$. **Okolím bodu** a s poloměrem δ (δ -okolím bodu a) se rozumí množina

$$\{x \in \mathbb{R}; |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta) .$$

Poznámka

V mnohých souvislostech poloměr uvažovaného δ -okolí bodu a není podstatný, pak hovoříme stručně o okolí bodu a .

Příklad

Sestrojte okolí bodu 2 s poloměrem 1.

interval (1, 3)

Limita a spojitost funkcí

Definice

Je-li $a \in \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$ a existuje-li okolí bodu a , které je podmnožinou množiny M řekneme, že a je **vnitřní bod** množiny M .

Příklad

$$M = (-1, 1] \cup \{3\}$$

vnitřní body $(-1, 1)$

$\{-1, 1, 3\}$ nejsou vnitřní body

Definice

Je-li $a \in \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$ a obsahuje-li každé okolí bodu a nějaký bod množiny M a nějaký bod nepatřící do množiny M , řekneme, že a je **hraniční bod** množiny M .

Příklad

$$M = (-1, 1] \cup \{3\}$$

hraniční body $\{-1, 1, 3\}$

jiné hraniční body M nemá

Limita a spojitost funkcí

Definice (Limita funkce)

Řekneme, že funkce f **má v bodě a limitu b** , jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x \neq a$, je $f(x) \in V$.
píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b .$$

Poznámka

Limita funkce f v bodě a je tedy takové číslo, jemuž jsou blízké funkční hodnoty funkce f pro hodnoty nezávisle proměnné blízké a , avšak různé od a .
Funkce ovšem nemusí mít limitu v každém bodě.

Příklad

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 2)(x + 3)}{x + 3} =$$

Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x) =$$

Limita a spojitost funkcí

Věta 3.1 (o jednoznačnosti limity)

Funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.

Věta 3.2 (o limitě součtu, rozdílu součinu a podílu)

Je-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, pak

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = b + c,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = b - c,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = b \cdot c,$$

je-li navíc $c \neq 0$, pak také

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}.$$

Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x + 2)(x + 3)}{x + 3} =$$

Limita a spojitost funkcí

Věta 3.3

Je-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, je-li funkce g omezená a existuje-li okolí U bodu a takové, že $U \setminus \{a\} \subset D(g)$, pak

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0 .$$

Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} =$$

Limita a spojitost funkcí

Věta 3.4 (o limitě složené funkce)

Je-li $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$, je-li $h = f \circ g$ a je-li pro každé $x \in D(g)$, $x \neq a$, splněna nerovnost $g(x) \neq b$, pak

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = c .$$

Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) =$$

Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg}(x^2 + e^x) =$$

Limita a spojitost funkcí

Věta 3.5 (o limitě elementárních funkcí)

Je-li f elementární funkce a je-li a vnitřní bod $D(f)$, pak

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) .$$

Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x =$$

Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x =$$

Limita a spojitost funkcí

Definice

Nevlastními body se rozumí symboly $-\infty$ a ∞ .

Předpokládáme, že $s \in \mathbb{R}$. Pak se **s-okolí nevlastního bodu** $-\infty$, (resp. ∞), definuje jako interval $(-\infty, s)$, (resp. (s, ∞)).

Poznámka

Podobně jako v případě okolí bodu je i u okolí nevlastního bodu často nepodstatné, jaké je s , pak hovoříme stručně o okolí.

Definice

Řekneme, že funkce f **má v bodě** $a \in \mathbb{R}^*$ **nevlastní limitu** $-\infty$, (resp. ∞), jestliže ke každému okolí V nevlastního bodu $-\infty$, (resp. ∞), existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x \neq a$, je $f(x) \in V$.

Píšeme: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, (resp. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$).

Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} =$$

Limita a spojitost funkcí

Poznámka

Funkce f má v bodě a nejvýše jednu nevlastní limitu $-\infty$, (resp. ∞).

Poznámka

Věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu platí i pro nevlastní limity a pro kombinace limit a nevlastních limit, pokud je příslušná operace definována.

Limita a spojitost funkcí

Definice (Jednostranná limita)

Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava b** , (resp. **limitu zleva b**), jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x > a$, (resp. $x < a$) je $f(x) \in V$.

Píšeme $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$).

Limitu zprava a limitu zleva nazýváme jednostrannými limitami.

Poznámka

Pro jednostranné limity platí analogie vět 3.2, 3.3, 3.4 a 3.6.

Věta 3.7 (vztah mezi limitami a jednostrannými limitami)

Platí :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, právě když $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$ a $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$.

Důsledek (Věty 3.7)

Platí implikace :

Je-li $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = c$ a $b \neq c$, potom $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ neexistuje.

Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x) =$$

Limita a spojitost funkcí

Definice

Definujeme nové symboly

$$0^+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} x ,$$

$$0^- = \lim_{x \rightarrow 0^-} x .$$

Poznámka (operace s 0^+ , resp. 0^-)

$$\frac{1}{0^+} = +\infty \quad \frac{1}{0^-} = -\infty .$$

Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) =$$

Poznámka

Analogicky se definují i nevlastní jednostranné limity.

Spojitosť

Definice (Spojitost v bodě)

Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** a , jestliže

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) .$$

Poznámka

Funkce může být spojitá v bodě a jen v případě, že je v a definovaná.

Příklad

Polynom a funkce \sin a \cos jsou spojité v každém $a \in \mathbb{R}$.

Racionální funkce je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$, v němž je definována.

Spojitost

Věta 4.1 (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu)

Jsou-li funkce f a g spojité v bodě a , pak je v bodě a spojitá funkce $f + g$, $f - g$, fg .
Je-li navíc $g(a) \neq 0$, je v bodě a spojitá i funkce $\frac{f}{g}$.

Příklad

$$f(x) = e^x + x^2$$

Věta 4.2 (o spojitosti složené funkce)

Je-li funkce g spojitá v bodě a a je-li funkce h spojitá v bodě $g(a)$, pak je složená funkce $f = h(g)$ spojitá v bodě a .

Příklad

$$f(x) = \sin x^2$$

Spojitost

Definice (jednostranná spojitost)

Řekneme, že funkce f **je spojitá zleva v bodě** a , jestliže

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) .$$

Řekneme, že funkce f **je spojitá zprava v bodě** a , jestliže

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) .$$

Poznámka

Platí analogické věty větám 4.1 a 4.2.

Spojitosť na intervalu

Definice

Řekneme, že funkce f je **spojitá na intervalu** I , jestliže je spojitá v každém jeho vnitřním bodě, jestliže je spojitá zprava v levém hraničním bodě intervalu I , pokud je zleva uzavřený, a jestliže je spojitá zleva v pravém hraničním bodě intervalu I , pokud je zprava uzavřený.

Věta 4.3

Elementární funkce f je spojitá na každém intervalu $I \subset D(f)$.

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.4 (Weierstrassova)

Je-li funkce f spojitá na omezeném uzavřeném intervalu I , pak existují čísla $c, d \in I$ taková, že pro každé $x \in I$ platí

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) .$$

Poznámka

Věta říká, že spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu nabývá v nějakém bodě své nejmenší funkční hodnoty a v některém bodě své největší funkční hodnoty.

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 4.5 (Bolzánova)

Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, je-li $f(a) \neq f(b)$ a je-li q číslo ležící mezi $f(a)$ a $f(b)$, pak existuje $p \in (a, b)$ takové, že

$$f(p) = q .$$

Poznámka

Funkce spojitá na intervalu $[a, b]$ nabývá tedy všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.

Zvláštní případ pro $q = 0$

existuje alespoň jeden kořen rovnice $f(x) = 0$.

(metoda půlení intervalu)

Příklad

Nalezněte řešení rovnice

$$e^x + x = 0$$

s přesností na tři desetinná místa.

Vlastnosti spojitych funkcí

Řešení

Interval	Střed	Hodnota ve středu
$[-1, 0]$	$x_0 = -0,5$	$f(x_0) = 0,1065308$
$[-1, -0,5]$	$x_1 = -0,75$	$f(x_1) = -0,2776334$
$[-0,75, -0,5]$	$x_2 = -0,625$	$f(x_2) = -0,0897385$
$[-0,625, -0,5]$	$x_3 = -0,5625$	$f(x_3) = 0,0072829$
$[-0,625, -0,5625]$	$x_4 = -0,59375$	$f(x_4) = -0,0414975$
$[-0,59375, -0,5625]$	$x_5 = -0,578125$	$f(x_5) = -0,0171758$
$[-0,578125, -0,5625]$	$x_6 = -0,5703125$	$f(x_6) = -0,0049637$
$[-0,5703125, -0,5625]$	$x_7 = -0,5664062$	$f(x_7) = 0,0011553$
$[-0,5703125, -0,5664062]$	$x_8 = -0,5683593$	$f(x_8) = -0,0019052$
$[-0,5683593, -0,5664062]$	$x_9 = -0,5673828$	$f(x_9) = -0,0003753$
$[-0,5673828, -0,5664062]$	$x_{10} = -0,5668945$	$f(x_{10}) = 0,0003900$

Z tabulky vyplývá, že

$$x^* \doteq -0,567,$$

přičemž všechna tři desetinná místa jsou platná.