

Matematika 1

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

5. Přednáška

Derivace

Definice

Řekneme, že funkce f **má v bodě a derivaci**, jestliže existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Tuto limitu značíme $f'(a)$ nebo $\frac{df}{dx}(a)$.

V případě, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

je nevlastní, hovoříme o **nevlastní derivaci funkce f v bodě a** .

V případě jednostranných limit nebo nevlastních jednostranných limit

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

hovoříme o **jednostranných derivacích** nebo **nevlastních jednostranných derivacích funkce f v bodě a** ,

značíme je $f'_+(a)$, $f'_-(a)$.

Derivace

Příklad

Určete derivaci funkce $f(x) = c$ v bodě $a \in R$.

$$f'(a) =$$

Příklad

Určete derivaci funkce $f(x) = x$ v bodě $a \in R$.

$$f'(a) =$$

Příklad

Určete derivaci funkce $f(x) = x^2$ v bodě $a \in R$.

$$f'(a) =$$

Příklad

Určete derivaci funkce $f(x) = \operatorname{sgn}x$ v bodě $a = 0$.

$$f'_-(a) =$$

$$f'_+(a) =$$

Derivace základních elementárních funkcí

Věta 5.1

Má-li funkce f v bodě a vlastní derivaci, pak je v bodě a spojitá.
(naopak neplatí, $|x|$)

Příklad

Určete derivaci funkce $f(x) = \operatorname{sgn}|x|$ v bodě $a = 0$.

$$f'_-(a) =$$

$$f'_+(a) =$$

Derivace základních elementárních funkcí

Definice

Derivací funkce f se rozumí funkce f' , jejímž definičním oborem $D(f')$ je množina všech $x \in D(f)$, v nichž má funkce f derivaci, a která přiřazuje každému $x \in D(f')$ derivaci $f'(x)$ funkce f v bodě x . Značí se f' nebo $\frac{df}{dx}$.

Příklad

Konstantní funkce $f(x) = c$ má derivaci f' definovanou na $D(f') = R$, pro kterou platí

$$f'(x) = 0 .$$

Příklad

Funkce $f(x) = x$ má derivaci f' definovanou na $D(f') = R$, pro kterou platí

$$f'(x) = 1 .$$

Derivace základních elementárních funkcí

$$c' = 0 ,$$

$$x' = 1 ,$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} ,$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0) ,$$

$$(e^x)' = e^x ,$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1) ,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} ,$$

$$(\sin x)' = \cos x ,$$

$$(\cos x)' = -\sin x ,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} ,$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} ,$$

Derivace základních elementárních funkcí

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1},$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}.$$

Vlastnosti funkcí majících derivaci

Věta 5.2 (o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu)

Mají-li funkce f a g v bodě a derivaci, pak má v bodě a derivaci funkce $f + g$, $f - g$, a fg a platí

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a) , \quad (1)$$

$$(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a) , \quad (2)$$

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) , \quad (3)$$

je-li navíc $g(a) \neq 0$, pak má v bodě a derivaci i funkce $\frac{f}{g}$ a platí

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)} . \quad (4)$$

Poznámka

Věta platí i pro nevlastní derivace, jednostranné derivace a nevlastní jednostranné derivace, pokud existují výrazy na pravých stranách vztahů (1) - (4).

Vlastnosti funkcí majících derivaci

Příklad

Určete derivaci funkce $f(x) = \ln x \cdot \cos x$.

$$f'(x) =$$

Příklad

Určete derivaci funkce $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$.

$$f'(x) =$$

Vlastnosti funkcí majících derivaci

Věta 5.3 (o derivaci složené funkce)

Má-li funkce g v bodě a derivaci $g'(a)$, má-li funkce h v bodě $g(a)$ derivaci $h'(g(a))$ a je-li $f = h(g)$, pak funkce f má v bodě a derivaci

$$f'(a) = h'(g(a)) \cdot g'(a) . \quad (5)$$

Příklad

Určete derivaci funkce $f(x) = \ln(\cos x)$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$f'(x) =$$

Příklad

Určete derivaci funkce $f(x) = \cos(\ln x)$ pro $x \in (0, \infty)$.

$$f'(x) =$$

Vlastnosti funkcí majících derivaci

Věta 5.4 (o derivaci inverzní funkce)

Je-li $D(f)$ interval, je-li funkce f prostá a spojitá na $D(f)$ a má-li v bodě b derivaci $f'(b) \neq 0$, pak její inverzní funkce f^{-1} má derivaci v bodě $a = f(b)$ a platí

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(b)}. \quad (6)$$

Příklad

Určete derivaci funkce $f(x) = \arcsin x$.

$$g(x) = \sin^* x \quad \text{na} \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$b = \arcsin a \quad \text{pak} \quad a = \sin b$$

$$f'(a) = (g^{-1})'(a) = \frac{1}{g'(b)} = \frac{1}{\cos b} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 b}} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}$$

Vlastnosti funkcí majících derivaci

Příklad (derivace funkce s neznámou jak v základu, tak v exponentu)

Určete derivace funkce $f(x) = x^x$ definované na $(0, \infty)$.

Nejprve malý trik

$$f(x) = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

$$f'(x) = e^{x \ln x} \left(\ln x + x \frac{1}{x} \right) = x^x (\ln x + 1)$$

Vyšší derivace

Definice (lokální v bodě)

Předpokládáme, že funkce f má derivaci f' s definičním oborem $D(f')$. Označme $g = f'$ a zvolme $a \in D(f')$. Má-li funkce g v bodě a derivaci $g'(a)$, řekneme, že číslo $g'(a)$ je **druhá derivace funkce f v bodě a** a označíme ho $f''(a)$ nebo $\frac{d^2 f}{dx^2}(a)$. Obdobně zavádíme nevlastní druhou derivaci funkce f v bodě a , jednostranné druhé derivace v bodě a , nevlastní jednostranné druhé derivace v bodě a .

Příklad

Určete druhou derivaci funkce $f(x) = x^3$ v bodě $a \in \mathbb{R}$.

Definice (funkce na intervalu)

Druhou derivací funkce f se rozumí funkce f'' , jejímž definičním oborem je množina všech čísel $x \in D(f')$, v nichž má funkce f druhou derivaci, a která přiřazuje každému $x \in D(f'')$ druhou derivaci $f''(x)$ funkce f v bodě x .

Značíme ji f'' nebo $\frac{d^2 f}{dx^2}$.

Příklad

Určete funkci druhá derivace k funkci $f(x) = x^3$.

Vyšší derivace

Poznámka

Analogicky definujeme třetí, (čtvrtou ...) derivaci funkce f v bodě a a funkce třetí (čtvrtá ...) derivace.

Hovoříme souhrnně o vyšších derivacích funkce f .

Značíme f' , f'' , f''' , ..., $f^{(m)}$, ...

Příklad

Určete všechny derivace funkce $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

Geometrické aplikace

Má-li funkce f v bodě a derivaci, pak tečna t grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$ má směrnici

$$k = f'(a)$$

a prochází bodem $[a, f(a)]$, má proto rovnici

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) .$$

Normálou grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$ se rozumí kolmice n k tečně procházející bodem $[a, f(a)]$.

Její rovnice je pro $f'(a) \neq 0$

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$$

a pro $f'(a) = 0$

$$x = a .$$

Geometrické aplikace

Je-li funkce f spojitá v bodě a a má-li v něm nevlastní derivaci, považujeme za tečnu t jejího grafu v bodě $[a, f(a)]$ přímku o rovnici

$$x = a ,$$

její normála n v témže bodě má pak rovnici

$$y = f(a) .$$

Příklad

Určete tečnu a normálu paraboly $y = x^2$ v bodě $[1, 1]$.

Geometrické aplikace

Věta 5.5 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)

Je-li $a < b$, je-li f spojitá na intervalu $[a, b]$ a má-li na (a, b) derivaci, pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$