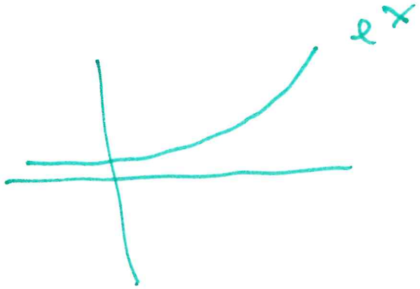
Průběh funkce

1a $f(x) = x \cdot e^{x}$



a) $D_f = \mathbb{R}$

! D_f : bez omezení

b) $f(x)$ je spojitá na D_f

c) limity v krajních bodech D_f

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot e^{x} = \infty \cdot e^{\infty} = \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x \cdot e^{x} = -\infty \cdot e^{-\infty} = \boxed{-\infty \cdot 0}$$ není definováno

L'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{typ } \left(\frac{0}{0}\right) \\ \text{typ } \left(\frac{\text{cokoliv}}{\pm\infty}\right) \end{array} \right|$$

Platí, pokud je splněno

① $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

| nebo |

② $\lim\limits_{x \to a} |g(x)| = \pm\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} \left(\frac{-\infty}{e^{\infty}}\right)$$

$$\overset{L.P.}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}\cdot(-1)} = \lim_{x\to-\infty} -e^{x} = -e^{-\infty} = \underline{\underline{0}}$$

d) parita (S, L)

① $D_f = \mathbb{R}$ (symetrický) ✓

② $f(-x) = -x\cdot e^{-x} \neq \begin{cases} x\cdot e^{x} & \text{ani S} \\ -x\cdot e^{x} & \text{ani L} \end{cases}$

e) průsečíky s Osy

① s osou x:

$$f(x) = 0$$

$$x \cdot e^x = 0$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$x = 0 \qquad e^x = 0$$

N.Ř.

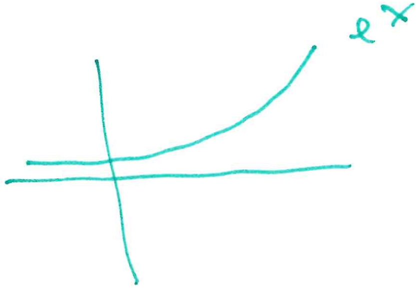
P [0;0]

② s osou y:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

CV8

Průběh funkce



① 1a $f(x) = x \cdot e^x$

! D_f : bez omezení

a) $D_f = \mathbb{R}$

b) $f(x)$ je spojitá na D_f

c) limity v krajních bodech D_f

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot e^x = \infty \cdot e^{\infty} = \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x \cdot e^x = -\infty \cdot e^{-\infty} = \boxed{-\infty \cdot 0}$$ není definováno

$$\lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} \left|\frac{-\infty}{e^{\infty}}\right|$$

$$\overset{L.P.}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}\cdot(-1)} = \lim_{x\to-\infty} -e^{x} = -e^{-\infty} = \underline{\underline{0}}$$

d) parita (S, L)

① $D_f = \mathbb{R}$ (symetrický) ✓

② $f(-x) = -x\cdot e^{-x} \neq \begin{cases} x\cdot e^{x} & \text{ani S} \\ -x\cdot e^{x} & \text{ani L} \end{cases}$

e) průsečíky s Oxy

① s osou x:

$f(x) = 0$

$x \cdot e^x = 0$

↙ $x = 0$

↘ $e^x = 0$ N.Ř.

$P[0;0]$

② s osou y:

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

CV 8 $f(x) = x \cdot e^x$

f, f' + monotonie + lok. extrémy

$f'(x) = (x \cdot e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x)$, $x \in \mathbb{R}$

Stacionární body: $f'(x) = 0$

$$e^x \cdot (1+x) = 0$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$e^x = 0$ $\qquad$ $1 + x = 0$

N.Ř. $\qquad$ $x = -1 \in D_f$

x	-2 $(-\infty,-1\rangle$	-1	0 $\langle -1;+\infty)$
$f'(x)$	$(-)$	0	$(+)$
$f(x)$	↘	$\frac{-1}{e}$	↗
body		lok. min.	

$$f'(-2) = \underbrace{e^{-2}}_{>0} \cdot \underbrace{(1+(-2))}_{<0}$$

$$f'(0) = e^{0}(1+0) = 1$$

$$f(-1) = (-1) \cdot e^{-1} = \frac{-1}{e}$$

Komentář:

Fce F je klesající na $(-\infty,-1\rangle$

Fce F je rostoucí na $\langle -1;+\infty)$

Fce F má lok. minimum v bodě $x = -1$ o hodnotě $\frac{-1}{e}$

g) f'' + konvexnost/konkávnost + inflexe

$$f''(x) = (e^x \cdot (1+x))' = e^x(1+x) + e^x \cdot 1$$

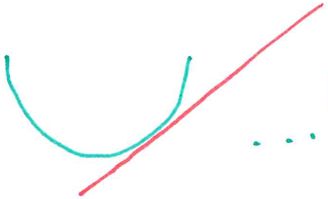
$$= e^x(2+x)$$

Body podezřelé z inflexe: $f''(x) = 0$

$$e^x \cdot (2+x) = 0$$

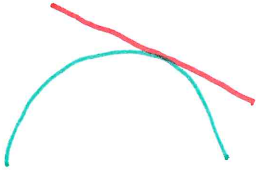
↙ N.Ř.

↘ $x = -2 \in D_f$



(nad tečnou)

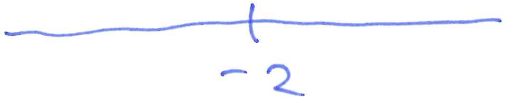
...konvetní



...konkávní

(pod tečnou)

x	-3 $(-\infty,-2\rangle$	-2	0 $\langle -2;+\infty)$
$f''(x)$	$(-)$	0	$(+)$
$f(x)$	∩	$\frac{-2}{e^2}$	∪
body		inflexe	



$$F''(-3) = \underbrace{e^{-3}}_{>0} \cdot \underbrace{(2+(-3))}_{<0}$$

$$F''(0) = e^0(2+0) = 2$$

$$f(-2) = -2\cdot e^{-2} = \frac{-2}{e^2}$$

Komentář:

Fce F je konkávní na $(-\infty,-2\rangle$

Fce F je konvexní na $\langle -2;+\infty)$

Fce F má inflexi v bodě $x=-2$

Asymptoty

a) svislé (bez směrnice) : Hledá se v bodech nespojitosti nebo v krajních bodech D_f, ale ne $\pm\infty$,

např. $(\underline{0},\underbrace{1)\cup(1}_{},+\infty)$

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$$

... nevlastní limita

b) šikmé (se směrnicí) : hledáme v ±∞, jsou-li to krajní body D_f

$$y = ax + b$$

$$(0,1) \cup (1,\underline{\underline{+\infty}})$$

$$\underbrace{a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - a \cdot x}_{\text{limity vlastní}}$$

b) asymptoty: $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

1) svislé asymptoty neexistují

2) šikmé asymptoty

$\boxed{v\ -\infty}$:

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\cdot e^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = e^{-\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} f(x) - a\cdot x = \lim_{x\to-\infty} x\cdot e^x - 0\cdot x = 0$$

$$y = a\cdot x + b \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

$\boxed{v +\infty}$

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} e^x = e^\infty = \underline{\underline{\infty}}$$

nevlastní

=> šikmá as. neexistuje

i) <u>graf fce</u>

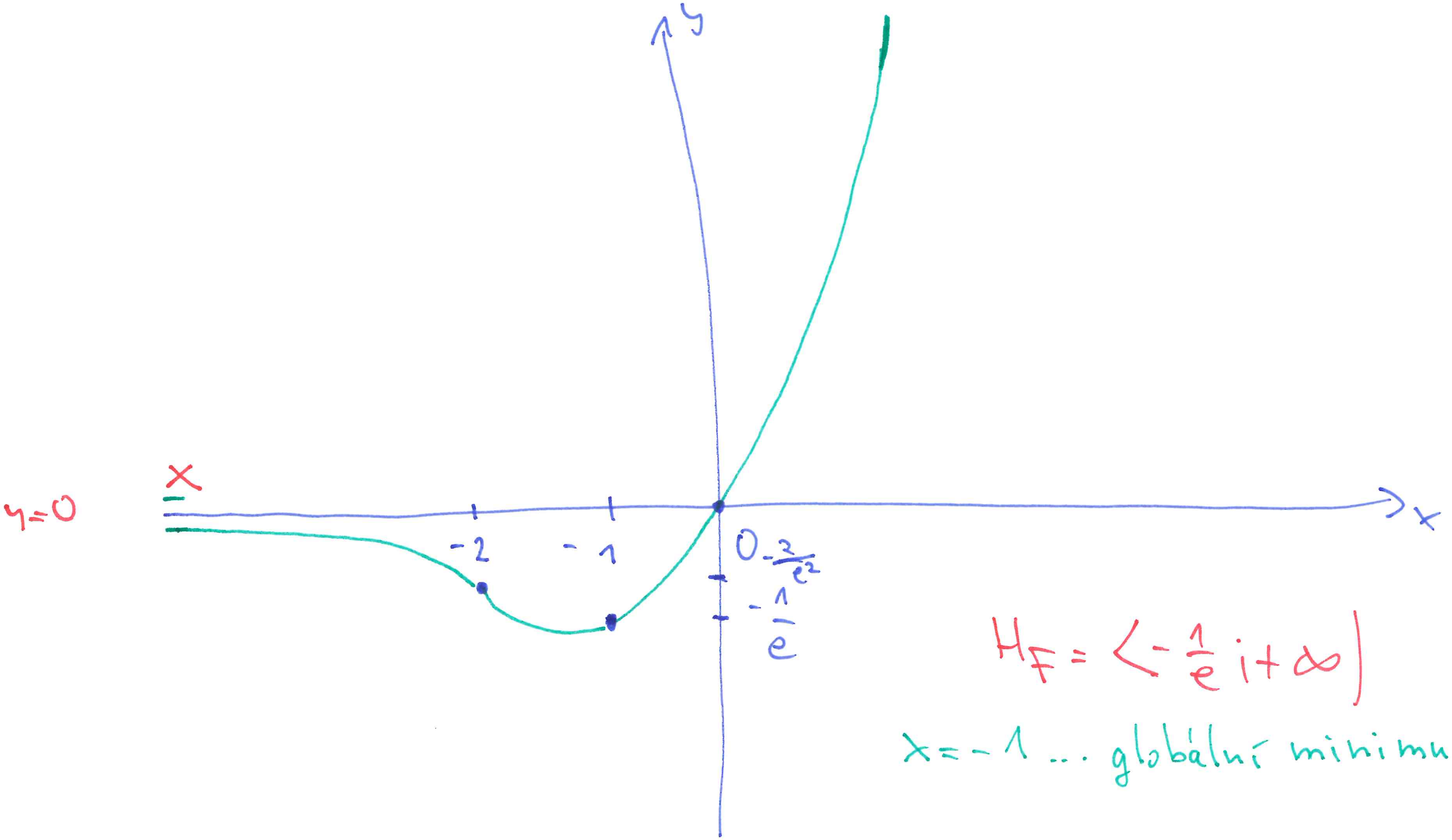
1, Oxy

2, vyznačit asymptoty

3, význačné body: průsečíky s Oxy, lok. extrémy, inflexe

4, limity v kr. Df a bodech nespojitosti

5, dokreslit z tabulek f' a f''



$H_F = \langle -\frac{1}{e} ; +\infty)$

x = -1 ... globální minimum

Průběh fce 1b

$$f(x) = \frac{x}{3-x^2}$$

a) D_f: $3 - x^2 \neq 0$

$$x^2 \neq 3$$

$$x \neq \pm\sqrt{3}$$

b) f je spojitá na D_f

$$\Downarrow$$

má body nespojitosti

$$x = \pm\sqrt{3}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{3}\} = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$$

c) S/L :

1) D_f je symetrický podle 0 ✓

2) $f(-x) = \frac{(-x)}{3-(-x)^2} = \frac{-x}{3-x^2} = -f(x) \Rightarrow L$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{3-x^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{3-x^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\sqrt{3}+} \frac{x}{3-x^2} = \frac{-\sqrt{3}}{0+} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\sqrt{3}-} \frac{x}{3-x^2} = \frac{-\sqrt{3}}{0-} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to \sqrt{3}+} \frac{x}{3-x^2} = \frac{\sqrt{3}}{0-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \sqrt{3}-} \frac{x}{3-x^2} = \frac{\sqrt{3}}{0+} = +\infty$

e) průsečíky s Oxy

a) s x : $f(x) = 0$

b) s y : stejně

$$\frac{x}{3-x^2} = 0$$

$P = [0;0]$

$$x = 0$$

f) f':

$$f'(x) = \left(\frac{x}{3-x^2}\right)' = \frac{1\cdot(3-x^2) - x(-2x)}{(3-x^2)^2} = \frac{3+x^2}{(3-x^2)^2}$$

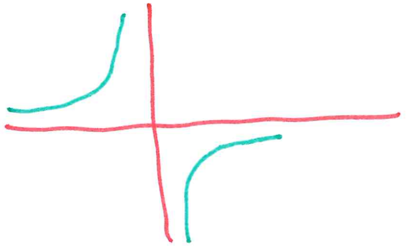
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3+x^2}{(3-x^2)^2} = 0 \Rightarrow 3+x^2 = 0$$ N.Ř.

$$x^2 = -3$$

x	$(-\infty\overset{-2}{;}-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}\overset{0}{;}\sqrt{3})$	$(\sqrt{3}\overset{2}{;}+\infty)$
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$	↗	↗	↗

Fce nemá lok. extrémy

Fce f je rostoucí na $(-\infty;-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};+\infty)$



g) f'':

$$f''(x) = \left(\frac{3+x^2}{(3-x^2)^2}\right)'$$

[redacted] $f''(x) = \left(\frac{3+x^2}{(3-x^2)^2}\right)' = \frac{2x(3-x^2)^{\cancel{2}} - (3+x^2)\cdot 2\cancel{(3-x^2)}\cdot(-2x)}{(3-x^2)^{\cancel{4}\,3}}$

$= \frac{6x-2x^3+12x+4x^3}{(3-x^2)^3} = \frac{2x^3+18x}{(3-x^2)^3}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 + 18x = 0$

$2x(x^2+9) = 0$

$$\begin{tikzcd} & 2x(x^2+9)=0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ x = 0 \in D_f & & \text{N.}\bar{\text{R}}\text{.} \end{tikzcd}$$

	-2	-1		1	2
x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0\rangle$	0	$\langle 0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
f''	+	−	0	+	−
f	∪	∩	○	∪	∩
body			inflexe		

h, asymptoty

a, svislé v bodech $\pm\sqrt{3}$: viz bod d) => existují

$x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$

b) šikmé :

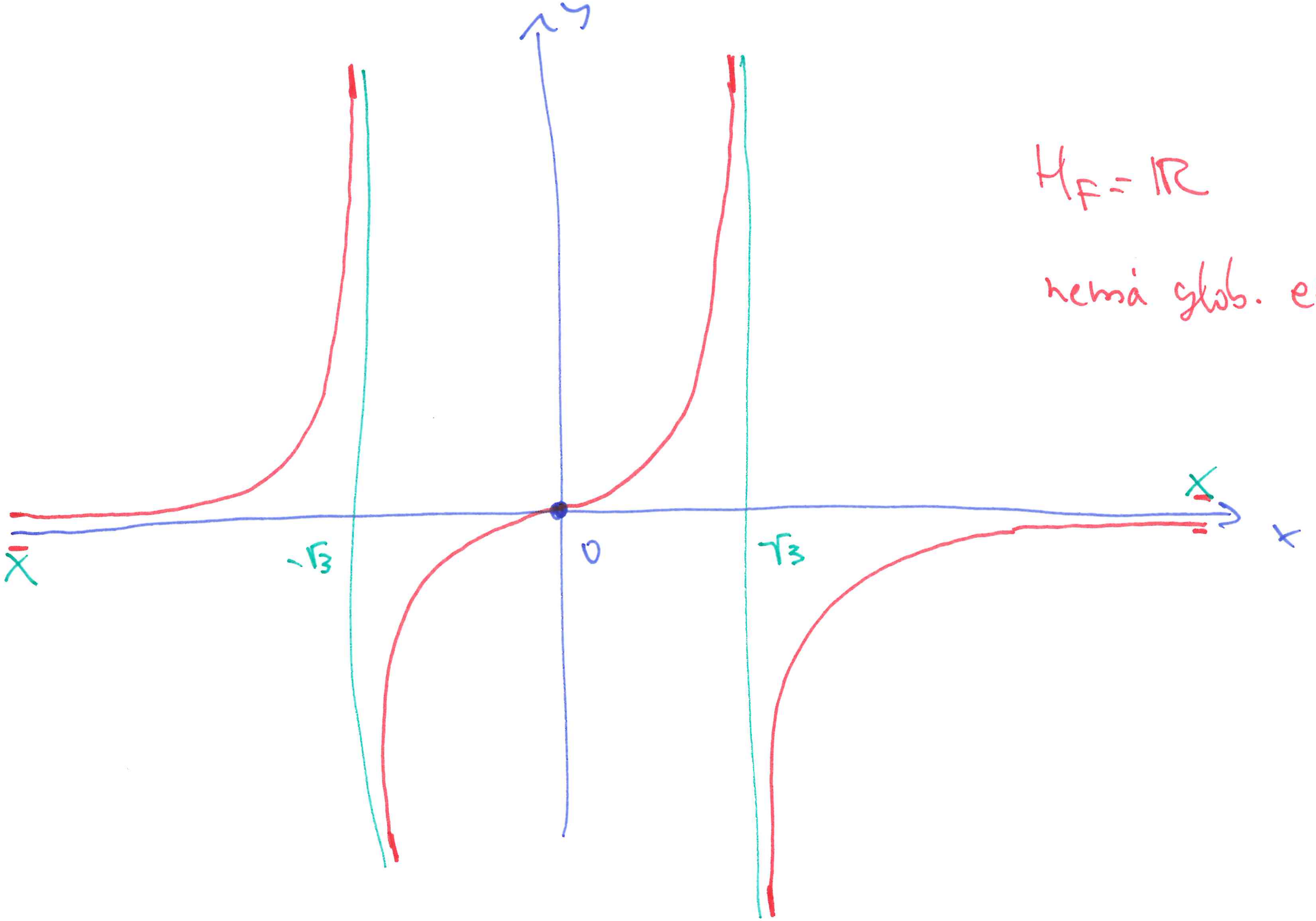
$\boxed{\text{v } +\infty}$

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}\ 1}{(3-x)^2 \cdot \cancel{x}} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - a\cdot\cancel{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{3-x^2} = 0 \text{ (viz d))}$$

$$\boxed{y = 0}$$

$\boxed{\text{pro } -\infty}$ ... stejně : $\boxed{y = 0}$



$H_F = \mathbb{R}$

nemá glob. extrémy

Průběh Fce 1d : $y = \ln(1+x^2)$

a) $D_F = \mathbb{R}$

b) spojitá na D_F => nemá body nespojitosti => nemá svislé as.

c) S/L:

$$f(-x) = \ln(1+(-x)^2) = \ln(1+x^2) = f(x) \Rightarrow S$$

d) $$\lim_{x \to \pm\infty} \ln(1+x^2) = \ln(\infty) = \infty$$

e) průsečíky s Oxy:

s x: $\ln(1+x^2) = 0 \quad / e^{\cdots}$ s y: stejně

$$1+x^2 = e^0$$

$$1+x^2 = 1$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

$P = [0,0]$

f) f':

$$f'(x) = (\ln(1+x^2))' = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}, \; x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \in D_f$$

x	$(-\infty,\overset{-1}{0}\rangle$	0	$\langle \overset{1}{0},+\infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	↘	0	↗
body		lok. min.	

$$f''(x) = 0$$

$$2 - 2x^2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

g) f'' :

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2\cdot(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

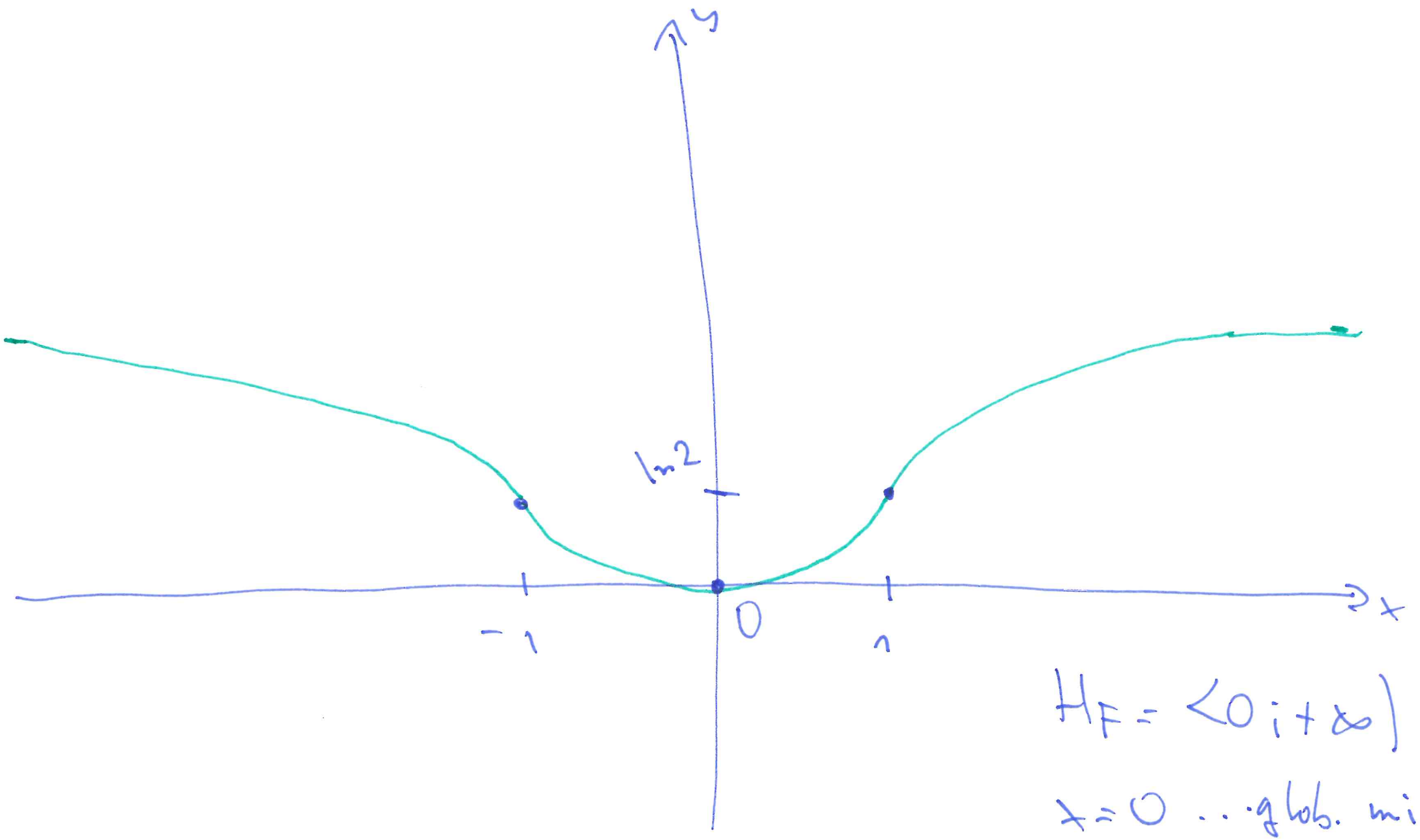
$$= \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}, x\in\mathbb{R}$$

	-2		0		2
x	$(-\infty;-1\rangle$	-1	$\langle -1;1\rangle$	1	$\langle 1;+\infty)$
F''	−	0	+	0	−
F	∩	ln2	∪	ln2	∩
body		inflexe		inflex	

h) svislé : neex.

šikmé : $a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \Big| \text{L.P.} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = 0$

$b = \lim_{x\to\pm\infty} \ln(1+x^2) - 0\cdot x = \infty \Rightarrow$ neex. šikmá as



$H_F = \langle 0 ; +\infty)$

$x = 0$ … glob. min.

Cv 9

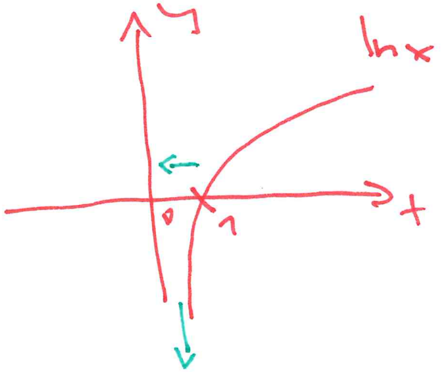
Průběh fce :

(1e) $f(x) = x \cdot \ln x$

① : D_f : $x > 0$ $D_f = (0; +\infty)$

② fce f je elementární => f je spojitá na D_f

③ limity v krajních bodech D_f :



$$\lim_{x \to 0+} x \cdot \ln x = 0 \cdot \ln(0+) = 0 \cdot (-\infty)$$!

není def.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\boxed{\frac{1}{x}}_{\,x^{-1}}} \left(\frac{-\infty}{\frac{1}{0+} = +\infty} \right) = \text{L.P.} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-1\cdot x^{-2}} =$$

$$\boxed{a\cdot b = \frac{a}{\frac{1}{b}}} \quad = \lim_{x\to 0+} -x = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\cdot \ln x = \infty\cdot\ln(\infty) = \infty\cdot\infty = \infty$$

④ parita: S/L

$D_f = (0;+\infty)$ ... není symetrický podle 0 => ani S
ani L

⑤ průsečíky:

a) s osou x:

$$x \cdot \ln x = 0$$

$x = 0$ nebo $\ln x = 0$

$\notin D_f$

$x = 1 \in D_f \Rightarrow P_x = [1; 0]$

b) s osou y:

$x = 0 \notin D_f \Rightarrow$ neex. průsečík s osou y

⑥ f' + lok. extrémy + monotonie

$$f'(x) = (x \cdot \ln x)' = 1 \cdot \ln x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1, \quad x > 0$$

Stacionární body: $f'(x) = 0$

$$\ln x + 1 = 0$$

$$\ln x = -1 \quad \Big/^{e}$$

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e} \in D_f$$

	e^{-2}		1
x	$(0, \frac{1}{e}\rangle$	$\frac{1}{e}$	$\langle \frac{1}{e}; +\infty)$
$f'(x)$	$(-)$	0	$(+)$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗
body		lok. minimum	

$$f'(e^{-2}) = \ln(e^{-2}) + 1 = -2 + 1 = (-)$$

$$f(1) = \ln 1 + 1 = 0 + 1 = (+)$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \boxed{\ln\left(\frac{1}{e}\right)}^{=-1} = \frac{1}{e} \cdot (-1) = -\frac{1}{e}$$

⑦ f'' + konvexní/konkávní + inflexe

$$f''(x) = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

$$\left.\begin{aligned} f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} &= 0 \;/\cdot x \\ 1 &= 0 \text{ N.Ř.} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ Fce nemá inflexní bod

x	$(0\overset{1}{;}+\infty)$
$f''(x)$	$(+)$
$f(x)$	

Fce f je konvexní na $(0;+\infty)$

⑧ asymptoty

a) svislé : $D_f = (0; +\underline{\infty})$ ↖ šikmá ?

? svislá

$$\lim_{x \to 0+} x \cdot \ln x = 0$$ (není to nevlastní $\pm\infty$ limita) ⇒ neexistuje svislá asymptota

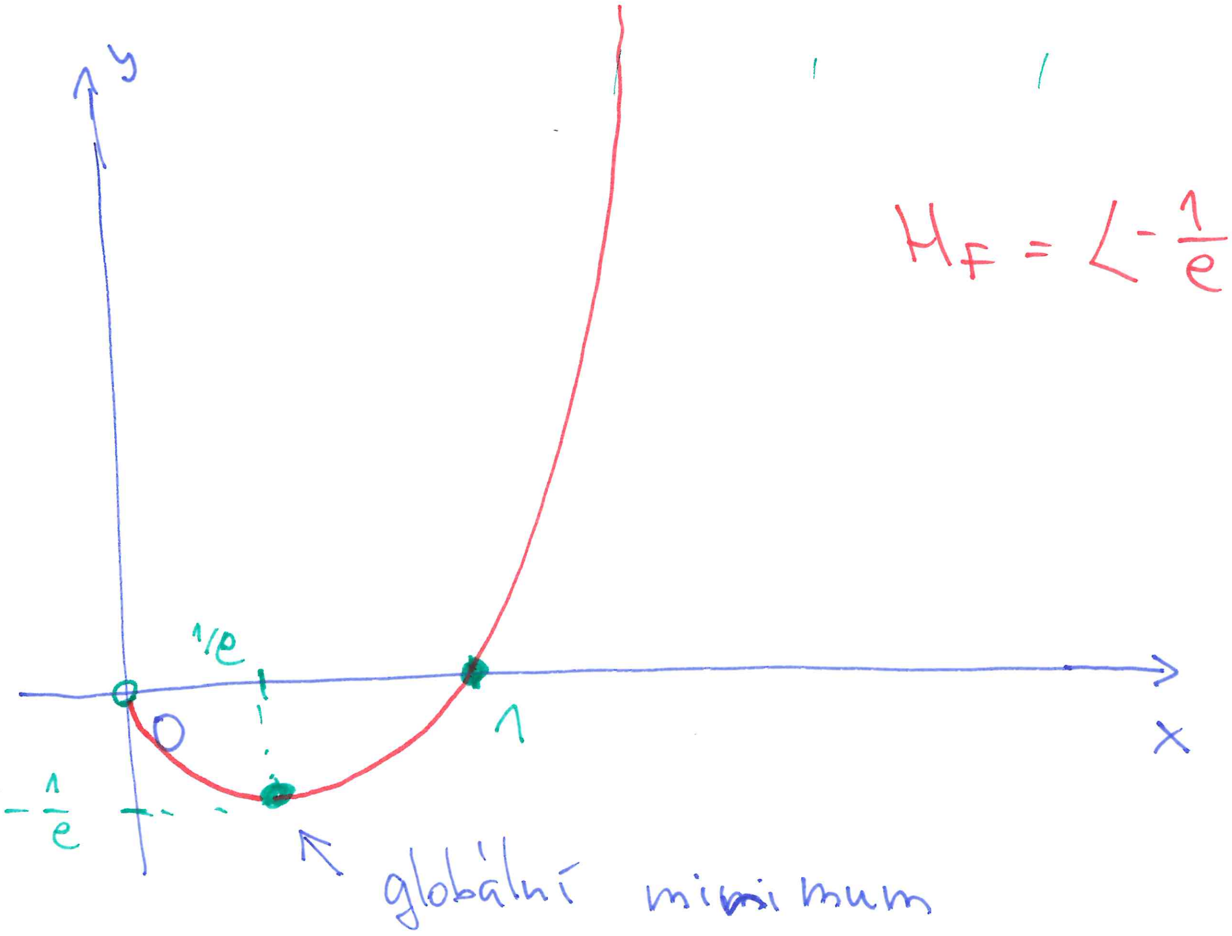
b) šikmé : $y = ax + b$

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x} \cdot \ln x}{\cancel{x}} = \infty$$ (není vlastní, není to konečné číslo reálné)

⇓

šikmá asymptota neexistuje

graf



$$H_f = \langle -\frac{1}{e} ; +\infty)$$