

# Matematika 1

Petr Salač a Jiří Hozman  
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická  
Technická univerzita v Liberci  
petr.salac@tul.cz  
jiri.hozman@tul.cz

## 9. Přednáška

# Neurčitý integrál

Výpočtem primitivní funkce rozumíme její vyjádření pomocí základních elementárních funkcí, (říkáme vyjádření primitivní funkce v uzavřeném tvaru).

## Definice

Množinu všech primitivních funkcí k funkci  $f$  na intervalu  $J$  zapíšeme symbolem

$$\int f(x) dx$$

a nazýváme **neurčitý integrál funkce  $f$**  na intervalu  $J$ , tj.

$$\int f(x) dx = F(x) + C .$$

Konstantu  $C$  nazýváme **integrační konstanta**.

## Příklad

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

# Základní vzorce pro integraci

$$\int x^s dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} + C \quad s \neq -1 ,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C ,$$

$$\int e^x dx = e^x + C ,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1) ,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C ,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C ,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C ,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C ,$$

# Základní vzorce pro integraci

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C ,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C ,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C ,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C .$$

# Neurčitý integrál

## Poznámka

Výpočet primitivní funkce se nazývá integrování, má dva významy, jednak výpočet čísla a jednak výpočet funkce.

(odtud název určitý či neurčitý integrál)

## Věta 9.5.

Jestliže existují integrály na pravé straně následujících rovností, potom platí:

$$\int K f(x) dx = K \int f(x) dx, \quad \text{kde } K \text{ je konstanta}$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

## Příklad.

$$\int (2x^3 - \frac{3}{4}x - \sqrt{x}) dx =$$

# Neurčitý integrál

## Poznámka

- a) Definiční obory funkcí neuvádíme a rozumíme jimi interval, na němž je příslušná funkce spojitá.
- b) Integrační konstantu píšeme až po konečné úpravě.

## Poznámka. (integrabilita v „konečném tvaru“)

Každá spojitá funkce má primitivní funkci, ale tuto primitivní funkci obecně nelze vyjádřit pomocí konečných součtů, součinů, podílů a složení tzv. základních elementárních funkcí (tj. pomocí elementárních funkcí).

## Příklad.

$$\int_a^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad \int_a^x \frac{\cos t}{t} dt, \quad \int_a^x e^{t^2} dt, \quad \int_a^x \sin t^2 dt, \quad \dots$$

# Integrovaní po částech

## Věta 9.6 (per partes)

Nechť  $u(x)$ ,  $v(x)$  jsou dvě funkce mající derivaci v intervalu  $I$ .

Pak platí

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx \quad \text{pro } x \in I .$$

## Důkaz :

Vzorec pro derivaci součinu

$$(u.v)' = u'v + uv'$$

integrujeme

$$u.v + C = \int u'v dx + \int uv' dx .$$

## Příklady

$$\int xe^x dx$$

$$\int \ln x dx$$

$$\int \sin^2 x dx$$

## Poznámka

Integrační konstantu neuvádíme, dokud se na pravé straně vyskytuje nějaké znaménko integrálu.

# Integrovaní po částech

**Věta 9.7** (per partes pro určitý integrál)

Nechť  $u(x)$ ,  $v(x)$  jsou dvě funkce definované v  $[a, b]$  a jsou tam spojité i se svými derivacemi  $u'$ ,  $v'$ .

Pak platí

$$\int_a^b uv' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx .$$

**Příklad**

$$\int_0^\pi x \sin x dx$$



# Substituce v integrálech

## Věta 9.8 (Věta o substituci)

Jestliže  $g' = g'(x)$  je spojitá funkce na intervalu  $[a, b]$  a funkce  $f = f(t)$  je spojitá ve všech bodech  $t = g(x)$ , kde  $x \in [a, b]$ , potom platí

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt .$$

## Schéma výpočtu

$$\begin{aligned} \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx &= \left| \begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x) dx \\ \frac{dt}{g'(x)} = dx \end{array} \right| = \\ &= \int f(t) \cdot g'(x) \frac{dt}{g'(x)} = \int f(t) dt = \dots = F(t) + C = \\ &= \left| t = g(x) \right| = F(g(x)) + C \end{aligned}$$

## Příklad

$$\int \sin^2 x \cos x dx$$

# Substituce v integrálech

**Příklad**

$$\int \frac{x}{5+x^2} dx$$

**Příklad**

$$\int \frac{4x}{\sqrt{5+x^2}} dx$$

**Příklad**

$$\int \operatorname{tg} x dx$$

# Substituce v integrálech

## Věta 9.9 (Substituce pro určitý integrál)

Jestliže  $g' = g'(x)$  je spojitá funkce na intervalu  $[a, b]$  a funkce  $f = f(t)$  je spojitá ve všech bodech  $t = g(x)$ , kde  $x \in [a, b]$ , potom platí

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt .$$

## Schéma výpočtu

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \left| \begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x) dx \\ \frac{dt}{g'(x)} = dx \\ x = a \dots t = g(a) \\ x = b \dots t = g(b) \end{array} \right| = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt = \dots$$

## Příklad

$$\int_1^e \frac{6 \ln^2 x}{x} dx =$$

## Poznámka

Na rozdíl od neurčitého integrálu se k původní proměnné  $x$  již nevracíme.