Rozklad na parciální zlomky

$$\int \boxed{\frac{P(x)}{Q(x)}}\, dx$$

ryze rac. Fce

st. P < st. Q

$$\frac{x}{x^3+1}$$

neryze rac. Fce

st. P ≥ st. Q

$$\frac{x^3+1}{x^3+2}$$

Tvrzení: Každá ryze rac. fce je buď parc. zlomek nebo ji lze rozložit na součet parc. zlomků, přičemž každému reálnému kořenu (jmenovatele) přísluší tolik p. z., kolik je jeho násobnost, tj.

$$\frac{A_1}{x-\alpha},\ \frac{A_2}{(x-\alpha)^2},\ \dots,\ \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$$

Dále každé dvojici komplexně sdružených kořenů ...

Dále každé dvojici komplexně sdružených kořenů přísluší tolik p. z., kolik je jejich násobnost, tj

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + px + q}, \quad \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + px + q)^2}, \quad \ldots, \quad \frac{B_l x + C_l}{(x^2 + px + q)^l}$$

$\boxed{1b/cv11}$

$$\int \frac{1}{x(2+x)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+2}\,dx$$

$$\frac{1}{x^1(x+2)^1} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} \quad \Big/ \cdot x(x+2)$$

$0\,(1)$ $\quad -2\,(1)$

násobnosti

... metoda neurčitých koeficientů

$$1 = A(x+2) + Bx$$

$$1 = Ax + 2A + Bx$$

polynom = polynom

$x^1: \quad 0 = A + B$

$x^0: \quad 1 = 2A$

! Má právě 1 řešení

$A = \frac{1}{2}, \; B = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\boxed{\int \frac{1}{x+2}\,dx} = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$$

Trik (platí pouze pro reálné a jednonásobné kořeny)

= zakrývací pravidlo

$$A = \frac{1}{(0+2)} = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

1d $\int \frac{x}{4-4x+x^2}\,dx = \int \frac{x}{(x-2)^2}\,dx = (*)$

$$\frac{x}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} \overset{!}{} \quad / \cdot (x-2)^2$$

$2\ (2)$

$$x = A(x-2) + B$$

$x^1: \quad 1 = A$

$x^0: \quad 0 = -2A + B \Rightarrow B = 2$

$$(*) = \int \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}\,dx = \underbrace{\int \frac{1}{x-2}\,dx}_{=\ln|x-2|} + 2\underbrace{\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx}_{I_2}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x-2 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2}\,dt = \int t^{-2}\,dt =$$

$$= \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x-2}$$

$$= \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C$$

Neryze racionální fce

$$\underbrace{\frac{P(x)}{Q(x)}}_{\text{neryze}} = \underbrace{S(x)}_{\text{polynom}} + \underbrace{\frac{R(x)}{Q(x)}}_{\text{ryze}}$$

výsledek dělení

zbytek po dělení

$$\frac{5}{3} = \boxed{1} + \frac{2}{3}$$

1c $\underbrace{\int \frac{6x^3+6}{x^3-5x^2+6x}}_{\text{neryze}}\,dx = \underbrace{\int 6}_{I_1} + \underbrace{\frac{30x^2-36x+6}{x^3-5x^2+6x}}_{I_2}\,dx$

$(6x^3+6) : (x^3-5x^2+6x) = 6$ ... výsledek

$6x^3-30x^2+36x$

$30x^2-36x+6$ .... zbytek

$I_1 = \int 6\,dx = 6x$

$$I_2 = \int \frac{30x^2 - 36x + 6}{\underbrace{x^3 - 5x^2 + 6x}_{\text{tyze}}}\,dx$$

$$x^3 - 5x^2 + 6x = x(x^2 - 5x + 6) = \underset{0(1)}{x}\,\underset{3(1)}{(x-3)}\,\underset{2(1)}{(x-2)}$$

$$\frac{30x^2 - 36x + 6}{\cancel{x^3 - 5x^2 + 6x}\; x(x-3)(x-2)} = \frac{A}{\underset{0}{x}} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-2}$$

Trik: $A = \frac{6}{(-3)(-2)} = \frac{6}{6} = 1$ ... dopočítat

$$I_2 = A \cdot \ln|x| + B \cdot \ln|x-3| + C \cdot \ln|x-2|$$

(1e) $\displaystyle\int \frac{6x}{x^2+2x+4}\,dx = (*)$

$\Delta < 0$ ... nelze rozložit

Nerozkládá se na p. z., protože je to už p. z.

$$\frac{\text{lin. fce}}{x^2+px+q} = k\cdot\frac{2x+p}{x^2+px+q} + \frac{\overbrace{\text{číslo}}^{=L}}{x^2+px+q}$$

$\Delta < 0$

$$\frac{2x+p}{x^2+px+q} \to \ln|x^2+px+q| \qquad \frac{L}{x^2+px+q} \to \text{arctg}$$

$$\frac{6x+0}{x^2+2x+4} = 3\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+4} + \frac{0-6}{x^2+2x+4}$$

$$(*) = 3\underbrace{\int\frac{2x+2}{x^2+2x+4}\,dx}_{I_1 = \ln|x^2+2x+4|} - 6\underbrace{\int\frac{1}{x^2+2x+4}\,dx}_{I_2}$$

$$I_2 = \int\frac{1}{(x^2+2x+1)+3}\,dx = \int\frac{1}{(x+1)^2+3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{1}{\boxed{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)}^2+1}\,dx = \Big|\ t = \dots$$

Ukázka rozkladu v kombinaci reálných a komplexních kořenů

$$\int \frac{1}{x^5+x^3}\,dx$$

lineární člen !

$$\frac{1}{x^5+x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

$$x^5 + x^3 = x^3\,(x^2+1)$$

0 (3)

nelze rozložit