

Matematika 1

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

12. Přednáška

Aplikace určitého integrálu

Způsoby zadání křivky v rovině

a) Spojitou funkcí

Křivka je zadána rovnicí

$$y = f(x), \quad x \in [a, b],$$

kde f je spojitá funkce.

(y je vyjádřeno jako funkce x explicitně)

Příklad

1)

$$y = \sin x, \quad x \in [0, \pi],$$

2)

$$y = e^x, \quad x \in [0, 1].$$

Aplikace určitého integrálu

b) Parametrickými rovnicemi

Křivka je zadána rovnicemi

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\ y &= y(t),\end{aligned} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

kde $x(t)$, $y(t)$ jsou spojité funkce na intervalu $[\alpha, \beta]$.

Příklad

Přímka

$$\begin{aligned}x &= 2 + 3t, \\ y &= 1 - t,\end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kružnice

$$\begin{aligned}x &= a \cos t, \\ y &= a \sin t,\end{aligned} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Elipsa

$$\begin{aligned}x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t,\end{aligned} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Aplikace určitého integrálu

Obsah rovinného obrazce

a) Obsah obrazce pod grafem nezáporné a spojitě funkce $f(x)$, $x \in [a, b]$ je

$$P = \int_a^b f(x) dx . \quad (1)$$

Příklad

Vypočítejte obsah půlkruhu o poloměru R .

Poznámka

Obsah obrazce ohraničeného grafy spojitých funkcí $f_1(x)$, $f_2(x)$ a rovnoběžkami $x = a$, $x = b$, přičemž pro $x \in [a, b]$ je $f_2(x) \leq f_1(x)$ je

$$P = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx .$$

Příklad

Určete obsah obrazce ohraničeného křivkami $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$ a obrazec nakreslete.

Aplikace určitého integrálu

b) Je-li graf nezáporné spojité funkce $f(x)$, $x \in [a, b]$, vyjádřený jako křivka s parametrickými rovnicemi

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

kde funkce $x = x(t)$ má nenulovou spojitou derivaci na intervalu $[\alpha, \beta]$, můžeme obsah vyjádřit ve tvaru

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) |x'(t)| dt .$$

(vzorec dostaneme substitucí $x = x(t)$, $f(x(t)) = y(t)$ z integrálu (1))

Příklad

Vypočítejte obsah půlkruhu o poloměru R .

Aplikace určitého integrálu

Délka křivky

a) Je-li křivka zadána jako graf funkce

$$y = f(x), \quad x \in [a, b],$$

mající spojitou derivaci f' , potom délku křivky vypočítáme ze vztahu

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx .$$

Příklad

Určete délku grafu funkce $y = \sqrt{x^3}$, $x \in [0, 2]$.

$$\left(\frac{8}{27}(5, 5\sqrt{5,5} - 1)\right)$$

Příklad

Vypočítejte délku půlkružnice o poloměru R .

Aplikace určitého integrálu

b) Je-li křivka zadána parametrickými rovnicemi

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

kde funkce $x = x(t)$, $y = y(t)$ mají spojité derivace v intervalu $[\alpha, \beta]$, pak je délka křivky dána vzorcem

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt .$$

Příklad

Vypočítejte délku půlkružnice o poloměru R .

Aplikace určitého integrálu

Objem rotačního tělesa

a) Uvažujme rovinný obrazec $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$ se spojitou funkcí f . Těleso, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem osy x , se nazývá **rotační těleso** a jeho objem V se vypočte integrálem

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx .$$

Příklad

Určete objem tělesa, které vznikne rotací obrazce pod grafem funkce $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ kolem osy x .

Příklad

Určete objem koule o poloměru R .

Aplikace určitého integrálu

b) Uvažujme rovinný obrazec $0 \leq a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$ se spojitou funkcí f . Těleso, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem osy y , se nazývá **rotační těleso** a jeho objem V se vypočte podle vzorce

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx .$$

Příklad

Určete objem tělesa, které vznikne rotací obrazce mezi grafem funkce $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$ a osou y kolem osy y .

Příklad

Určete objem polokoule o poloměru R .

Aplikace určitého integrálu

Obsah rotační plochy

a) Křivka $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, $f(x) > 0$ rotuje kolem osy x . Obsah vzniklé rotační plochy vypočteme podle vzorce

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx .$$

Příklad

Určete obsah sféry (povrch koule) o poloměru R .

Aplikace určitého integrálu

b) Křivka $y = f(x)$, $0 \leq a \leq x \leq b$ rotuje kolem osy y . Obsah vzniklé rotační plochy vypočteme podle vzorce

$$S = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx .$$

Příklad

Určete povrch paraboloidu, které vznikne rotací grafu funkce $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$ kolem osy y .

Příklad

Určete obsah horní poloviny sféry o poloměru R .

Aplikace určitého integrálu

Těžiště plochy

Je dán křivočarý lichoběžník $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$.

Pak můžeme vypočítat **statický moment plochy vzhledem k ose x**

$$S_X = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx ,$$

statický moment plochy vzhledem k ose y

$$S_Y = \int_a^b x f(x) dx$$

a souřadnice těžiště plochy $T = [x_T, y_T]$

$$x_T = \frac{S_Y}{P}, \quad y_T = \frac{S_X}{P},$$

kde P označuje obsah dané plochy.

Příklad

Určete polohu těžiště půlkruhu o poloměru R .

Aplikace určitého integrálu

Těžiště křivky

Je dána křivka $y = f(x)$, $x \in [a, b]$.

Pak můžeme vypočítat **statický moment křivky vzhledem k ose x**

$$S_X = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx ,$$

statický moment křivky vzhledem k ose y

$$S_Y = \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

a souřadnice těžiště křivky $T = [x_T, y_T]$

$$x_T = \frac{S_Y}{l}, \quad y_T = \frac{S_X}{l},$$

kde l označuje délku dané křivky.

Příklad

Určete polohu těžiště půlkružnice o poloměru R .