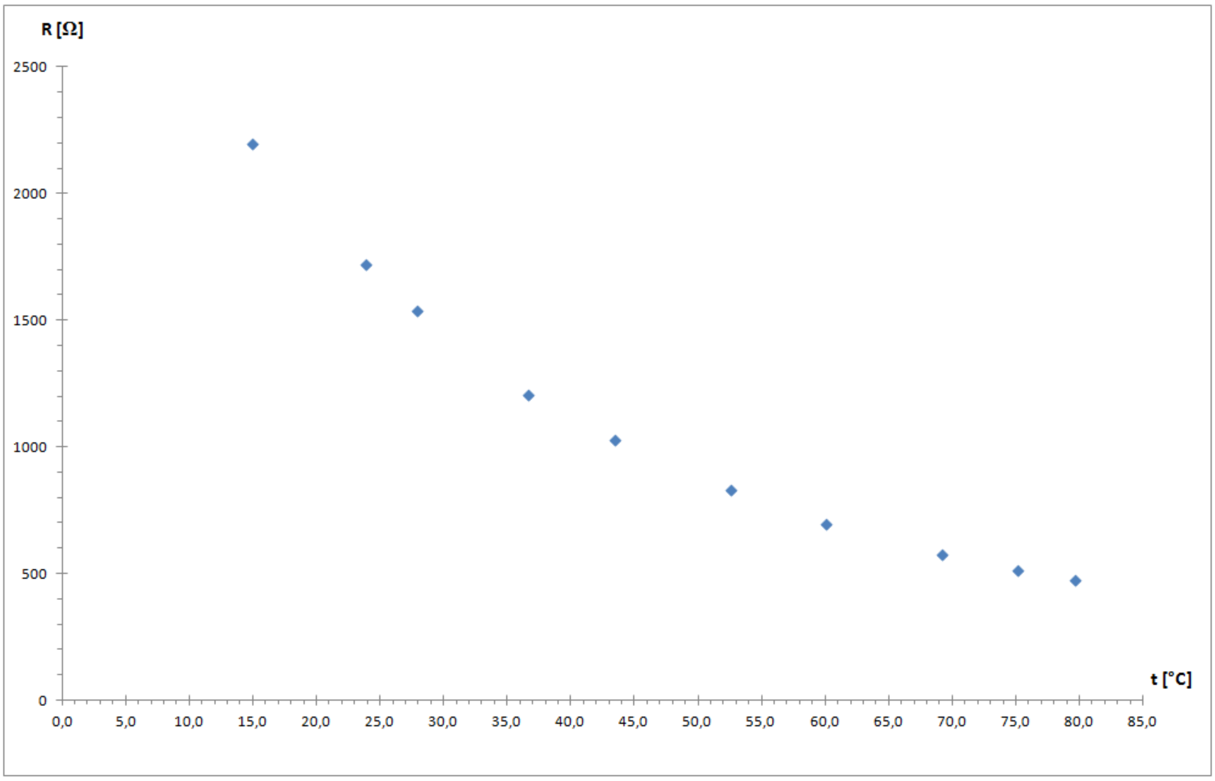
Aproximace funkce - linearizace

Častým úkolem je aproximace naměřené závislosti fyzikálních veličin známou funkcí *f (x)*, která však není lineární. V řadě případů ale lze tuto funkci tzv. *linearizovat*.

Příklad: Bylo provedeno měření závislosti elektrického odporu polovodiče na teplotě (naměřená data viz. tabulka). Určete materiálové konstanty tohoto polovodiče.

t [°C]	15,0	23,9	27,9	36,7	43,5	52,6	60,1	69,2	75,2	79,7
R [Ω]	2196	1721	1537	1205	1028	831	694	574	510	475



Postup řešení:

Pro elektrický odpor polovodiče platí vztah $R = A \cdot e^{\frac{B}{T}}$, kde $T[K]$ je termodynamická teplota, $A[\Omega]$ a $B[K]$ jsou materiálové konstanty polovodiče.

Tento vztah převedeme do „lineární podoby“ pomocí logaritmování:

$$\ln R = \ln A + B \cdot \frac{1}{T}$$

Vztah můžeme porovnat s rovnicí přímky $y = q + k \cdot x$:

$$y \rightsquigarrow \ln R,\ x \rightsquigarrow \frac{1}{T},\ k = B,\ q = \ln A,$$

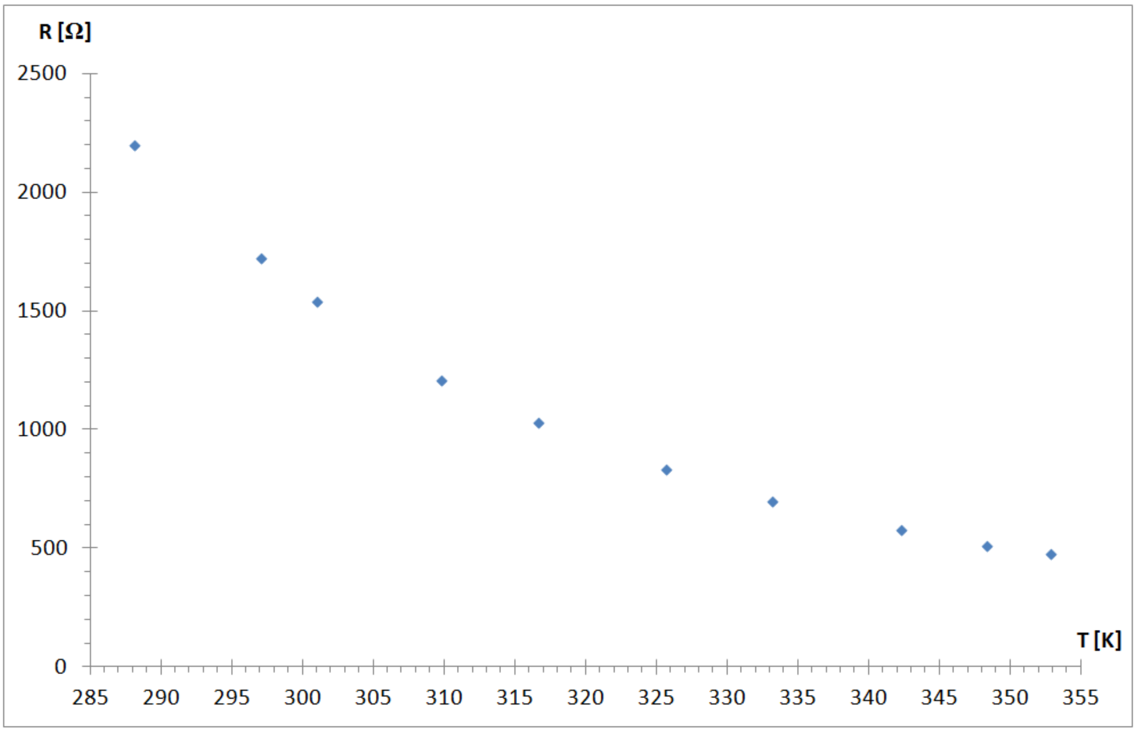
neboli $B = k,\ A = e^q$.

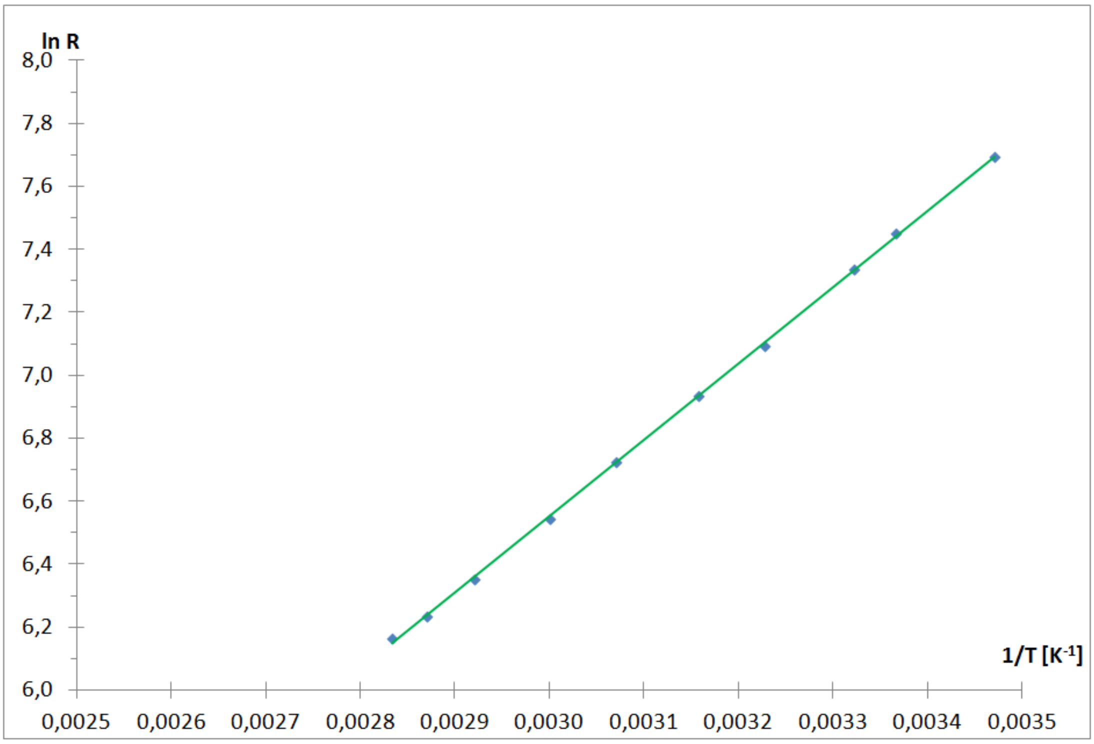
Pro chyby materiálových koeficientů *A* a *B* pak můžeme odvodit vztahy:

$$\sigma_B = \sqrt{\left(\frac{\partial(k)}{\partial k}\cdot\sigma_k\right)^2} = \sigma_k$$

$$\sigma_A = \sqrt{\left(\frac{\partial(e^q)}{\partial q}\cdot\sigma_q\right)^2} = e^q\cdot\sigma_q$$

Grafy závislostí R = *f* (T) *a* ln R = *f* (1/T)*:*

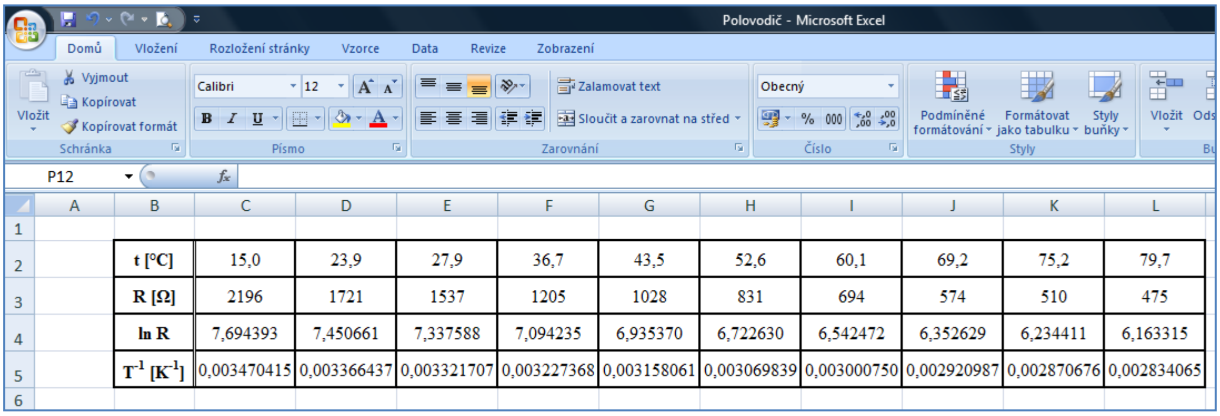




Aproximace funkce - linearizace

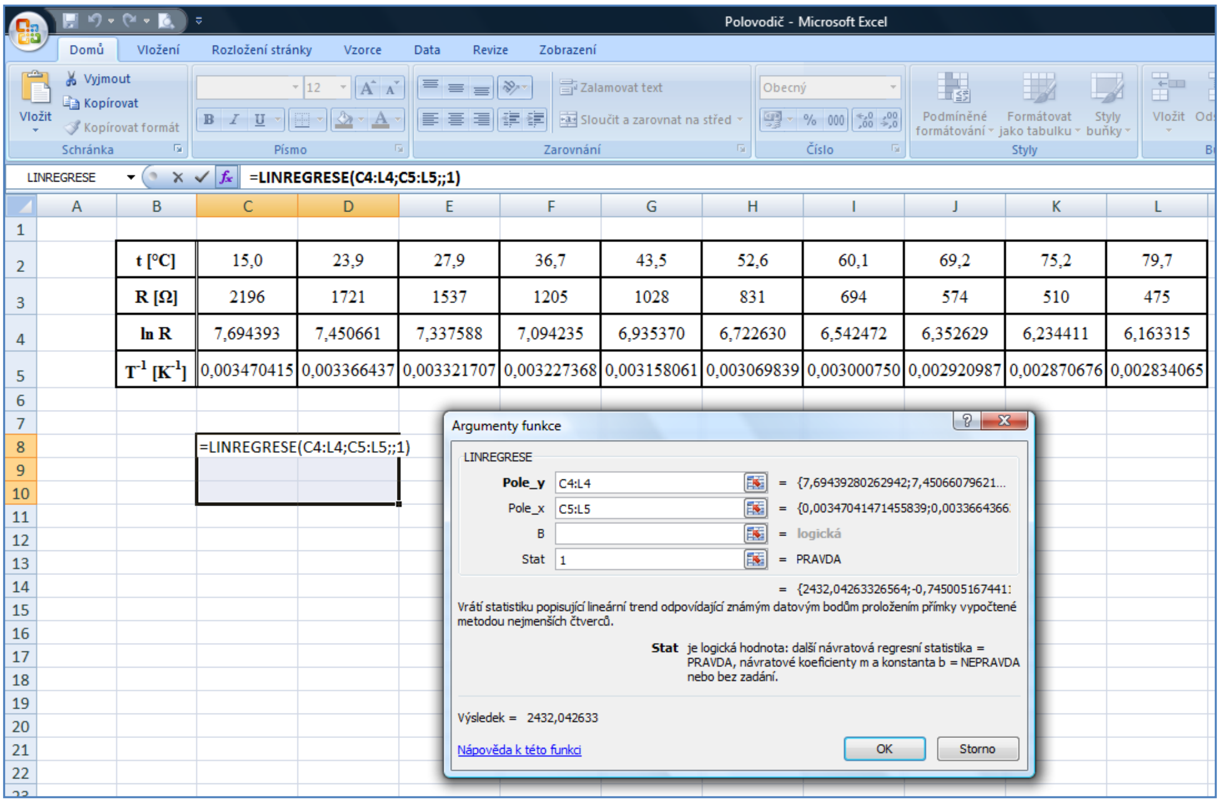
Zpracování v EXCELu:

Vytvoříme tabulku s naměřenými hodnotami doplněnou o řádky *ln R* a T^{-1}:



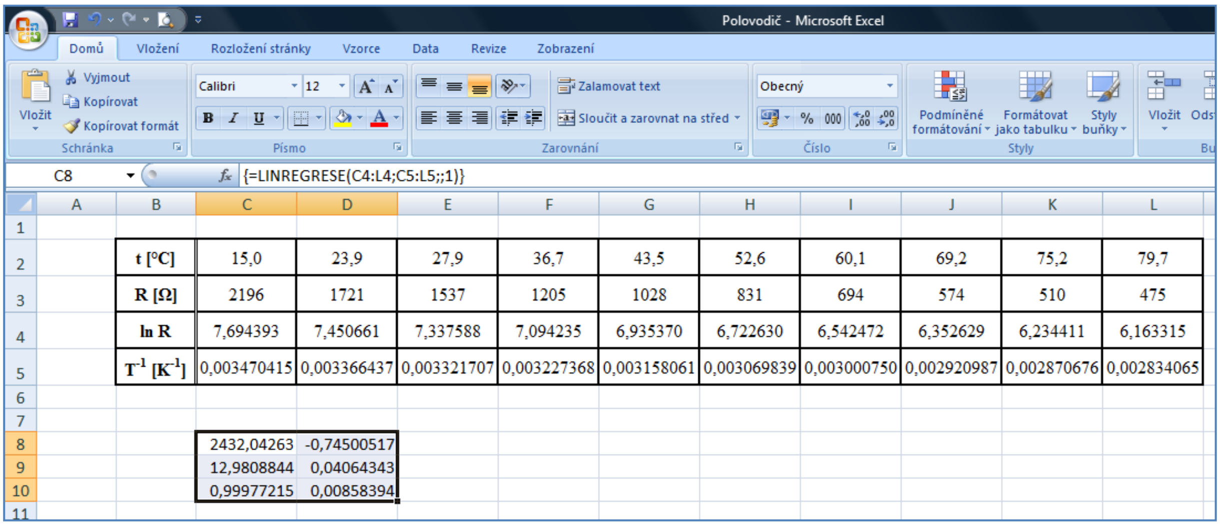
t [°C]	15,0	23,9	27,9	36,7	43,5	52,6	60,1	69,2	75,2	79,7
R [Ω]	2196	1721	1537	1205	1028	831	694	574	510	475
ln R	7,694393	7,450661	7,337588	7,094235	6,935370	6,722630	6,542472	6,352629	6,234411	6,163315
T^{-1} [K^{-1}]	0,003470415	0,003366437	0,003321707	0,003227368	0,003158061	0,003069839	0,003000750	0,002920987	0,002870676	0,002834065

Lineární regresí zpracujeme závislost *ln R* = *f (1/T)* pomocí funkce LINREGRESE(…):



t [°C]	15,0	23,9	27,9	36,7	43,5	52,6	60,1	69,2	75,2	79,7
R [Ω]	2196	1721	1537	1205	1028	831	694	574	510	475
ln R	7,694393	7,450661	7,337588	7,094235	6,935370	6,722630	6,542472	6,352629	6,234411	6,163315
T^{-1} [K^{-1}]	0,003470415	0,003366437	0,003321707	0,003227368	0,003158061	0,003069839	0,003000750	0,002920987	0,002870676	0,002834065

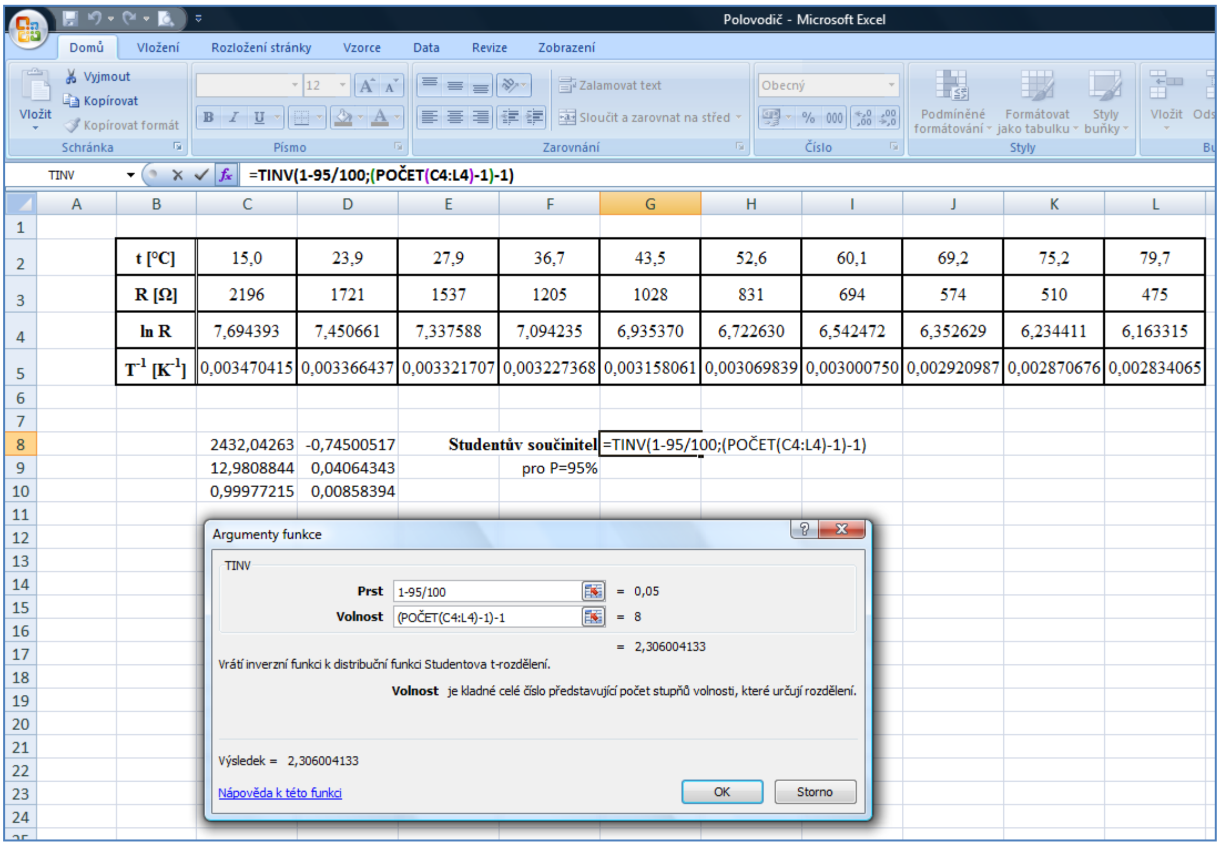
Pro výpočet podle maticového vzorce je nutné na závěr stisknou trojkombinaci kláves *CTRL + SHIFT + ENTER*. Dostaneme potom hodnoty regresních koeficientů a jejich chyb:



t [°C]	15,0	23,9	27,9	36,7	43,5	52,6	60,1	69,2	75,2	79,7
R [Ω]	2196	1721	1537	1205	1028	831	694	574	510	475
ln R	7,694393	7,450661	7,337588	7,094235	6,935370	6,722630	6,542472	6,352629	6,234411	6,163315
T^{-1} [K^{-1}]	0,003470415	0,003366437	0,003321707	0,003227368	0,003158061	0,003069839	0,003000750	0,002920987	0,002870676	0,002834065

2432,04263	-0,74500517
12,9808844	0,04064343
0,99977215	0,00858394

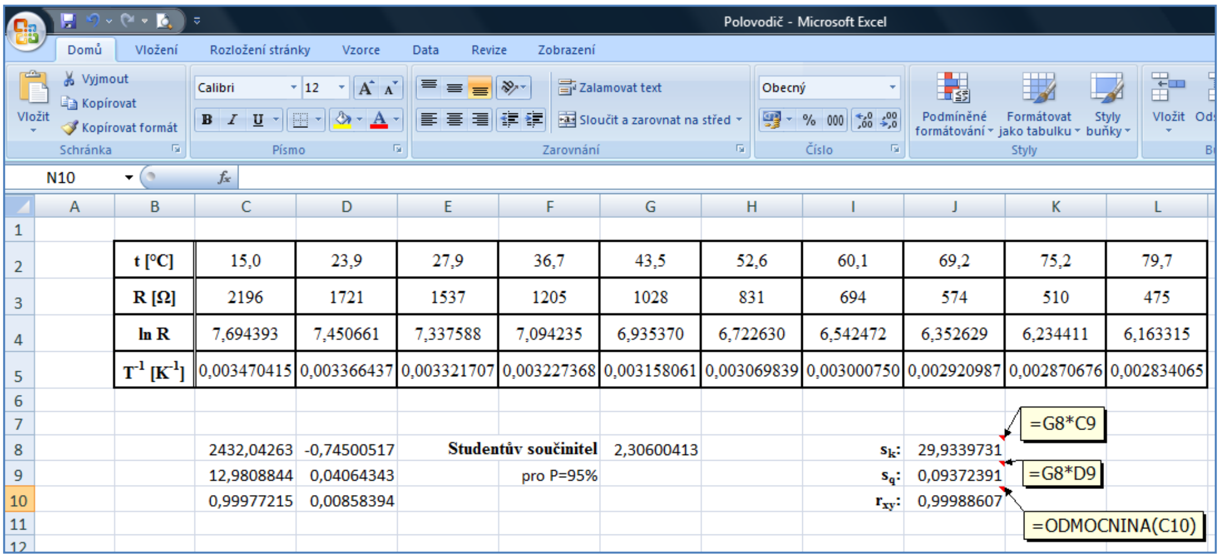
Dále určíme Studentův součinitel s parametry P = 95% a (n-1), v našem případě $t_{P,n-1}$ = TINV(0,05;8):



t [°C]	15,0	23,9	27,9	36,7	43,5	52,6	60,1	69,2	75,2	79,7
R [Ω]	2196	1721	1537	1205	1028	831	694	574	510	475
ln R	7,694393	7,450661	7,337588	7,094235	6,935370	6,722630	6,542472	6,352629	6,234411	6,163315
T^{-1} [K^{-1}]	0,003470415	0,003366437	0,003321707	0,003227368	0,003158061	0,003069839	0,003000750	0,002920987	0,002870676	0,002834065

2432,04263	-0,74500517
12,9808844	0,04064343
0,99977215	0,00858394

Určíme intervaly spolehlivosti regresních koeficientů a korelační koeficient:



Polovodič - Microsoft Excel

t [°C]	15,0	23,9	27,9	36,7	43,5	52,6	60,1	69,2	75,2	79,7
R [Ω]	2196	1721	1537	1205	1028	831	694	574	510	475
ln R	7,694393	7,450661	7,337588	7,094235	6,935370	6,722630	6,542472	6,352629	6,234411	6,163315
T^{-1} [K^{-1}]	0,003470415	0,003366437	0,003321707	0,003227368	0,003158061	0,003069839	0,003000750	0,002920987	0,002870676	0,002834065

2432,04263	-0,74500517	Studentův součinitel	2,30600413	s_k:	29,9339731
12,9808844	0,04064343	pro P=95%		s_q:	0,09372391
0,99977215	0,00858394			r_{xy}:	0,99988607

=G8*C9

=G8*D9

=ODMOCNINA(C10)

Z velikosti korelačního koeficientu $r_{x,y}$ je zřejmé, že prokládání závislosti *ln R = f(1/T)* přímkou je oprávněné. Zbývá jen pomocí výše odvozených vzorců (str. 1) vypočítat materiálové koeficienty *A* a *B* a jejich chyby:

$$\sigma_B = \sigma_k = 29{,}9339731 \doteq 30\ K$$

$$B = k = 2432{,}04263 \doteq 2430\ K$$

$$\sigma_A = e^q \cdot \sigma_q = e^{-0{,}74500517} \cdot 0{,}09372391 = 0{,}044493724 \doteq 0{,}04\ \Omega$$

$$A = e^q = e^{-0{,}74500517} = 0{,}474731845 \doteq 0{,}47\ \Omega$$

Naměřená data lze tedy aproximovat funkcí $R = A \cdot e^{\frac{B}{T}}$, kde $A = (0{,}47 \pm 0{,}04)\ \Omega$ a $B = (2430 \pm 30)$ K.