ÚVOD DO FYZIKÁLNÍCH MĚŘENÍ (FLM, FLS)

OBSAH

1. ÚVOD

Když v roce 1676 stanovil astronom Römer[1] ze svých pozorování zatmění Jupiterových měsíců pro rychlost světla c hodnotu 215 000 km·s^{-1}, šlo z dnešního pohledu o výsledek velmi nepřesný. Přesto se jednalo o významný mezník ve vývoji lidského poznání. Především se prokázalo, že rychlost světla je měřitelná a má konečnou hodnotu (pokusy konané o 70 let dříve Galileem tuto skutečnost nepotvrdily). S dalším postupným vývojem experimentálních zařízení a měřicích metod byla hodnota rychlosti dále upřesňována a korigována, například:

1849 – Fizeau[2] (metoda ozubeného kola), c = 315 000 km·s^{-1},

1868 – Foucault[3] (metoda rotujícího zrcadla), c = (298 000 ± 500) km·s^{-1},

1926 – Michelson[4] (metoda rotujícího hranolu), c = (299 796 ± 4) km·s^{-1},

1972 – Hall[5] (frekvenčně stabilizovaný laser + vakuový interferometr), c = (299 792 458,2 ± 1,1) m·s^{-1}.

Skutečnost, že velikost rychlosti světla nezávisí na rychlosti pohybu zdroje, prokázaná při experimentech, umožnila Albertu Einsteinovi formulovat postuláty teorie relativity. V současnosti dosahovaná přesnost měření, podmíněná objevem koherentních zdrojů záření a rozvojem laserové techniky, přinesla i změnu definice jednotky délky – metru – v roce 1983 [4]: *"Metr je délka, kterou uběhne světlo ve vakuu za dobu 1/299 792 458 sekundy."*

Předchozí odstavec obsahoval ukázku jednoho speciálního měřicího problému a některých záležitostí s ním přímo souvisejících. Přestože je měření na první pohled pouze záležitostí toho, kdo je provádí, je k jeho uskutečnění třeba celé řady dalších činností a splnění mnoha podmínek. Komplexně se celou problematikou zabývá významná vědní a technická disciplína, zvaná **metrologie** (viz dále).

1.1. Měření a metrologie

Měření jistě patří mezi základní činnosti člověka již od jeho civilizačních počátků. Nejprve šlo o prosté kvalitativní pozorování (určitý objekt, jev či stav existují), dále o odhady některých veličin přímo souvisejících s obživou či přežitím (vzdálenost, rychlost, objem, hmotnost, teplota). Dnes je měření pro většinu vědních i technických oborů zcela nezbytnou disciplínou, ve fyzice veškeré poznatky vycházely a stále plynou právě z **měření**. *„Měřením nazýváme činnost, jejímž cílem je zjištění, kolikrát je měřená veličina větší (menší) než stejnorodá veličina zvolená za jednotku".*

Účelem měření je získat poznatky o určité (fyzikální) veličině, popřípadě nalézt vztahy mezi více veličinami. Obecně lze říci, že měření plní dvě základní funkce:

poznávací: měření je prvotním zdrojem informací o dosud neznámých vlastnostech objektů nebo dějů,
kontrolní: měření podává informaci o výsledku plánovaného fyzikálního nebo technologického procesu.

Rozsáhlou skupinu kontrolních měření představují **technická měření**, která jsou úzce spjata s výrobou včetně předvýrobních etap. Tato měření se dělí podle účelu na

- *měření vědecko-výzkumná* (*vývojová*) – slouží k získání poznatků o navrhovaných a vyvíjených zařízeních a procesech,
- *měření provozní* – jsou nejčastější, umožňují získávání poznatků o průběhu technologického procesu a jeho výsledku – výrobku,
- *měření laboratorní* – slouží ke kalibraci měřicí a přístrojové techniky,
- *měření přejímací a záruční* – podávají informaci o tom, zda zařízení (výrobek) má požadované parametry,
- *měření diagnostická* – jejich úkolem je průběžně nebo periodicky sledovat vybrané parametry zařízení a tím předcházet poruchám či haváriím.

Ze dříve uvedené definice měření plyne úzké vymezení pojmu „měření" (= určitá činnost). Zároveň je však při hlubším zamyšlení zřejmé, že nestačí mít jednu vhodnou měřicí jednotku, ale je zapotřebí celé soustavy měřicích jednotek jednoznačně a přesně definovaných. K realizaci takové soustavy je nutná znalost základních fyzikálních konstant (viz například zmíněnou rychlost světla), k jejichž určení bylo zapotřebí navrhnout a ověřit měřicí metody a použít měřicí prostředky (zejména měřidla).

---

[1] Römer, Olaus (1644-1710), dánský astronom, ředitel hvězdárny v Kodani
[2] Fizeau, Armand Hyppolite Louis (1819-1896), francouzský fyzik
[3] Foucault, Jean Bernard Léon (1819-1868), francouzský fyzik
[4] Michelson, Albert Abraham (1852-1931), americký fyzik německého původu, Nobelova cena 1907
[5] Hall, John, L. (1934), americký fyzik, Nobelova cena 2005

V obecnějších souvislostech je třeba k realizaci vlastního měření vybudovat a provozovat vědecko-výzkumná pracoviště, vyškolit odborníky (měřící osoby), zajistit prostřednictvím mezinárodních organizací jednotnost a reprodukovatelnost měření. Celou zmíněnou problematikou se zabývá **metrologie**, která, jako ucelená vědní disciplína, bývá dále členěna na oblasti [6]:

- metrologické veličiny a jednotky
- metody měření a vyhodnocování výsledků měření
- měřicí prostředky
- problematika měřicích osob
- stanovování velkého okruhu různých materiálových vlastností
- zajištění jednotnosti a přesnosti měření v celostátním i mezinárodním měřítku.

Pravděpodobně nejznámější mezinárodní metrologickou organizací je *Bureau International des Poids et Mesures – BIPM* (Mezinárodní úřad vah a měr); v ČR tvoří systém organizačního zajištění metrologie následující instituce:

- *Ministerstvo hospodářství České Republiky* se sídlem v Praze
- *Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví*, Praha
- *Český metrologický institut*, Brno, s oblastními inspektoráty v Praze, Českých Budějovicích, Plzni, Liberci, Pardubicích, Brně a Opavě
- *Český institut pro akreditaci*, Praha.

V oblasti legislativy se k metrologii vztahuje především *zákon č. 505/1990 Sb.*

Problematika měření v rámci posluchačských laboratoří a činností na ně navazujících bude probrána v dalších kapitolách a odstavcích těchto skript.

1.2. Laboratorní řád

Vstup do laboratoří katedry fyziky a do fyzikálního praktika (dále jen do laboratoře) je povolen studentům Technické univerzity v Liberci v hodinách pravidelné výuky fyzikálních cvičení dle rozvrhu a v rámci diplomových prací (po dohodě s vedoucím či konzultantem práce) a to pouze těm, kteří jsou seznámeni s laboratorním řádem. V laboratoři lze provádět měření po prokazatelném seznámení se s *Bezpečnostními předpisy pro práci v laboratoři* (odst. 1.3.), což je stvrzeno podpisem na *Prohlášení*. Cvičení začíná přesně dle stanoveného rozvrhu, po jeho zahájení nebude nikdo do laboratoře vpuštěn.

1. K uložení vrchního oděvu, obuvi po přezutí a dalších, v laboratoři nepotřebných věcí, slouží prostor v uzamykatelné šatně. **Po přezutí si do laboratoře každý přinese jen potřeby k měření** a jeho zpracování (poznámkový sešit A4, psací a rýsovací potřeby, kalkulačku, tabulky).
2. Posluchači jsou povinni dbát všech **výstrah, zákazů, příkazů** i upozornění uvedených v laboratoři. Není dovoleno manipulovat s libovolným přístrojem bez předchozího seznámení s jeho funkcí.
3. **Po příchodu do laboratoří** se posluchači po pracovních skupinách hlásí u vedoucího cvičení, odevzdají mu referát z minulého měření, předloží písemnou přípravu a po přezkoušení je jim určena úloha pro aktuální měření. Převezmou pomůcky pro úlohu, kterou budou měřit. Všechny pomůcky si prohlédnou a zkontrolují, zjištěné zjevné závady ihned ohlásí. Převezmou také návod s upřesněním postupu měření dané úlohy.
4. Student **musí být** na každé cvičení **připraven**, včetně **písemné přípravy** v sešitě.
   Písemná příprava obsahuje (v uvedeném pořadí):
   1. Název úlohy,
   2. Pracovní úkol,
   3. Definici měřené veličiny, teoretické základy a konečný vzorec (u všech veličin vystupujících v tomto vzorci musí být uvedeny fyzikální jednotky). U výsledných vzorců rozbor s ohledem na chybu výsledku,
   4. Schéma pokusu,
   5. Postup práce,
   6. Tabulky pro měřené hodnoty.

[6] Zpracováno podle [1]

Součástí přípravy na cvičení je i **odevzdání referátu z předchozí úlohy** (resp. **zpracování** předchozí **úlohy** do sešitu). Referáty vrácené k opravě nutno odevzdat do týdne.

Jestliže nejsou splněny výše uvedené požadavky, není měření úlohy povoleno.

5. **Průběh měření** úloh se řídí těmito zásadami:
   a) studenti provádějí měření zpravidla ve dvojicích, pořadové číslo dvojice označuje číslo úlohy, kterou bude dvojice měřit nejdříve,
   b) elektrické obvody **připojuje** ke zdroji asistent,
   c) vlastní naměřené hodnoty (s příslušnými jednotkami) si zaznamenává **každý student** perem do poznámkového sešitu,
   d) **odpojení** elektrických obvodů od zdroje provádí asistent,
   e) **ve vypracovávání** referátů z úloh pro dvojice **se** studenti **střídají**, referát z **frontální** úlohy zpracovává **každý** student,
   f) dvojice provádějí měření **cyklicky**, podle pořadí určeného očíslováním úloh pro dvojice.

   Není dovoleno bez důvodu opouštět pracoviště u dané úlohy, hlasitě se bavit.
   Je zakázáno v laboratoři jíst, kouřit či popíjet a používat mobilní telefon (před vstupem musí být deaktivován).
6. Po **skončení měření** jsou naměřené hodnoty **zpracovány** (početně nebo graficky). Poté ohlásí studenti konec měření asistentovi, který zajistí kontrolu pracoviště a provedený **zápis naměřených** hodnot a výpočtů **podepíše**. Nejsou-li shledány závady uzná asistent **prezenci**.
7. Každý **referát** (protokol o provedeném měření) musí být upraven dle „**Pokynů pro vypracování referátu**“ (odst. 3.3.1.) a musí být zpracován **individuálně**, to znamená, že nese charakteristické znaky samostatné práce. Student musí **látku** v nich obsaženou **ovládat**. Při hrubě nesprávném nebo v předepsaném termínu neodevzdaném referátu **nemusí být absolvování dané úlohy uznáno** a je ji pak nutno znovu změřit v náhradním termínu**. Opsaný referát** je hodnocen jako hrubě nesprávný se všemi důsledky spáchaného **podvodu** (podle disciplinárního řádu příslušné fakulty).
8. **Nepřítomnost** na cvičení je třeba omluvit a zameškané cvičení **nahradit**. Proto student současně s omluvenkou předkládá přípravu na zameškanou úlohu. Na základě povolení student změří tuto úlohu ve cvičení s jinou studijní skupinou, **je-li tato úloha volná**.
   Na mimořádná náhradní cvičení (vypsaná mimo rozvrh hodin 1× za tři týdny), je třeba se přihlásit.
9. **Zápočet** bude udělen na základě **absolvování** předepsaných úloh, **odevzdání** příslušného počtu vyhovujících referátů a **uspokojivých výsledků** průběžné kontroly.

1.3. Bezpečnostní předpisy pro práci v laboratoři[7]

Při práci v laboratoři může dojít k úrazu pokud nebudeme dodržovat **základní pravidla bezpečné práce**. Jedná se především o práci s horkými a křehkými předměty a materiály, se sklem a chemickými látkami a především pak o práci s **elektrickým proudem a laserem.**

1. Posluchači jsou povinni **dbát všech výstrah**, zákazů, příkazů, pokynů i upozornění vyvěšených v laboratoři. **Není dovoleno** manipulovat s jakýmkoliv přístrojem v laboratoři, **dokud se** řádně **neseznámíme** s jeho funkcí a s návodem k používání.
2. Vrchní oděv, tašky a obuv po přezutí odkládáme do zamykatelné skříně na chodbě. K přezutí používáme zásadně *obuv s pevnou podrážkou*. Dbáme na to, aby v laboratoři byly **průchodné uličky**, aby v průchodu nebránily stoličky či jiné předměty. Při práci v laboratoři **se maximálně soustředíme** na přípravu a vlastní měření.
3. K znalosti bezpečnostních předpisů patří i **základní znalosti o poskytnutí první pomoci**. Je třeba: vědět, kde je umístěná *lékárnička* a odkud *zavolat lékaře,* znát *základní pravidla* poskytnutí první pomoci při úrazech v laboratoři.
4. Pro zajištění požární ochrany je nutné znát "**Požárně-poplachové směrnice**" pro budovu C Technické univerzity v Liberci, dále *umístění hasicího přístroje*, způsob jeho použití a manipulaci s ním.

[7] Zpracováno podle [2]

5. **Horké předměty** nebereme nikdy holou rukou, ale přenášíme je ve vhodných nádobách, pomocí *držáků.* Horké skleněné předměty (především z měkkého skla) neoplachujeme studenou vodou, stejně jako studené předměty neoplachujeme vroucí vodou, neboť by vlivem velkého pnutí mohly prasknout. *Skleněné předměty oplachujeme opatrně vlažnou vodou.* Při ohřívání kapaliny na plynovém kahanu používáme azbestovou síťku.
6. **Popáleniny** především rychle *ochladíme* proudem studené vody a poté *překryjeme* sterilním obvazem z lékárničky. Nechladíme pouze popáleniny III. stupně (zuhelnatělá tkáň), které kryjeme sterilním obvazem a *ihned voláme lékaře*, stejně jako u lehčích popálenin s větším rozsahem.
7. K měření teploty budeme nejčastěji používat **rtuťové teploměry**. Teploměr zasouváme opatrně *citlivým* otáčením do těsných otvorů (guma, korek) v měřících přístrojích. *Nevyhříváme* ho nad teplotu odpovídající maximálnímu rozsahu stupnice. S teploměrem *manipulujeme vždy nad miskou,* aby se, v případě prasknutí, rtuťová náplň nerozlila. Teploměr **nikdy nepoužíváme k míchání**, k tomu slouží míchačky.
8. Při poraněních způsobených **pořezáním** o skleněné předměty postupujeme takto: ránu a její okolí *omyjeme* čistou vodou, popřípadě dezinfekčním prostředkem (peroxidem vodíku) a na ránu *přiložíme* sterilní obvaz. Postiženého *odvedeme k lékaři.*
9. Ve fyzikální laboratoři též pracujeme s některými **chemickými látkami**: benzín, alkoholy, kyselina octová a různé druhy olejů. Aby se omezilo nepříznivé působení chemických látek, je potřebné, aby se studenti předem seznámili s vlastnostmi těch látek, se kterými budou pracovat, aby znali postup a způsob práce s nimi. Především je nutné dbát, aby veškeré chemikálie, které budeme používat, byly *řádně označeny štítky* s názvem. K přelévání chemikálií používáme nálevku. *S benzínem a lihem zacházíme jako s hořlavinami*. Pracujeme v místnosti, kde je možné větrat, nepracujeme v blízkosti ohně. Po manipulaci s chemickými látkami řádně *opláchneme použité pomůcky* (pomůcky znečištěné olejem musíme umýt saponátem a opláchnout teplou vodou). Práce s chemickými látkami je vždy ukončena **mytím rukou**.
10. Přísně dodržujeme bezpečnostní pravidla při práci s **elektrickým proudem**, i když pracujeme s nízkým napětím. Především dodržujeme následující pokyny
    - elektrické obvody **připojuje** ke zdroji a **odpojuje** od zdroje **asistent**
    - v elektrických obvodech používáme výhradně *izolované vodiče*
    - nemanipulujeme s obvodem při zapnutém zdroji proudu
    - změnu v obvodu provádíme až po vypnutí zdroje, <u>jen jednou rukou</u> tak, aby proud nemohl projít tělem
    - *nevkládáme* kovové předměty a samostatné vodiče do zásuvek elektrického vedení
    - cítíme-li při dotyku s vodičem (přístrojem, spotřebičem) chvění, *ihned jej odpojíme od zdroje*
    - seznámíme se s umístěním a funkcí **hlavních vypínačů** proudu
11. Jestliže vznikne účinkem elektrického proudu **požár**, **nesmíme** jej **hasit vodou**, ale *sněhovým* hasicím přístrojem **při vypnutém proudu** (viz bod 4.).
12. Při **zasažení** elektrickým proudem *vyprostíme* postiženého z dosahu elektrického proudu (vypnutím proudu, odsunutím vodiče, odtáhnutím postiženého, přerušením vodiče) především tak, *abychom se sami nezranili*. Poté zjistíme jeho stav a v případě zástavy srdce zahájíme nepřímou *srdeční masáž* kombinovanou s umělým dýcháním a **neprodleně zavoláme R**ychlou **Z**áchrannou **P**omoc.
13. Pro práci s **laserem** musíme být především seznámeni s vlastnostmi laseru (vlnová délka a výkon). Při používání laserového ukazovátka (630-680 nm, $\leq$ 1mW, laser 2. třídy) dbáme především na to, *aby světelný paprsek nezasáhl oči.*
14. V laboratoři není povoleno používání mobilních telefonů, před vstupem do laboratoře je nutné telefon vypnout – deaktivovat.

<u>Součástí bezpečnostních předpisů jsou i pravidla uvedená v laboratorním řádu.</u>

2. ZÁKLADY MĚŘENÍ FYZIKÁLNÍCH VELIČIN

Důležité jsou jak samotné hodnoty, tak i chyby, uvedené znaménkem "±". Ve fyzice platí, že každá měřená veličina se skládá ze samotné hodnoty a z její chyby (bez chyb se měřit nedá). Určení velikosti chyby bývá často stejně obtížné, jako samotné měření hledané hodnoty. Fyzik se přirozeně snaží, aby chyby měření byly co možná nejmenší, ale vždy musí zůstat realistou a chyby měření určovat zodpovědně – jinak jeho výsledky nebere nikdo vážně.

Jiří Grygar *Vesmírná zastavení*

2.1. Fyzikální veličiny a jejich jednotky

Měřením *fyzikální veličiny* rozumíme určení její velikosti v násobcích zvolené *jednotky*. Hodnotu fyzikální veličiny A vyjadřujeme rovnicí

$$A = \{A\} \times [A] \,,$$

kde A je značka pro fyzikální veličinu, $[A]$ značka pro jednotku a $\{A\}$ značí číselnou hodnotu veličiny A vyjádřenou v násobcích jednotky $[A]$. Například $l = 0{,}25 \times \mathrm{m}$, kde l je značka fyzikální veličiny *konvenční zraková vzdálenost,* m je značka jednotky délky, metr; 0,25 je číselná hodnota vzdálenosti vyjádřená v metrech.

Měření veličin tedy vyžaduje stanovení jednotek. Aby výsledky měření získané různými pozorovateli byly navzájem srovnatelné, musí být jednotky stanoveny jednotně, přesně a jednoznačně. Volba a definice jednotek musí zaručovat co největší stálost vzhledem k okolnostem měření. Většinou se uskutečňuje tak, že je přímo udán podrobný experimentální postup, kterým se jednotka realizuje.

V minulosti byly zaváděny jednotky pro různé veličiny navzájem nezávisle na sobě. Až na základě poznaných souvislostí mezi veličinami byl brán zřetel i na souvislosti mezi jejich jednotkami. Podle stupně poznání a technické úrovně měřících prostředků vznikaly různé soustavy navzájem provázaných fyzikálních jednotek. V současné době je v celosvětovém měřítku preferována Mezinárodní soustava jednotek - **SI** (*Système International d'Unités*), přijatá na 11. Generální konferenci pro míry a váhy *(Conférence Générale des Poids et Mesures* - *CGPM*) v roce 1960. SI je koherentní vzhledem ke zvolené soustavě veličin i rovnic a obsahuje (viz [3]):

- **základní jednotky,**
- **odvozené jednotky** včetně doplňkových jednotek.

Základní veličina	Základní jednotka SI	
	Název	Značka
délka	metr	m
hmotnost	kilogram	kg
čas	sekunda	s
elektrický proud	ampér	A
termodynamická teplota	kelvin	K
látkové množství	mol	mol
svítivost	kandela	cd

Tab. I – 1: Základní veličiny a jednotky SI

V roce 1960 zařadila CGPM jednotky SI radián (rad) a steradián (sr) pro rovinný a prostorový úhel jako "doplňkové jednotky". V roce 1980 rozhodla Mezinárodní komise pro míry a váhy (*Comité International des Poids et Mesures, CIPM*) interpretovat třídu doplňkových jednotek v SI jako třídu bezrozměrových odvozených jednotek, pro které CGPM povoluje možnost použít i nepoužít je ve výrazech pro odvozené jednotky SI. Ačkoli je v důsledku tohoto pojetí koherentní jednotkou pro rovinný a prostorový úhel číslo 1, je vhodné používat v mnoha praktických případech zvláštních názvů (značek): radián (rad) a steradián (sr), místo čísla 1.

Pro některé odvozené jednotky SI jsou zavedeny zvláštní názvy a značky.

Abychom se vyhnuli používání příliš velkých nebo příliš malých číselných hodnot, přidávají se ke koherentní soustavě ještě *dekadické násobky a díly jednotek SI*. Jsou tvořeny pomocí *předpon*, které jsou uvedeny v každých matematicko-fyzikálních tabulkách.
Koherentní jednotkou pro každou veličinu s rozměrem jedna je *jednotka jedna*, značka 1, která se však většinou výslovně neuvádí, je-li taková veličina vyjádřena číselně (například index lomu $n = 1{,}53 \times 1 = = 1{,}53$). U některých veličin však má jednotka 1 zvláštní názvy, které se podle kontextu mohou nebo nemusí používat. (Například značky rad a sr).

Dekadické násobky a díly jednotky jedna se vyjadřují mocninami 10. Nevyjadřují se kombinací značky 1 s předponou. V některých případech se užívá *značka* % (*procento*) pro číslo 0,01 (například: činitel odrazu $r = 0{,}8 = 80\%$).

2.2. Metody měření

Tutéž veličinu můžeme zpravidla měřit různými způsoby. Měřicí metodu vybíráme podle charakteru měřené veličiny a dostupného přístrojového vybavení, dále podle toho, z kterého fyzikálního zákona při měření vyjdeme a jakou přesnost výsledků požadujeme. Ve většině případů nelze využít naměřené hodnoty přímo, ale je nutné je zpracovat vhodnými grafickými či početními metodami, přičemž některé metody měření vyžadují i speciální metody zpracování. Obecně dělíme základní metody na **přímé** a **nepřímé**, **absolutní** a **relativní**.

Přímá metoda – hledanou veličinu určujeme na základě její definice (příkladem může být stanovení hustoty homogenního tělesa z měření jeho hmotnosti a objemu).
Nepřímá metoda – využívá k nalezení číselné hodnoty jiných než definičních vztahů pro danou veličinu (například stanovení hustoty tělesa s využitím Archimédova zákona).
Absolutní metoda – výsledek měření je vyjádřen přímo v definovaných jednotkách (například délka v metrech, proud v ampérech).
Relativní metoda – jako výsledek měření se získá poměr měřené veličiny k jiné veličině stejného druhu, realizované etalonem, standardem či normálem (nejznámějšími etalony jsou přesná závaží, normály elektrického odporu, kapacity a svítivosti).

Charakterizujme ještě některé speciálnější metody měření, které budeme v laboratořích používat. Jedná se o **metodu substituční, kompenzační a nulovou**, dále o **metodu postupnou.**

Substituční metoda – porovnávají se účinky způsobené měřenou veličinou s účinky známého a odstupňovaného normálu veličiny stejného druhu. V případě, že účinky (například výchylka měřícího přístroje) jsou stejné, je možné prohlásit, že hodnota měřené veličiny je rovna hodnotě normálu.

Kompenzační metoda – rovněž se porovnávají účinky měřené veličiny a účinky známé veličiny stejného druhu, ale oba účinky se vyskytují současně a jeden působí proti druhému. Jestliže výchylka měřícího přístroje, jehož prostřednictvím se porovnávají oba účinky, je při kompenzaci rovna nule, jedná se o metodu nulovou.

Příkladem substituční metody je měření elektrického odporu za použití odporové dekády, kompenzační metodou se měří elektromotorická napětí, nulovou metodou je vážení na rovnoramenných vahách či měření elektrického odporu Wheatstoneovým můstkem.

Postupná metoda (metoda následných měření):

Při opakovaných měřeních, kdy (například z časových důvodů) nenulujeme měřidlo pro záznam naměřené hodnoty dalšího měření, ale následující měření začíná tam, kde skončilo předchozí, používáme **postupnou metodu**. Provádíme sudý počet měření a hodnoty zapisujeme tak, že do prvního sloupce tabulky zaznamenáme pod sebe první polovinu hodnot, do druhého sloupce polovinu druhou. Příkladem může být měření doby kmitu T periodicky se opakujícího děje. Děj nepřerušujeme a stopky nezastavujeme, odečítáme čas po uplynutí určitého počtu kmitů (např. deseti). Tabulka s naměřenými hodnotami by v tom případě měla vzhled tabulky *I – 2*.

$T_{10\text{-}50}$ / s	$T_{60\text{-}100}$ / s
10,3	63,1
20,5	73,1
31,1	83,5
42,0	94,7
52, 8	104,8

Tab. I – 2 : Postupná metoda – naměřené hodnoty

Postup při zpracování takto naměřených hodnot je uveden i s příkladem v odstavci 3.1.4..

2.3. Chyby měření

Při měření určujeme velikost fyzikální veličiny, jejíž hodnota nikdy nebude zcela přesná. Každé měření je zatíženo chybami, které jsou nejrůznějšího původu. Naměřené hodnoty jsou ovlivněny vlastnostmi měřících přístrojů, použitou metodou měření i samotnou osobou, která měření provádí.

Stanovení přesnosti, s jakou bylo měření provedeno, je nezbytnou součástí každého měření, neboť výsledek měření, bez udání přesnosti, nelze porovnávat s jiným naměřeným výsledkem. *Nedílnou součástí měření je tedy důkladná analýza chyb, které se při něm uplatnily, či mohly uplatnit.* Obecně lze chyby měření roztřídit podle různých hledisek.

Třídění chyb měření:

- podle původu: chyby měřících přístrojů, chyby osobní, chyby pocházející z použité metody,
- podle charakteru: chyby náhodné (2.3.1.), chyby systematické (soustavné) (2.3.2.),
- dle typu: chyby absolutní a relativní (2.3.2.),
- podle pravděpodobnosti, s jakou fyzikální veličinu naměříme při dalším měření: chyby maximální, chyby krajní, nebo pravděpodobné chyby (dříve často užívané).

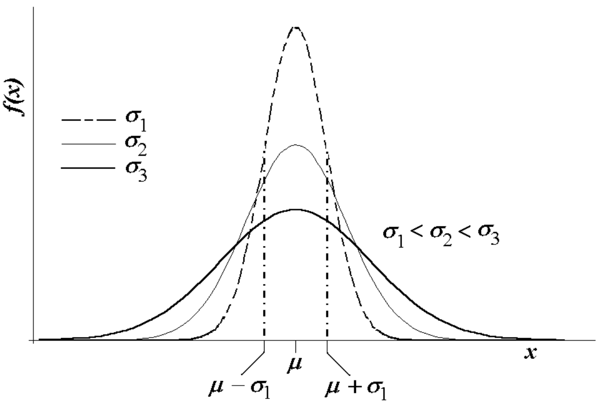
2.3.1. Chyby náhodné

Jestliže provádíme (při dostatečné rozlišovací schopnosti měřících přístrojů) opakovaná měření téže veličiny za stále stejných podmínek, dostáváme výsledky, které se navzájem liší. Příčinou je řada přesně nespecifikovaných vlivů, které se vzájemně náhodně kombinují, čímž způsobují **náhodné chyby** měření.

Při oceňování náhodných chyb měření se používá metod matematické statistiky. Náhodnou veličinu lze charakterizovat pravděpodobností, s jakou nabývá svých hodnot. Kdybychom provedli velké množství měření (v limitním případě by se počet měření n blížil nekonečnu), zjistili bychom, že četnost, s jakou se naměřené hodnoty x_i (i = 1, 2, …, n) vyskytují, vykazuje jistou zákonitost. Nejčastěji naměříme údaje v blízkém okolí hodnoty, kterou nazýváme **střední hodnota**, značka $\boldsymbol{\mu}$. Rozdíl ($x_i - \mu$) potom nazýváme **odchylka**. Analyticky lze celou závislost zapsat vztahem, který popisuje hustotu pravděpodobnosti $f(x)$ výskytu spojité náhodné veličiny x

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \qquad (2.1)$$

kde μ je již zmiňovaná střední hodnota a $\boldsymbol{\sigma}$ **směrodatná odchylka normálního rozdělení**. Uvedený vztah se obvykle nazývá **normální rozdělení** nebo *Laplaceovo - Gaussovo rozdělení.*



Obr. I – 1 : Graf Laplaceova - Gaussova rozdělení

Průběh funkce $f(x)$ závisí na velikostech parametrů σ a μ, souhrnně nazývaných *parametry normálního rozdělení studovaného základního souboru*. Pro hodnotu $x = \mu$ dosahuje křivka svého maxima a křivka normálního rozdělení je symetrická kolem kolmé osy procházející bodem $x = \mu$. Směrodatná odchylka normálního rozdělení σ určuje strmost křivky.

Pravděpodobnost $P_a^b(x)$, s jakou bude naměřená hodnota veličiny x ležet v intervalu $\langle a; b\rangle$, můžeme vypočítat jako určitý integrál hustoty pravděpodobnosti

$$P_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}(x) = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Při zpracování naměřených hodnot nebudeme hledat velikost pravděpodobnosti pro daný interval, ale velikost intervalu pro zvolenou pravděpodobnost, a omezíme se na takové intervaly, které jsou symetrické kolem střední hodnoty μ. Pravděpodobnost vyjadřujeme kladným číslem menším nebo rovným jedné (kupříkladu $P = 0{,}683 < 1$). Lze ji též vyjádřit v procentech ($P = 68{,}3$ %) a o intervalu, jemuž přísluší tato pravděpodobnost, budeme hovořit jako o procentním **intervalu spolehlivosti**. Je zřejmé, že čím větší spolehlivost volíme, tím bude interval širší.

Výše uvedený teoretický rozbor předpokládá, že je znám soubor n hodnot pro $n \to \infty$. V tom případě jsou parametry normálního rozdělení popsány jednoznačně. V praxi ovšem nelze provést nekonečně mnoho měření, je nutné se spokojit s omezeným počtem, a z tohoto, v podstatě **náhodného výběru**, určit odhad parametrů celého nekonečného souboru. Získáme-li z měření soubor hodnot x_i (i = = 1, 2, ..., n), potom za nejlepší odhad střední hodnoty budeme brát **aritmetický průměr** $\bar{x}$ naměřených hodnot

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} , \tag{2.2}$$

přičemž směrodatnou odchylku normálního rozdělení nahradíme rovněž odhadem

$$\sigma \approx s(x) = \sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} , \tag{2.3}$$

kde $s(x)$ nebo též $\sigma_{n-1}(x)$ je **výběrová směrodatná odchylka** (směrodatná odchylka **jednoho měření**). V praxi se též používá druhá mocnina výběrové směrodatné odchylky, kterou nazýváme výběrovým rozptylem a značíme s^2.

Výběrová směrodatná odchylka $s(x)$, kterou určujeme pro soubor naměřených hodnot podle vztahu (2.3), charakterizuje reprodukovatelnost pouze jednoho měření z tohoto souboru. Udává šířku intervalu, do něhož (se zvolenou pravděpodobností) padne naměřená hodnota. Analogicky, jako lze reprodukovatelnost jednoho měření charakterizovat veličinou $s(x)$, lze reprodukovatelnost aritmetického průměru charakterizovat **výběrovou směrodatnou odchylkou střední hodnoty** (aritmetického průměru) $\bar{s}(x)$

$$\bar{s}(x) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} . \tag{2.4}$$

Jsou-li známy hodnoty $\bar{s}(x)$ a $\bar{x}$, můžeme vypočítat interval spolehlivosti pro požadovanou pravděpodobnost.

Interval spolehlivosti je interval, ve kterém bude ležet hodnota měřené veličiny s pravděpodobností P, a který se dá vyjádřit ve tvaru

$$\langle \bar{x} - t_{\mathrm{P,n}}\bar{s}(x), \quad \bar{x} + t_{\mathrm{P,n}}\bar{s}(x) \rangle ,$$

kde $t_{\mathrm{P,n}}$ je tak zvaný **Studentův součinitel** (viz Dodatek 3), který modifikuje šířku intervalu spolehlivosti v závislosti na počtu měření n a na spolehlivosti P. Hodnotu $t_{\mathrm{P,n}}\bar{s}(x)$ nazýváme **chybou měření**. V naší laboratoři budeme chybu měření zaokrouhlovat na jednu platnou číslici. Aritmetický průměr zaokrouhlíme na číslici téhož řádu jako je řád zjištěné chyby měření. Výsledek měření zapisujeme ve tvaru $x = \left(\bar{x} \pm t_{\mathrm{P,n}}\bar{s}(x)\right)$ s udáním pravděpodobnosti P. Nejčastěji se používá pravděpodobnost 95%.

Je-li zvolená pravděpodobnost pro interval spolehlivosti vysoká (95 % a vyšší), nazýváme součin $t_{\mathrm{P,n}}\bar{s}(x)$ **krajní chybou aritmetického průměru** a označujeme jej $\bar{\kappa}(x)$.

Namísto termínu *spolehlivost* (pravděpodobnost s jakou při dalším měření naměříme určitou hodnotu x) se též užívá termín *riziko* α = (100 − P) [%]. Parametr α udává riziko (pravděpodobnost), že měřená hodnota do uvedeného intervalu nepadne.

Postup při zpracování naměřených hodnot je uveden v odstavci 3.1.1..

2.3.2. Chyby systematické

Systematickou chybou měření rozumíme chybu, jejíž hodnota se nemění, opakuje-li se měření za stejných podmínek (což nelze vždy zaručit). Zdroje systematických chyb jsou různé, mohou jimi být použité *měřící prostředky a metody, ale i osoby provádějící měření.* Na rozdíl od náhodných chyb, u kterých nedovedeme přesně popsat příčinu vzniku, lze důslednou analýzou měření soustavné chyby odhalit a odhadnout jejich velikost. Systematické chyby, které vznikají použitou fyzikální metodou můžeme odhalit a eliminovat opakováním měření různými metodami. Mezi **systematické osobní chyby** můžeme zařadit například opožděné spuštění stopek (doba nervové reakce) nebo chybný způsob odečítání ze stupnice (paralaktická chyba). Chyby osobní se nejúčinněji odstraní automatizací měření.

V další části budeme předpokládat, že všechny ostatní systematické chyby jsou zkorigovány do té míry, že je můžeme zanedbat proti chybě měřidla. **Chyba měřidla** v sobě zahrnuje vedle chyby systematické i složku chyby náhodné. Nemůžeme tedy počtem měření chybu měření libovolně zmenšovat! Výběrová směrodatná odchylka charakterizuje jen část chyb měření, při zpracování měření musíme uvážit i omezenou *přesnost měřidla*. Přesností měřidla budeme rozumět schopnost měřidla udávat za stanovených podmínek měření hodnoty blízké skutečné hodnotě měřené veličiny. **Přesnost měřidla** charakterizuje vlastnosti měřidla, vyjadřuje chyby (systematické i náhodné), které měřidlo vnáší do měření. Určování přesnosti měřidel je pro různé druhy měřidel různé a je udáváno výrobcem, který obvykle odkazuje na příslušné normy související s výrobou měřidla a jeho používáním.

Chyba měřidla se udává jako **největší přípustná chyba *m***, a v naší laboratoři ji budeme (z hlediska pravděpodobnosti) zařazovat do stejné kategorie jako krajní chybu aritmetického průměru $\bar{\kappa}(x)$. V mnoha případech se k vyjádření chyby měřidel používá **relativní chyba** (vyjádřená v procentech), kterou definujeme vztahem $m_r\,[\%] = (m/Z)\cdot 100$, kde Z může mít význam velikosti naměřené hodnoty, nebo rozsahu měřidla, na kterém odečítáme.

Největší přípustnou chybu měřidla lze zpravidla určit některým z následujících postupů:

a) Jestliže není uvedena informace o přesnosti od výrobce, pak chybu m určujeme tak, že za ni pokládáme zlomek nejmenšího dílku na stupnici měřidla, který jsme schopni bez jiných pomůcek rozlišit. Zpravidla to bývá (1/2) nejmenšího dílku, nebo celý dílek, což závisí na velikosti dílku, ale i na pozorovateli a jeho zkušenosti. Příklady největších přípustných chyb:

pásové měřítko	0,5 mm - 1 mm
posuvné měřítko	0,05 mm - 0,1 mm
mikrometr mechanický	0,01 mm
mikrometr digitální	0,002 mm
číselníkový úchylkoměr	0,01 až 0,001 mm
stopky mechanické	0,3 s
stopky digitální	0,01 s
teploměry	1 - (1/2) nejmenšího dílku

b) Určení přípustné chyby vah provedeme podle návodu uvedeného v odstavci 2.4.2. Zpravidla při vážení na vzduchu a bez oprav je největší přípustná relativní chyba[8] v rozmezí hodnot 0,1% - 1% .

c) U elektrických analogových (ručkových) přístrojů jsou přímo na stupnici přístroje uvedeny třídy přesnosti T_p. Třída přesnosti udává největší přípustnou chybu v procentech z měřeného rozsahu. Vzhledem k tomu, že se jedná se o relativní chybu je nutné k docílení co největší přesnosti volit takový rozsah přístroje, který dovoluje měřit co největší výchylku na stupnici.[9]

[8] Relativní chybu δ_r definujeme jako poměr $\frac{\delta}{\bar{x}}.100\,[\%]$, kde δ je chyba a $\bar{x}$ je naměřená hodnota, v tomto případě δ má význam krajní chyby s pravděpodobností 95%.

[9] Příklad: na miliampérmetru s třídou přesnosti $T_p = 0{,}5$ jsme naměřili hodnotu $I = 45{,}5$ mA na rozsahu 60 mA. Potom chyba měření $m = \pm\,(0{,}5/100)\cdot 60 = \pm\,0{,}3$ mA a výsledná hodnota proudu je $I = (45{,}5 \pm 0{,}3)$ mA. Při měření téhož proudu, ale na rozsahu 240 mA je však $m = \pm\,1{,}2$ mA!

d) Největší přípustné chyby u číslicových měřících přístrojů nejsou stanoveny jednotnými normami. Je nutné se seznámit s návodem ke konkrétnímu měřícímu přístroji. Nejčastější případy:

α) Výslednou chybu získáme ze dvou složek; jednak z chyby měřeného rozsahu $\pm m_{r1}$ vyjádřené v procentech a z chyby v procentech z měřené hodnoty $\pm m_{r2}$. Celkovou největší přípustnou chybu m_r potom vypočítáme ze vztahu

$$|m_\mathrm{r}| \le |m_\mathrm{r1}| + |m_\mathrm{r2}| \frac{M}{X} \ ,$$

kde M označuje použitý měřící rozsah a X naměřenou hodnotu[10].

β) Celkovou chybu určíme ze dvou složek a to z chyby v procentech z měřené hodnoty $\pm m_r$ a z počtu kvantizačních kroků $\pm N$. N je počet jedniček nejnižšího místa číslicového zobrazovače přístroje na zvoleném rozsahu. Při výpočtu chyby musíme počítat s převedením N na správné hodnoty měřené fyzikální veličiny[11].

2.3.3. Zákon hromadění chyb (chyby nepřímých měření)[12]

Přímo naměřené veličiny dosazujeme do fyzikálních vztahů, abychom vypočetli hledanou fyzikální veličinu. Například máme-li určit rezistanci R přímou metodou, změříme hodnoty proudu I a napětí U a z Ohmova zákona vypočítáme rezistanci $R = U/I$. Obecně si tuto závislost vyjádříme funkcí f. Máme vypočítat hodnotu fyzikální veličiny Y z naměřených veličin x_i (i = 1, 2, 3, ..., n), s kterými souvisí obecnou funkční závislostí

$$Y = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \ .$$

Při měření veličin x_i jsme vždy určovali jejich hodnoty včetně chyb (podle postupů, uvedených v předchozích odstavcích), máme tedy k disposici hodnoty $x_i = (\bar{x}_i \pm \bar{\delta}(x_i))$, kde $\bar{x}_i$ je aritmetický průměr a $\bar{\delta}(x_i)$ je chyba měření. Tato chyba může být (podle pravděpodobnosti, s jakou fyzikální veličinu naměříme) jakékoliv druhu (směrodatná odchylka, krajní chyba, největší přípustná chyba), při dalším zpracování však chyby $\bar{\delta}(x_i)$ všech hodnot x_i musí být stejného druhu!!

Hodnotu fyzikální veličiny $\bar{Y}$ vypočítáme dosazením do funkční závislosti

$$\bar{Y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, ..., \bar{x}_n)$$

a výslednou chybu $\bar{\delta}(Y)$ veličiny Y určíme buď ze vztahu

$$\bar{\delta}(Y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \bar{\delta}^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \bar{\delta}^2(x_2) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 \bar{\delta}^2(x_3) + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \bar{\delta}^2(x_n)} \ , \quad (2.5)$$

který **nazýváme kvadratickým (Gaussovým) zákonem hromadění chyb** nebo ze vztahu

$$\bar{\delta}(Y) = \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\bar{\delta}(x_1)\right| + \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\bar{\delta}(x_2)\right| + \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)\bar{\delta}(x_3)\right| + ... + \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\bar{\delta}(x_n)\right| , \quad (2.6)$$

který nazýváme **lineárním zákonem hromadění chyb**.

Ve fyzikálních laboratořích se pro zjednodušení dohodneme na následujících omezeních[13]: Kvadratický zákon hromadění chyb použijeme v případě, že v jednotlivých měřeních převládají *náhodné chyby* a chceme vypočítat *výslednou směrodatnou odchylku*.

---

[10] Příklad: na digitálním voltmetru (s uvedenou chybou z rozsahu 0,1 % a s chybou z měřené hodnoty 0,1 %) jsme naměřili hodnotu 2,568 V na rozsahu 4 V. Potom je chyba z rozsahu 0,004 V, chyba z naměřené hodnoty 0,003 V, celková chyba 0,007 V a celková relativní chyba 0,27 %. Výsledek : U = (2,568 ± 0,007) V.

[11] Příklad: na multimetru (s uvedenou chybou 0,2 % z naměřené hodnoty a **třemi** kvantizačními kroky (tzv. digity) pro rozsah 200,0 Ω) jsme naměřili hodnotu 95,2 Ω . Výsledná chyba je potom součtem hodnot 0,1904 Ω + 0,3 Ω ≈ 0,5 Ω a výsledná hodnota R = (95,2 ± 0,5) Ω.

[12] Nezaměňovat s nepřímou metodou, viz odstavec 2.2.

[13] Postup při zpracování naměřených hodnot je i s příkladem uveden v odstavci 3.1.2.

Lineární zákon hromadění chyb použijeme, jestliže v jednotlivých měřeních převládají *systematické chyby* a naším cílem je odhadnout *výslednou krajní chybu*.

2.4. Měření základních fyzikálních veličin

V tomto odstavci bude podrobněji pojednáno o měření těch základních veličin (*tab. I – 1*), se kterými se v laboratořích bezprostředně setkáme. Ostatní budou probrány stručně [4].

2.4.1. Čas

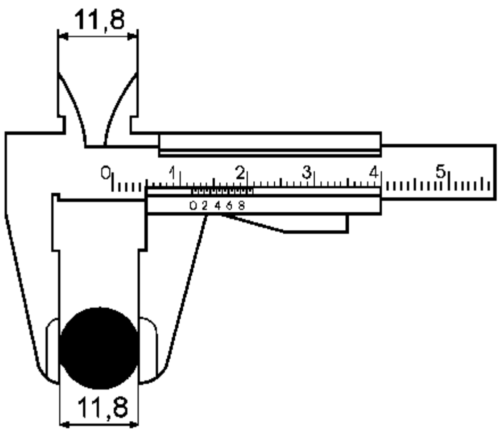
Čas vyjadřuje trvání dějů. Hlavní jednotkou je 1 sekunda = 1 s. Jedinou možností, jak čas měřit, je srovnání s nějakým pravidelně se opakujícím jevem (astronomickým – oběh Země kolem Slunce, „pozemským" – kmit krystalu křemene, perioda záření atomu cesia).

V laboratoři budeme pro měření času používat stopky, a to dva druhy: stopky analogové (ručkové) a digitální (číslicové). Doba oběhu u stopek ručkových bývá nejčastěji 60 s. Kromě sekundového dělení se vyskytuje i dělení na minuty. Maximální přípustná chyba těchto stopek, daná jejich konstrukcí, se pohybuje od 0,1 s až 0,2 s. Digitální stopky nám umožňují odečítání času až v setinách sekundy. Na šestimístném displeji jsou vždy dvě místa pro minuty, sekundy a poslední místo je pro desítky milisekund. Krajní chyba daná konstrukcí těchto stopek je 0,01 s. Chybu měření času nejvíce ovlivňuje chyba pozorovatele, neboť každý pozorovatel stiskne stopky s určitým zpožděním (zvaným doba nervové reakce), jehož průměrná hodnota je asi 0,2 s. Při manuálním měření času musíme brát v úvahu obě tyto chyby. K měření času periodických dějů nejčastěji používáme *postupnou metodu* ([1] odstavec 3.1.4.) nebo *metodu opakovaných měření* ([1] odstavec 3.1.1.), popřípadě lze použít pro měření delších periodických dějů i *omezovací metodu* (viz [5]). Pro měření velmi krátkých časových intervalů a přesnější měření delších používáme elektronická zařízení.

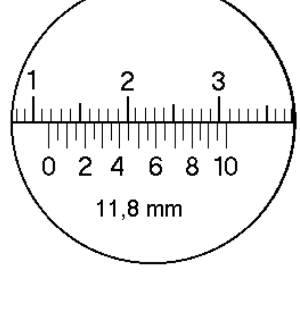
2.4.2. Délka

Pomocí délky vyjadřujeme rozmístění a rozměrnost objektů. Hlavní jednotkou délky (současně základní jednotkou SI) je 1 metr = 1 m. Dále je možné používat doporučené násobky a díly této jednotky:
1 kilometr = 1 km = 1000 m, 1 centimetr = 1 cm = 0,01 m, 1 milimetr = 1 mm = 0,001 m,
1 mikrometr = 1 μm = 10^{-6} m, 1 nanometr = 1 nm = 10^{-9} m.

Pro astronomická měření i pro měření v mikrosvětě se připouští některé speciální jednotky délky. Měření délek se provádí jednak kontaktním způsobem (různé typy měřítek), jednak způsobem bezkontaktním (interferometrická měření při použití nekoherentních i koherentních zdrojů záření). Metodami laserové interferometrie lze měřit délky až 30 metrů s přesností 0,1 μm a lepší, jakož i nepatrné relativní změny délek (vzájemný posun kontinentů, vzdalování Měsíce od Země, nepravidelnosti v pohybech satelitů, apod.).

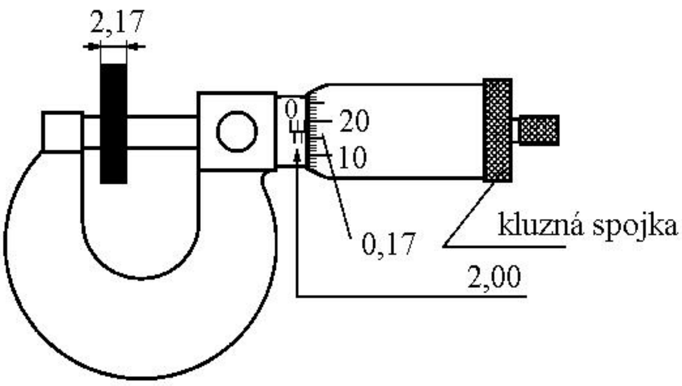


Obr. 1 - 2 : Posuvné měřítko

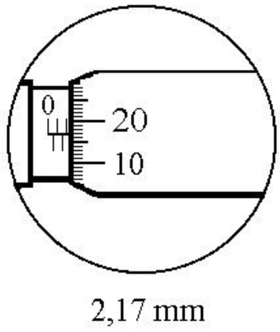


Obr. 1 - 3 : Stupnice s noniem

Nejjednodušším zařízením pro měření délek je **pásové měřítko**. Používáme je pro měření větších vzdáleností od 20 cm do 150 cm. Běžná pásová měřítka jsou vyrobena z oceli, takže nedochází k jejich trvalému napínání, jako u plátěných. Nevýhodou ocelových měřidel je, že podléhají snadno korozi a jejich stupnice nemusí být dobře čitelná, dále dochází k teplotní dilataci materiálu. Při měření se dopouštíme krajní chyby až 1 mm. Pro měření kratších délek do 17 cm až 25 cm se používá **posuvného měřítka** (viz *obr. I – 2*). Lze s nimi měřit s krajní chybou 0,1 mm až 0,05 mm. Pevná část je opatřena hlavní stupnicí a zakončena kolmým ramenem. Druhou (pohyblivou) část tvoří podobné rameno, které je po pevné části volně posunovatelné a je opatřené noniem. *Nonius* je sestrojen tak, že 19 dílkům hlavního měřítka odpovídá 20 dílků nonia. To umožňuje odečtení rozměru s přesností 0,05 mm. Pomocí hrotů lze měřit vnitřní rozměry dutých těles.



Obr. 1 – 4 : Mikrometr

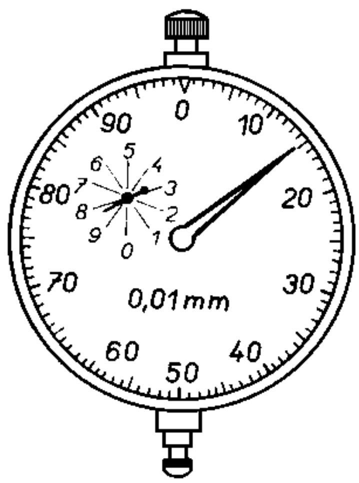


Obr. 1 – 5 : Stupnice mikrometru

Pro měření délek do 25 mm až 50 mm s přesností 0,01 mm se používá **mikrometru** (viz *obr. I – 4*) . Podstatnou částí mikrometru je přesný (mikrometrický) *šroub s malým stoupáním*.

Nejběžněji užívané mikrometry mají stoupání 0,5 mm. Bubínek pohyblivé části je dělen na 50 dílků. Pevná část je opatřena milimetrovým měřítkem. Bubínek je spojen *třecí spojkou*, která se po dosažení určitého přítlaku protočí. Tím se zamezí chybě, která by vznikla různým přitlačením čelisti na měřený předmět. Vzhledem k tomu, že 1 mm je rozdělen na bubínku na 100 dílků, tedy 1 dílek představuje 0,01 mm a bubínek má 50 dílků jsou na pevné části (dole) vyznačeny i dílky milimetrového měřítka od 0,5 mm.

Pro měření ještě menších vzdáleností, především při měření malých deformací namáhaných těles používáme **číselníkové úchylkoměry.**



Obr. 1 – 6 : Číselníkový úchylkoměr

Pohyb dotykového kolíčku je převody přenášen na ručičku indikátoru. Posun dotykového kolíčku o 1 mm odpovídá otočení ručky o 360°. Obvod stupnice je rozdělen na 100 dílků.

K zjišťování velmi malých rozměrů lze se používá **mikroskopu.** Používáme *objektivového mikrometru,* kdy mikroskopem opatřeným *nitkovým křížem* pozorujeme velmi jemnou stupnici umístěnou v předmětové rovině mikroskopu. Tímto způsobem lze zjišťovat například průměry vláken či rozměry částic brusiva.

2.4.3. Hmotnost

Hmotnost je základní vlastností materiálních objektů. Projevuje se jejich vzájemným přitahováním a setrvačností. Hlavní jednotkou hmotnosti (a současně základní jednotkou SI) je 1 kilogram = 1 kg, v laboratoři použijeme i doporučené díly hlavní jednotky:

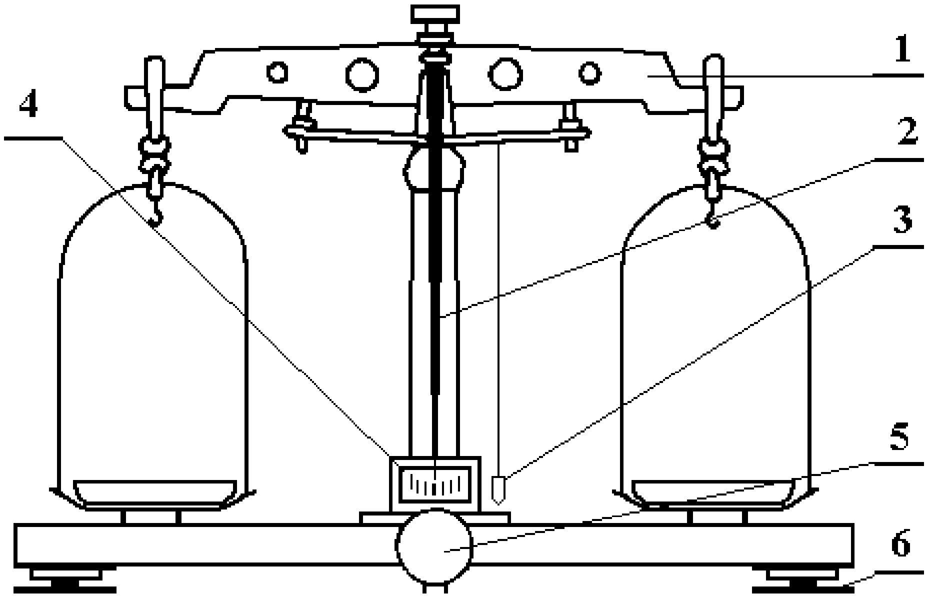
1 gram = 1 g = 10^{-3} kg a 1 miligram = 1 mg = 10^{-6} kg.

K určování hmotnosti využíváme úměrnosti mezi tíhou tělesa a jeho hmotností. Měření založené na tomto principu se nazývá **vážení**, používáme při něm kompenzační (nulovou) metodu.

Vážení patří mezi nejpřesnější fyzikální měření. Na laboratorních vahách dosáhneme při vážení na vzduchu a bez oprav největší přípustné relativní chyby v rozmezí hodnot 0,1% - 1%. Při vážení na brzděných analytických vahách lze ve vakuu provádět měření s relativní chybou 0,001% - 0,0001%.

Popis laboratorních vah :

Každé váhy jsou opatřeny *stavěcími šrouby* (6), pomocí nichž se ustavují do vodorovné polohy. Jako kontrolní zařízení slouží zpravidla *olovnice* (3) nebo libela. Proti nárazům, poškození a opotřebení jsou váhy chráněny zajišťovacím zařízením - *aretací* (5), které podchytí a nadzvedne *misky a vahadlo* (1) vah, aby se při transportu nebo při pokládání těles na misky neopotřebovaly břity. Na svislém nosném sloupku je upevněno ocelové lůžko, v němž je na ocelovém břitu usazeno *vahadlo.*



Obr. 1 – 7 : Laboratorní váhy

S vahadlem je spojen ukazatel (*jazýček vah*) (2), který udává výchylku vahadla vzhledem ke *stupnici* (4), která je upevněna v dolní části nosného sloupku. Na krajních břitech vahadla jsou usazena lůžka nesoucí závěsy misek.

K vážení budeme potřebovat odpovídající přesnou *sadu závaží.* Na vahách (zpravidla na stupnici) je uvedena *váživost*, což je rozsah vážení (uváděný v gramech). Některé váhy mají uvedenu *střední citlivost vah* na štítku, na kterém je uvedeno výrobní číslo vah.

Po odaretování bude vahadlo a tedy i jazýček na stupnici vykonávat tlumený harmonický pohyb. Ten se ustálí do klidové polohy až za delší dobu. Tuto polohu budeme nazývat ***nulovou polohou*** v případě nezatížených vah a ***rovnovážnou polohou*** budeme nazývat tuto klidovou polohu v případě zatížených vah (na miskách je těleso i závaží). Z bodů obratu tlumeného harmonického pohybu jazýčku po stupnici budeme odečítat hodnotu ***výchylky***. K hodnotě rovnovážné polohy musíme zaznamenat hodnotu **závaží** na misce.

Citlivost vah *c* (definovaná vztahem (1.3)) je změna rovnovážné polohy (v dílcích stupnice) způsobená jednotkovým přívažkem (v g). Citlivost vah není konstantní a klesá se zatížením vah. Váhy jsou tedy charakterizovány svou citlivostí: čím větší citlivost, tím menší přívažek vyvolá jednotkovou změnu polohy jazýčku na stupnici vah.

Metody užité k určování hmotnosti:

Metoda kyvů:

Hodnotu rovnovážné (nulové) polohy zpravidla určujeme <u>ze tří po sobě jdoucích výchylek</u> v_1, v_2, v_3 jazýčku odaretovaných vah, ze vztahu

$$n_0', n_0'', n_1, n_2 = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}(v_1 + v_3) + v_2\right] . \qquad (2.7)$$

Metoda interpolační:

Přesnou hodnotu hmotnosti určujeme metodou interpolační. Po určení *nulové* polohy změříme *rovnovážnou* polohu pro *menší* hodnotu závaží, než odpovídá váženému předmětu a potom *rovnovážnou* polohu odpovídající *větší* hodnotě závaží a přesnou hodnotu *M* určíme výpočtem

$$M = Z_1 + \frac{Z_2 - Z_1}{n_2 - n_1}\left(n_0 - n_1\right) \ , \qquad n_0 = (n_0' + n_0'')/2 \ . \tag{2.8}$$

Poznámka: Opravy (korekce), se kterými se musí počítat při přesném vážení:
Nepřesnost měření může i při správném postupu ovlivnit řada faktorů, jsou to především:

- přesnost při odečítání výchylky na stupnici
- správnost sady závaží
- při vážení na vzduchu budou podle Archimédova zákona nadlehčovány jak vážený předmět, tak i závaží. Budou-li objemy obou stejné (materiály o téže střední hustotě), budou se nadlehčující síly rušit. V opačném případě se uplatní tím více, čím bude rozdíl objemů (hustot) větší.

Určení chyby měření:

Chyba měření závisí na výše uvedených korekcích ale nejvíce je ovlivněna vlastními vahami, jejich citlivostí c

$$c = \left|\frac{n_2 - n_1}{Z_2 - Z_1}\right| \ \left[\text{d/g}\right] . \tag{2.9}$$

Při praktickém vážení se doporučuje počítat s krajní chybou $\bar{\kappa}$ vážení rovnou převrácené hodnotě citlivosti vah. Důležitým kritériem správnosti vážení je relativní krajní chyba κ_r vyjádřená v procentech

$$\bar{\kappa} = {}^{1}\!/_{c} \ , \qquad \kappa_\mathrm{r}(\%) = \frac{\bar{\kappa}}{M} \cdot 100 \, . \tag{2.10}$$

Praktické rady:

1. Závaží klademe na pravou (levou) misku vah. Platí zásada, že *sada* (*sádka*) *závaží je u té misky, na kterou klademe závaží.*
2. *Nulovou polohu určíme před vážením a po vážení*. Ve výpočtu správné hodnoty hmotnosti potom počítáme se střední hodnotou těchto měření.
3. *Relativní výsledná krajní chyba* by se měla pohybovat v intervalu *od* 1% *do* 0,1%. V případě, že vyjde nižší, je nutné především zhodnotit, zda hodnotu výsledné chyby neovlivňuje různost objemů (hustot) váženého předmětu a závaží.
4. Naměřené hodnoty zapisujeme do *připravené tabulky.*

Vážení	v_1	v_2	v_3	*výpočet*	
				n_0'	n_0
				n_0''	
Z_1				n_1	
Z_2				n_2	
***M* = (±) g**					

Tab. 1 – 3 : Tabulka pro zápis hodnot při vážení

Příklad:

Postupem uvedeným v tomto odstavci byl vážen skleněný předmět (hustota skla ρ_M = 2 500 kg·m^{-3}) s použitím sady ocelových závaží (hustota oceli ρ_Z = 7 800 kg·m^{-3}).

Naměřené hodnoty jsou uvedeny v následující tabulce:

Vážení	v_1	v_2	v_3	*výpočet*

Vzorek č. 1	11	19	10	$n_0' = 14{,}75$	$n_0 = 15{,}5$
SKLO	12	20	13	$n_0'' = 16{,}25$	
Z_1 32,2 g	15	3	14	$n_1 = 8{,}75$	
Z_2 32,6 g	15	23	16	$n_2 = 19{,}25$	
M = (32,46 ± 0,04) g					

$$M = 32{,}2 + \frac{(32{,}6 - 32{,}2)}{(19{,}25 - 8{,}75)}(15{,}5 - 8{,}75) = 32{,}457\,\mathrm{g}, \quad \bar{\kappa} = \frac{(32{,}6 - 32{,}2)}{(19{,}25 - 8{,}75)} = 0{,}038095\,\mathrm{g}.$$

Vypočtené hodnoty doplníme do posledního řádku tabulky.

Dále vypočteme relativní krajní chybu vážení: $\kappa_r = 0{,}12$ % .

Pro přesnější vážení je nutné, vzhledem k rozdílnosti hustot váženého předmětu a závaží, provést opravu určení hmotnosti M na vztlak (podle Archimédova zákona) podle vztahu

$$M^* = M + M\rho_{\mathrm{vz}}\left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{\rho_{\mathrm{Z}}}\right) = 32{,}468\ \mathrm{g}\,,$$

kde $\rho_{\mathrm{vz}} \approx 1{,}2\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota vzduchu za laboratorních podmínek. Přesný výsledek

$$M^* = (32{,}47 \pm 0{,}04)\ \mathrm{g}\ .$$

2.4.4. Elektrický proud

Elektrický proud je mírou pohybu nositelů elektrického náboje. Veličinu proud definujeme jako elektrický náboj ΔQ, který projde nějakým průřezem za dobu Δt, dělený tímto časovým intervalem. Hlavní jednotkou elektrického proudu je 1 ampér = 1 A, při laboratorních cvičeních použijeme rovněž doporučený díl hlavní jednotky 1 miliampér = 1 mA = 10^{-3} A. Přesná měření proudu se provádějí prostřednictvím etalonů, realizovaných na principu vzájemného magnetického silového působení cívek protékaných proudem. V laboratorních podmínkách se elektrický proud měří ampérmetry a to buď analogovými nebo digitálními, velmi malé proudy pak balistickým galvanoměrem.[14]

2.4.5. Termodynamická teplota

Termodynamickou teplotou rozumíme teplotu určovanou podle zákonů termodynamiky. Je to míra střední hodnoty kinetické energie neuspořádaně se pohybujících molekul. Jednotkou termodynamické teploty je 1 kelvin = 1 K. Kromě termodynamické teploty (označené T, případně θ) a vyjadřované v kelvinech, se používá také Celsiova teplota (značená t, nebo ϑ) a definovaná rovnicí $t = T - T_0$, kde je definitoricky $T_0 = 273{,}15$ K . Jednotka Celsiův stupeň se rovná jednotce kelvin a rozdíl Celsiovy teploty se vyjadřuje také v Celsiových stupních. Přitom platí, že $\Delta t = \Delta T$.

K měření teploty se využívá změn fyzikálních vlastností látek s měnící se teplotou. Základními přístroji, používanými pro měření teploty v mezinárodní stupnici, jsou: odporový platinový teploměr, termočlánek platina-rhodium (10% rhodia) – platina a monochromatický optický pyrometr. Tyto přístroje se ověřují v určitém počtu pevných definičních bodů, jejichž hodnota je přesně stanovena. K měření velmi nízkých teplot (blízkých absolutní nule) se využívá teplotních změn magnetických vlastností látek.

Pro běžnou potřebu (ale i v laboratoři) využíváme měřicí přístroje, založené na změně objemu kapalin s teplotou – **teploměry**. Nejpoužívanější z nich jsou skleněné teploměry plněné rtutí, které měří teploty přibližně v rozmezí od bodu tání do bodu varu rtuti (od -35 °C do +300 °C). Tyto teploměry se vyrábějí pro různé teplotní rozsahy a s různým dělením. Při měření dbáme na co nejpřesnější čtení teploty a použijeme teploměr s tak jemným dělením, aby výsledná chyba měření byla co nejmenší. Maximální přípustné chyby určujeme podle pravidel uvedených v [1] v odstavci 2.3.2..

2.4.6. Látkové množství a svítivost

Látkovým množstvím n rozumíme podíl počtu N molekul homogenní látky (obecně jedinců) a Avogadrovy konstanty N_{A}. Hlavní jednotkou v SI je 1 mol = 1 mol. Ke změření látkového množství se

[14] Viz Dodatek 2

používá relativní metoda, poměr látkových množství se určuje z poměru objemů, elektrických nábojů či hmotností (hmotovým spektrometrem).

Svítivost vyjadřuje schopnost (přibližně bodového) zdroje světla vyvolat zrakový vjem.
Hlavní jednotka: 1 kandela = 1 cd.
Měření svítivosti se provádí porovnáním se svítivostí ověřeného normálu.

3. ZPRACOVÁNÍ NAMĚŘENÝCH HODNOT

Matematik si může vykládat co ho napadne,
ale fyzik si musí zachovat alespoň špetku zdravého rozumu.

Josiah Willand Gibbs

Výsledky měření se zpracovávají numericky a graficky. Volba vhodné metody zpracování výsledků měření je důležitá pro přesné vyhodnocení, které je nedílnou součástí každého (nejen fyzikálního) měření. Závěrečnou fází měření je protokol o jeho provedení a dosažených výsledcích.

V této části jsou zpracovány postupy, jak uvedenou etapu měření úspěšně zvládnout.

3.1. Numerické metody

Pro zpracování naměřených hodnot je k dispozici široké spektrum metod, různě početně náročných. Nejpoužívanější metody jsou dále popsány obecně. V praxi využíváme dostupných technických prostředků - kalkulaček (v režimech statistických, regresních a pod.), či personálních počítačů, vybavených vhodným softwarem. Vzhledem k tomu, že není sjednoceno označení používaných veličin, je nutné se předem v příslušných manuálech podrobně seznámit s definičními vztahy.

3.1.1. Postup při zpracování opakovaných měření[15]

Postup při stanovení hodnoty a chyby přímo měřené veličiny:

1. Hodnoty $x_1, \ldots\ldots, x_n$, získané n-krát *opakovaným* měřením téže fyzikální veličiny za stejných podmínek máme zapsány do tabulky. V tabulce je uvedeno označení fyzikální veličiny a její jednotky.
2. Vypočteme *aritmetický průměr* $\bar{x}$ všech naměřených hodnot x_i (i = 1, 2, ……, n)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} .$$

3. Vypočteme *výběrovou směrodatnou odchylku (jednoho měření)* označenou[16] σ_{n-1} nebo s

$$\sigma_{n-1} = s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} .$$

4. Vypočteme *výběrovou směrodatnou odchylku* $\bar{s}$ *střední hodnoty* (aritmetického průměru).

$$\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} .$$

5. Výslednou *krajní chybu aritmetického průměru* $\kappa(x)$ vypočteme ze vztahu $\kappa(x) = t_{P,n}\bar{s}(x)$, $t_{P,n}$ nalezneme v Dodatku 3 (Hodnoty Studentova součinitele) pro pravděpodobnost 95% , riziko α = 5%.
6. Výslednou chybu měření *zaokrouhlíme*[17] na jednu platnou cifru, přičemž nepočítáme nuly před prvním ciferným místem (pro případ $t_{P,n}\bar{s}(x)$ < 1), ani nuly za prvním ciferným místem (pro případ $t_{P,n}\bar{s}(x)$ > 10). Aritmetický průměr zaokrouhlíme na číslici téhož řádu, jako je řád uváděné chyby měření.

---

[15] Viz odstavec 2.3.1.

[16] Označení $x\sigma_{n-1}$ (σ_{n-1}) a $x\sigma_n$ (σ_n) se používá na některých kalkulačkách.

[17] Chybu měření zaokrouhlujeme vždy nahoru

7. Výsledek[18] zapíšeme ve tvaru $x = \left(\bar{x} \pm t_{\mathrm{P,n}}\bar{s}\right)$ × fyzikální jednotka, s udáním pravděpodobnosti P ; v případě, že ji budeme v dalším zpracování potřebovat, vypočítáme i krajní relativní chybu $\bar{\kappa}_{\mathrm{r}} = t_{\mathrm{P,n}}\bar{s}/\bar{x}$.

Poznámka: hodnota parametru $t_{\mathrm{P,n}}$ (Studentův součinitel) závisí

- na počtu *n* provedených měření
- na pravděpodobnosti P, s jakou chceme znát skutečný výsledek.

Příklad: Provedli jsme n = 15 měření výšky v válečku mikrometrem (s největší přípustnou chybou 0,01 mm), naměřené hodnoty jsme zaznamenali do tabulky:

č. měření	1	2	3	4	5	6	7
v [mm]	12,10	12,08	12,07	12,12	12,03	12,11	12,06

pokračování tabulky:

č. m.	8	9	10	11	12	13	14	15
v [mm]	12,10	12,07	12,07	12,07	12,05	12,06	12,08	12,07

Vypočteme:

- aritmetický průměr $\bar{v}$ všech naměřených hodnot: $\bar{v}$ = 12,076 mm,
- výběrovou směrodatnou odchylku s (jednoho měření)
  s = 0,0235432732 mm,
- výběrovou směrodatnou odchylku $\bar{s}$ střední hodnoty
  $\bar{s}$ = 0,0235432732/√15 = 0,006078847 mm,
- výslednou krajní chybu $\bar{\kappa}(v)$
  $\bar{\kappa}(v)$ = 2,15 × 0,006078847 = 0,013069521 ($\bar{\kappa}_{\mathrm{r}}$ =0,11%) ,

když jsme hodnotu $t_{0.95,\,15}$ = 2,15 nalezli v Dodatku 1. Výsledek[19] po zaokrouhlení zapíšeme ve tvaru

v = (12,08 ± 0,02) mm , při pravděpodobnosti P = 95 %.

3.1.2. Zpracování nepřímých měření[20]

Máme-li hodnotu fyzikální veličiny Y určit z funkční závislosti na jiných přímo měřených veličinách x_i, použijeme postupů uvedených v odstavci 2.3.3. Pro použití vztahu (2.5) si označme (v souladu se označením uvedeným v citovaném odstavci) chybu měření $\bar{\delta} = \bar{s}$,[21] v případě výpočtu výsledné chyby dle vztahu (2.6) si zaveďme označení $\bar{\delta} = \bar{\kappa}$.[22] Příklady výpočtů chyb pro základní funkční závislosti s proměnnými $x = (\bar{x} \pm \bar{s}(x))$ nebo $x = (\bar{x} \pm \bar{\kappa}(x))$ a $y = (\bar{y} \pm \bar{s}(y))$ nebo $y = (\bar{y} \pm \bar{\kappa}(y))$ a konstantou a uvádíme dále bez odvození.

Je-li $Y = ax$ potom $\bar{Y} = a\bar{x}$ a dle (2.5) je $\bar{s}(Y) = a \cdot \bar{s}(x)$ (3.1a)

$Y = \ln x$ $\qquad \bar{Y} = \ln \bar{x}$ $\qquad \bar{s}(Y) = \frac{1}{\bar{x}}\bar{s}(x)$ (3.1b)

$Y = x \pm y$ $\qquad \bar{Y} = \bar{x} \pm \bar{y}$ $\qquad \bar{s}(Y) = \sqrt{\bar{s}^2(x) + \bar{s}^2(y)}$ (3.1c)

$Y = x \cdot y$ $\qquad \bar{Y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ $\qquad \bar{s}(Y) = \sqrt{\bar{y}^2\bar{s}^2(x) + \bar{x}^2\bar{s}^2(y)}$ (3.1d)

$Y = x^n$ $\qquad \bar{Y} = \bar{x}^n$ $\qquad \bar{s}(Y) = n \cdot x^{n-1}\bar{s}(x)$. (3.1e)

Výsledek zapíšeme ve tvaru: $Y = (\bar{Y} \pm \bar{s}(Y))$, P = 68,3 % .

[18] Viz Dodatek 1 - Příklady zápisů konečných výsledků

[19] Měření bylo prováděno mikrometrem s největší přípustnou chybou 0,01mm, a výsledná přesnost závisí i na použitém měřidle. Proto bychom ve výsledku měli zahrnout i tuto skutečnost. V tom případě použijeme lineárního zákona hromadění chyb (součet chyb v absolutní hodnotě) a úplný zápis výsledku bude mít potom tvar: v = (12,08 ± 0,03) mm.

[20] Nezaměňovat s nepřímou metodou, viz odstavec 2.2.

[21] $\bar{s}$ značí výběrovou směrodatnou odchylku, interval spolehlivosti je vyjádřen s pravděpodobností 68,3%.

[22] $\bar{\kappa}$ značí krajní chybu měření, interval spolehlivosti měření je vyjádřen s pravděpodobností 95% a vyšší.

Je-li $Y = ax$ potom $\overline{Y} = a\overline{x}$ a dle (2.6) je $\overline{\kappa}(Y) = a \cdot |\overline{\kappa}(x)|$ (3.2a)

$Y = \ln x$ $\overline{Y} = \ln \overline{x}$ $\overline{\kappa}(Y) = \frac{1}{\overline{x}} |\overline{\kappa}(x)|$ (3.2b)

$Y = x \pm y$ $\overline{Y} = \overline{x} \pm \overline{y}$ $\overline{\kappa}(Y) = |\overline{\kappa}(x)| + |\overline{\kappa}(y)|$ (3.2c)

$Y = x \cdot y$ $\overline{Y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ $\overline{\kappa}(Y) = \overline{y}|\overline{\kappa}(x)| + \overline{x}|\overline{\kappa}(y)|$ (3.2d)

$Y = x^n$ $\overline{Y} = \overline{x}^n$ $\overline{\kappa}(Y) = n \cdot x^{n-1}|\overline{\kappa}(x)|$ (3.2e)

Výslednou hodnotu zapíšeme ve tvaru: $Y = (\overline{Y} \pm \overline{\kappa}(Y))$, P = 95 % .

<u>Příklad:</u> Máme vypočítat moment setrvačnosti J_T homogenní desky (pravoúhlého hranolu s hranami *a*, *b*, *c*) vzhledem k ose rovnoběžné s hranou *a* a procházející jejím těžištěm podle vztahu

$$J_{\mathrm{T}} = \frac{1}{12} m\left(b^2 + c^2\right) = f(m,b,c). \tag{3.3}$$

Nejprve musíme změřit rozměry desky *b* , *c* a hmotnost desky *m*. K určení rozměrů desky použijeme postupu uvedeného v odstavci 3.1.1. a hmotnost desky stanovíme vážením (odstavec 2.4.2.). Pro tyto veličiny získáme následující hodnoty[23]

$$b = (201{,}3 \pm 0{,}5)\ \mathrm{mm}, \quad c = (299{,}2 \pm 0{,}5)\ \mathrm{mm}, \quad m = (1005{,}3 \pm 0{,}5)\ \mathrm{g} \ .$$

Dosazením do vztahu (3.3) vypočteme

$$\overline{J}_{\mathrm{T}} = \frac{1}{12} 1{,}0053\left[(0{,}2013)^2 + (0{,}2992)^2\right] = 0{,}01089429619575\ \ \mathrm{kg \cdot m^2}.$$

Aplikací vztahu (2.6) (lineární zákon hromadění chyb) postupně najdeme pro krajní chybu vzorec

$$\overline{\kappa}(\overline{J}_{\mathrm{T}}) = \left|\left(\frac{\partial f}{\partial m}\right)\overline{\kappa}(m)\right| + \left|\left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)\overline{\kappa}(b)\right| + \left|\left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)\overline{\kappa}(c)\right| = \frac{1}{12}\left[\left(b^2 + c^2\right)\overline{\kappa}(m) + 2\overline{m}\overline{b}\overline{\kappa}(b) + 2\overline{m}\overline{c}\overline{\kappa}(c)\right].$$

Číselně:

$$\overline{\kappa}(J_{\mathrm{T}}) = \frac{1}{12}\left[\left(0{,}2013^2 + 0{,}2992^2\right) \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 1{,}0053 \cdot 0{,}2013 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 1{,}0053 \cdot 0{,}2992 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}\right] =$$

$$= 0{,}000508571\ \mathrm{kg \cdot m^2}\ .$$

Výslednou hodnotu zapíšeme po zaokrouhlení (dle pravidel uvedených v odstavci 3.1.1.) ve tvaru

$$J_{\mathrm{T}} = (0{,}0109 \pm 0{,}0006)\ \mathrm{kg \cdot m^2} = (10{,}9 \pm 0{,}6) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot m^2}, \text{ pravděpodobnost } P = 95\%.$$

3.1.3. Interpolační metoda

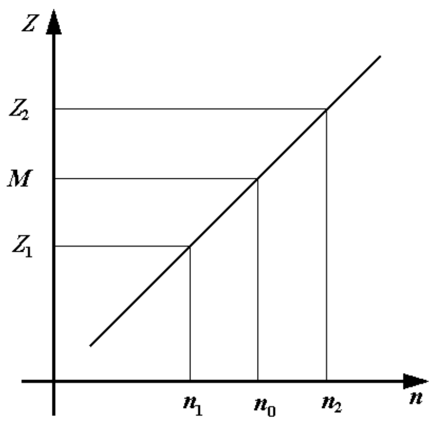
Interpolační metoda je taková metoda, při níž určujeme neznámou veličinu ze dvou (či více) zná-mých hodnot téhož druhu. Předpokládáme, že neznámá hodnota veličiny leží mezi známými hodnotami a že existuje určitá funkční závislost mezi těmito zná-mými veličinami. V případě, že použitá závislost mezi veličinami je lineární, nazýváme tuto metodu <u>lineární interpolací</u>.

Metodu použijeme při grafickém vyrovnání závislostí (odstavec 3.2.1.) a též při numerickém zpracování výsledků měření. Postup při její aplikaci si vysvětlíme na příkladu vážení (odstavec 2.4.3.) Po určení *nulové* polohy n_0 jsme stanovili *rovnovážnou* polohu n_1 pro *menší* hmotnost závaží Z_1, než odpovídá hmotnosti *M* váženého předmětu a potom *rovnovážnou* polohu n_2 odpovídající *větší* hodnotě závaží Z_2.

[23] Intervaly spolehlivosti jsou uváděny s pravděpodobností 95%, tzn. jedná se o krajní chyby měření.

Za předpokladu lineární závislosti $Z = f(n)$ mezi hmotností závaží a rovnovážnou polohou proložíme body $(n_1; Z_1)$, $(n_2; Z_2)$ přímku. Potom bodu n_0 [24] odpovídá na ose Z hodnota M. Jestliže body $(n_1; Z_1)$, $(n_0; M)$, $(n_2; Z_2)$ leží na jedné přímce (viz *obr. I – 8*), plyne (z podobnosti trojúhelníků) pro hledanou hmotnost M vztah

$$M = Z_1 + \frac{Z_2 - Z_1}{n_2 - n_1}\left(n_0 - n_1\right) .$$



Obr. I – 8 : Interpolační metoda

3.1.4. Postupná metoda

Metodu vysvětlíme na příkladu měření doby kmitu kyvadla. Jak již bylo řečeno v odstavci 2.2., uspořádáme měření tak, že budeme odečítat časy vždy po proběhlých deseti kmitech a tím získáme posloupnost $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Rozdíly $T_i - T_{i-1}$ nejsou shodné, protože každá z naměřených hodnot je zatížena různými chybami. Kdybychom spočítali dobu jednoho kmitu jako aritmetický průměr všech rozdílů $T_i - T_{i-1}$, bude výsledek záviset pouze na prvním a posledním odečtu. Přicházíme tak o informace obsažené v ostatních odečtech a o možnost určit nepřesnost měření. Proto zvolíme postup, který využívá všech naměřených hodnot. Rozdělíme hodnoty do dvou stejných skupin po k členech, počet hodnot n musí být sudý. První skupina obsahuje odečty 1., 2., 3., .., k-tý a druhá skupina $(k + 1)$., $(k + 2)$., $(k + 3)$., ..., n-tý. Tyto dvě skupiny zapíšeme do dvou sloupců vedle sebe a spočítáme rozdíly jednotlivých řádků: získáme k rozdílů $T_{k+1} - T_1$, $T_{k+2} - T_2$, $T_{k+3} - T_3$, ..., $T_n - T_k$, z nichž každý představuje k-násobek rozdílu dvou po sobě jdoucích odečtů, nebo-li v našem případě <u>dobu k-násobku deseti kmitů.</u> Hodnota výsledku měření doby kmitu $\overline{T}$ je potom dána vztahem

$$\overline{T} = \frac{1}{10}\frac{1}{k}\left(\frac{T_{k+1} - T_1}{k} + \frac{T_{k+2} - T_2}{k} + \frac{T_{k+3} - T_3}{k} + \ldots + \frac{T_n - T_k}{k}\right) = \frac{1}{10}\frac{1}{k^2}\left(\sum_{i=k+1}^{n} T_i - \sum_{i=1}^{k} T_i\right) \quad (3.4)$$

a výběrovou směrodatnou odchylku tohoto souboru vypočteme (podle odstavce 2.3.1.) ze vztahu

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}\delta_i^2}{k(k-1)}}, \qquad \text{kde} \qquad \delta_i = \overline{T} - \frac{1}{10}\frac{T_{k+i} - T_i}{k} .$$

Výhodou uvedené metody je, že přesnost, kterou získáme z n odečtů časů deseti po sobě jdoucích kmitů je stejná, jako přesnost, kterou bychom získali, kdybychom k-krát opakovali měření $10k$ kmitů.

<u>Příklad:</u> Provedli jsme měření doby kmitu kyvadla pro celkem 100 kmitů a odečítali jsme okamžiky, kdy kyvadlo právě uskutečnilo 10., 20., ..., 100. kmit, aniž bychom zastavovali stopky. Naměřené hodnoty máme poznamenány v tabulce. V posledním sloupci zapíšeme rozdíly jednotlivých řádků a jejich aritmetický průměr. Postupem užívaným při opakovaných měřeních (odstavec 3.1.1.) vypočítáme výběrovou směrodatnou odchylku $\bar{s}_{50}$ střední hodnoty ($\bar{s}_{50}$ = 0,1414213562 s) pro 50 kmitů. Krajní chybu určíme s použitím parametrů z Dodatku 3 pro pravděpodobnost 95% (riziko α = 5 %). Při počtu měření n = 5: $t_{0.95,\,5}$ = 2,78. Krajní chyba získaná z měření pro 50 kmitů je $\bar{\kappa}_{\mathrm{M}}$ = 0,393151353 s. Měření jsme prováděli pomocí stopek, kde každé měření ovlivní chyba stopek i doba nervové reakce (odstavec 2.4.3.), tedy celková krajní chyba je rovna 0,3 s, pro jednotlivá měření po deseti kmitech. Pro 50 kmitů bude krajní systematická chyba $\bar{\kappa}_{\mathrm{S}} \approx$ 1,5 s a celkovou krajní chybu získáme prostým součtem (lineární zákon hromadění chyb - odstavec 2.3.3.) : $\bar{\kappa}$ = 1,893151 s. Potom T_{50} = (53 ± 2) s a <u>pro dobu jednoho kmitu</u> vychází

$T_{10\text{-}50}$ / s	$T_{60\text{-}100}$ / s	rozdíl = $5{\cdot}T_{10}$/ s
10,3	63,1	52,8
20,5	73,1	52,6
31,1	83,5	52,4
42,0	94,7	52,7
52, 8	104,8	52,0
Aritmetický průměr $5{\cdot}T_{10}$/ s		52,5

[24] Hodnota n_0 leží **mezi** hodnotami n_1 a n_2.

T = (1,06 ± 0,04) s.

3.1.5. Metoda regresní

Častým cílem empirických výzkumů (nejen fyzikálních měření) je stanovení vzájemné závislosti dvou či více veličin a její matematické („vyhlazené“) vyjádření. Hledané závislosti můžeme získat užitím regresních metod. Úkolem je nalézt (v případě, že jsou veličiny závislé) vhodnou funkci, aproximující závislosti mezi naměřenými veličinami.

Omezíme se na základní případ *dvou* navzájem závislých proměnných veličin x a y: naměřené hodnoty jsou $[x_i, y_i]$, kde i = 1, 2, ..., n (n je počet dvojic hodnot), měření, které odpovídá hodnotě x_i je označeno y_i . Předpokládáme, že mezi proměnnými x a y platí funkční vztah $y = f(x)$ známého tvaru (velmi často se setkáme s přímou úměrností veličin, tedy jejich lineární závislostí). Kdyby nevznikaly při měření chyby, kterými jsou zatíženy hodnoty y_i, platilo by přesně $y_i = f(x_i)$ pro i = 1, 2, ..., n, takže by všechny body ležely na křivce určené rovnicí $y = f(x)$. Ve skutečnosti však platí, že $y_i = f(x_i) + \delta_i$ (kde δ_i jsou chyby měření) a body $[x_i, y_i]$ jsou rozptýleny kolem matematické křivky vlivem chyb.

Nejpoužívanější regresní metodou je metoda nejmenších čtverců, jejíž princip spočívá v tom, že hledáme takovou funkci $f(x)$, pro kterou nabývá minimální hodnoty výraz

$$\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - f(x_i)\right]^2 \quad . \tag{3.5}$$

Příklad: Zvolme nejjednodušší typ závislosti - lineární závislost[25], kterou můžeme obecně vyjádřit rovnicí $y = f(x) = kx + q$. Po matematických úpravách získáme z naměřené množiny $[x_i, y_i]$ ($i \geq 2$) pro směrnici k a úsek q, které nazýváme *regresními koeficienty* regresní přímky, výsledné vztahy

$$k = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \quad q = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - k\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} . \tag{3.6 a,b}$$

Kritériem správnosti zvolené funkce (v našem případě funkce lineární) je tak zvaný *výběrový korelační koeficient*[26] r_{xy}, který vypočítáme ze vztahu

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} , \tag{3.7}$$

kde $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ a $\bar{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$.

Hodnota výběrového korelačního koeficientu r_{xy} leží vždy v intervalu $\langle -1, +1\rangle$. Rovná-li se výběrový korelační koeficient některé z mezí, znamená to, že mezi body $[x_i, y_i]$ je přesná lineární závislost a všechny body leží na přímce. V praxi však takový výsledek dostaneme zcela vyjímečně, v laboratořích požadujeme, aby pro hodnotu koeficientu platilo $|r_{xy}| > 0{,}99$ (*kritérium dvou devítek*).

Můžeme stanovit i přesnost nalezených regresních koeficientů. Přesnosti určení regresních koeficientů k, q kvantifikují jejich výběrové směrodatné odchylky, které vypočítáme ze vztahů

$$\bar{s}_k = \frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}} , \qquad \bar{s}_q = s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}} , \tag{3.8a,b}$$

kde

[25] V tomto případě metodu nazýváme *lineární regrese.*

[26] V EXCELu je tento parametr označen jako hodnota spolehlivosti R^2.

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\bar{y}-k(x_i-\bar{x})\right]^2}=\sqrt{\frac{1}{n-2}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-q\sum_{i=1}^{n}y_i-k\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)}. \qquad (3.9)$$

Intervaly spolehlivosti vypočítaných regresních koeficientů potom můžeme napsat ve tvaru ($k \pm t_{P,n-1}\,\bar{s}_k$) a ($q \pm t_{P,n-1}\,\bar{s}_q$). Pravidla zápisu výsledku jsou uvedena v odstavci 3.1.1.

Příklad 1: Bylo provedeno měření závislosti rezistance kovového vodiče na teplotě. Rezistance byla měřena digitálním multimetrem (rozsah 2 kΩ, chyba měření ±1 Ω), teplota odečítána na teploměru (s rozsahem do 100 °C a dělením po 0,2 °C). Naměřené hodnoty jsou uvedeny v následující tabulce :

t / °C	19,2	25,4	30,8	38,2	43,6	48,6	52,0	59,6	63,6	67,0
R / Ω	1 078	1 092	1 111	1 142	1 169	1 192	1 201	1 234	1 241	1 261

Označíme naměřené hodnoty nezávisle proměnné t a závisle proměnné R a nalezneme:

$$\sum t_i = 448\,\mathrm{K},\quad \sum R_i = 11721\,\Omega,\quad \sum t_i^2 = 22474{,}72\,(\mathrm{K})^2,\quad \left[\sum t_i\right]^2 = 200704\,(\mathrm{K})^2,$$

$$\sum R_i^2 = 13775817\,\Omega^2,\quad \sum t_i\,R_i = 534590{,}2\,\mathrm{K}\cdot\Omega;\quad \bar{t} = 44{,}8\,\mathrm{K},\quad \bar{R} = 1172{,}1\,\Omega.$$

Dosazením do výše uvedených obecných vztahů ($x \equiv t,\ y \equiv R$) dostaneme

$$k = 3{,}94681\ \Omega\cdot\mathrm{K}^{-1},\quad q = 995{,}2828\ \Omega,\quad r_{xy} = 0{,}99761,\quad \bar{s}_k = 0{,}09674\ \Omega\cdot\mathrm{K}^{-1},\quad \bar{s}_q = 4{,}58632\ \Omega.$$

V našem případě je $n-1 = 9$ a pro $P = 95\%$ odečteme v Dodatku 3 hodnotu $t_{0.95,9} = 2{,}31$; po zaokrouhlení pak dostaneme

$$k = (3{,}9 \pm 0{,}3)\ \Omega\cdot\mathrm{K}^{-1},\quad q = (1000 \pm 10)\ \Omega .$$

Metodu lineární regrese lze použít i na zpracování měření provedených postupnou metodou:

Příklad 2: Použijeme hodnot uvedených v příkladu v odstavci 3.1.4. - postupná metoda. Za nezávisle proměnnou x vezmeme počet kmitů a za y příslušné časy. V tom případě vychází $T = k = 1{,}05182$ s, výběrová směrodatná odchylka $\bar{s}_k = 0{,}00339$ s a krajní chyba $\bar{\kappa}_M = 2{,}31\cdot 0{,}00339 = 0{,}0078309$ s.

Z odhadu systematické krajní chyby pro jeden kmit ($\bar{\kappa}_S = 0{,}03$ s) dostaneme (po zaokrouhlení) výslednou krajní chybu $\bar{\kappa} = 0{,}04$ s.

Výsledek : $T = (1{,}05 \pm 0{,}04)$ s .

3.1.6. Skupinová metoda

Skupinová metoda patří k dosud užívaným metodám, i když se dnes nahrazuje regresními metodami. Výhodou metody je její nenáročnost na numerické výpočty. Předpokládejme, že jsme prováděli měření závislosti veličiny y na veličině x, a jako výsledek měření jsme získali dvojice hodnot $[x_i, y_i]$, kde $i = 1, 2, ..., n$ (n je počet dvojic hodnot). Skupinovou metodou lze vyjádřit závislost $y = f(x)$ analytickým vyjádřením, které se nejčastěji předpokládá v polynomickém tvaru

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_kx^k ,$$

kde a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_k jsou konstanty, které budeme určovat výpočtem. K určení těchto konstant potřebujeme však dostatečný počet měření, v obecném případě je to $k+1$ dvojic hodnot $[x_i, y_i]$. Nejdříve stanovíme stupeň polynomu a to na základě postupných diferencí a jejich mocnin (viz [5]). Po určení stupně polynomu se postupuje analogicky jako v případě polynomu 1. stupně (**lineární funkce**). Nechť lineární závislost má tvar

$$y = kx + q .$$

K určení dvou neznámých, k a q, potřebujeme dvě rovnice. Naměřené hodnoty $[x_i, y_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ dosadíme do lineární rovnice a vzniklých n rovnic rozdělíme na dvě skupiny o přibližně stejném počtu

$$y_1 = kx_1 + q \qquad\qquad y_{m+1} = kx_{m+1} + q$$

$$y_2 = kx_2 + q \qquad\qquad y_{m+2} = kx_{m+2} + q$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$y_m = kx_m + q \qquad\qquad y_n = kx_n + q\,.$$

Rovnice v obou skupinách sečteme. Označíme-li $\bar{x}_{\mathrm{I}}$ a $\bar{y}_{\mathrm{I}}$ aritmetické průměry hodnot $x_1, x_2, ..., x_m$ a $y_1, y_2, ..., y_m$ a dále $\bar{x}_{\mathrm{II}}$ a $\bar{y}_{\mathrm{II}}$ aritmetické průměry hodnot $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ a $y_{m+1}, y_{m+2}, ..., y_n$ dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\bar{y}_{\mathrm{I}} = k\bar{x}_{\mathrm{I}} + q \qquad \text{a} \qquad \bar{y}_{\mathrm{II}} = k\bar{x}_{\mathrm{II}} + q\,.$$

Řešením této soustavy dostaneme pro neznámé k a q po úpravách

$$k = \frac{\bar{y}_{\mathrm{II}} - \bar{y}_{\mathrm{I}}}{\bar{x}_{\mathrm{II}} - \bar{x}_{\mathrm{I}}} \quad , \qquad q = \bar{y}_{\mathrm{I}} + \frac{\bar{y}_{\mathrm{II}} - \bar{y}_{\mathrm{I}}}{\bar{x}_{\mathrm{II}} - \bar{x}_{\mathrm{I}}}\bar{x}_{\mathrm{I}}\ . \tag{3.10 a,b}$$

Podobným způsobem se řeší obecné případy polynomu n-tého stupně.

Pro případ $\boldsymbol{y = kx}$ (tedy $q = 0$) můžeme výpočet ještě zjednodušit. Protože počítáme pouze směrnici k, stačí nám jedna skupina rovnic a potom tedy

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}\ , \text{ dále pro krajní chybu } \kappa(k) = t_{\mathrm{p,n}}\frac{\sqrt{n}}{\sum_{i=1}^{n} x_i}\sqrt{\frac{\sum (y_i - kx_i)^2}{n-1}}\ . \tag{3.11 a,b}$$

<u>Příklad:</u> Byla měřena závislost průhybu u tyče na velikosti zatěžující síly F. Máme určit směrnici v závislosti (viz Hookeův zákon), tj. k v závislosti $u = k{\cdot}F$, ze které potom můžeme určit modul pružnosti E tyče.

Naměřené hodnoty :

Číslo měření	F [N]	u [mm]	$(u - kF)^2$ [mm^2]
1	0	-0,0025	$6{,}25\cdot10^{-6}$
2	0,981	0,0725	$1{,}2481\cdot10^{-6}$
3	2,354	0,1725	$1{,}7233\cdot10^{-5}$
4	3,236	0,2475	$2{,}1723\cdot10^{-5}$
5	4,315	0,3225	$1{,}7177\cdot10^{-6}$
6	5,296	0,400	$6{,}6161\cdot10^{-6}$
7	6,276	0,475	$1{,}6241\cdot10^{-5}$
8	7,355	0,550	$3{,}7690\cdot10^{-6}$
9	8,238	0,620	$3{,}2242\cdot10^{-6}$
10	9,022	0,675	$4{,}1539\cdot10^{-6}$
Σ	47,073	3,5325	$8{,}2176\cdot10^{-5}$

Potom $k = 7{,}5043018\cdot10^{-5}$ m·N^{-1} a $\kappa(k) = 4{,}586924\cdot10^{-7}$ m·N^{-1} a výsledek zapíšeme ve tvaru

$k = (7{,}50 \pm 0{,}05)\cdot10^{-5}$ m·N^{-1} , P = 95%.

Poznámka: Tento příklad lze též zpracovat metodou lineární regrese.[27]

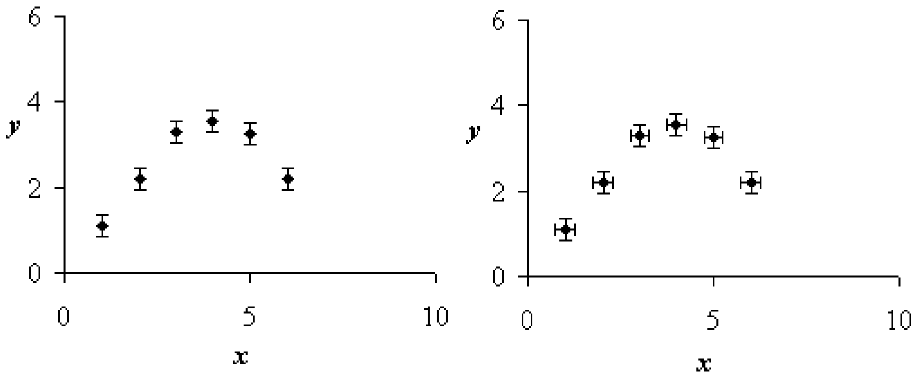
[27] Užijeme-li vztahů z odstavce 3.1.5., vychází $k = (7{,}53 \pm 0{,}08)\cdot10^{-5}$ m·N^{-1} .

3.2. Grafické metody

3.2.1. Vyhodnocení naměřených funkčních závislostí

Ve fyzikální praxi má velký význam grafické zpracování a vyhodnocení naměřených hodnot a to především pro svoji názornost. Proto i v odborných publikacích je téměř každá naměřená závislost doplněna grafem.

Kdyby bylo naše měření absolutně přesné, procházel by graf zjišťované fyzikální závislosti všemi body [x_i, y_i] , kde i = 1, 2, ..., n (n je počet dvojic hodnot získaných měřením). Měřením však získáváme hodnoty, které jsou zatíženy chybami. Je nesprávné spojovat naměřené hodnoty, neboť tím nezískáme obrázek o vzájemném vztahu těchto veličin. Chyby měření vyznačíme do grafu následujícím způsobem. Nechť jsme měřili určitou veličinu y, která závisí pouze na veličině x. Pro každou hodnotu x_i jsme provedli řadu měření y_{ij} veličiny y a získali odpovídající střední hodnotu $\bar{y}_i$ a její interval spolehlivosti $\langle \bar{y}_i - t_{\mathrm{P,n}} \bar{s}(y_i), \ \ \bar{y}_i + t_{\mathrm{P,n}} \bar{s}(y_i) \rangle$. Velikost tohoto intervalu vyznačíme spolu s naměřenou hodnotou do grafu ve formě tak zvané **chybové úsečky** (viz *obr. I – 9*). V případě, že ani hodnota x_i není zadána přesně, ale je známa střední hodnota $\bar{x}_i$ a odpovídající interval spolehlivosti $\langle \bar{x}_i - t_{\mathrm{P,n}} \bar{s}(x_i), \ \ \bar{x}_i + t_{\mathrm{P,n}} \bar{s}(x_i) \rangle$, vyznačíme do grafu chybovou úsečku i pro veličinu x. Velikost intervalu spolehlivosti obvykle odpovídá pravděpodobnosti 0,683 nebo 0,95.



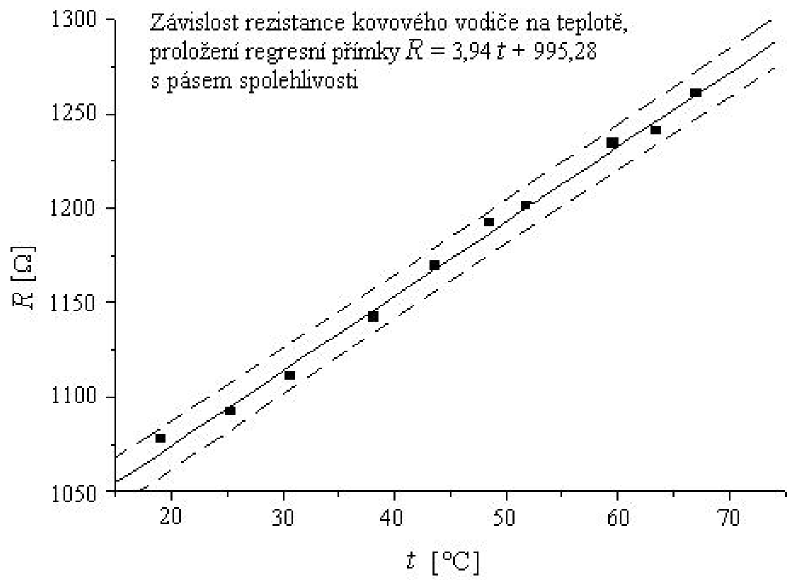
Obr. I – 9 : Chybové úsečky

Nejvhodnější metody užívané k proložení křivky naměřenými body jsou popsány v předchozích odstavcích: 3.1.3. Interpolační metoda, 3.1.5. Metoda regresní, 3.1.6. Skupinová metoda. Na základě matematického výpočtu zobrazíme analytické vyjádření graficky. Nejvhodnějším a nejjednodušším typem funkce je funkce lineární, jejímž zobrazením je přímka. Je vhodné převádět závislosti pomocí měřítek na tento typ funkce. Například závislost rezistance R polovodičů na termodynamické teplotě T se předpokládá ve tvaru rovnice

$$R(T) = A \cdot e^{B/T} ,$$

kde A a B jsou konstanty. Logaritmováním rovnice dostaneme vztah ln R = ln A + (B/T). Při substituci ln R = y , (1/T) = x získáme v lineární funkci $y = kx + q$ vyjádření pro k: $k = B$ a pro q: q = ln A. Nejvhodnějším metodou k prokládání křivky naměřenými body je metoda lineární regrese. Příklad zpracování grafu je uveden na *obr. I – 10.* V tomto grafu je též zobrazen i tzv. pás spolehlivosti, který se konstruuje na základě směrodatných odchylek parametrů k a q.

Z grafů odečítáme též hodnoty, které odpovídají některým významným bodům měřené závislosti. K odečítání hodnot používáme metody interpolační, popř. metody extrapolační (v případě, že hledaný bod leží mimo interval měřených hodnot). Například určení hodnoty rezistance R_0 (při teplotě 0 °C) v závislosti $R(t) = R_0 (1 + \alpha t)$ u kovů, by vyžadovalo technicky náročnější aparaturu.



Obr. I – 10 : Proložení křivky metodou lineární regrese (k Příkladu 1 v odstavci 3.1.5.)

3.2.2. Zásady pro zpracování grafů

Při zpracovávání grafů existují v různých oborech odlišné zvyklosti. V naší laboratoři se budeme řídit těmito zásadami:

1. Grafickou závislost zpracováváme podle *příslušné tabulky* naměřených či vypočítaných hodnot.
2. Grafy kreslíme na *milimetrovém* či jiném speciálním papíře[28] formátu A4 *pravítkem a křivítkem, tužkou nebo perem s tenkým hrotem.*
3. Osy grafů musí být popsány *symbolem* fyzikální veličiny, v hranaté závorce je uvedena její *jednotka.* V pravoúhlé soustavě souřadnic se *nezávisle proměnná* vynáší na vodorovnou osu a *kladné hodnoty veličin vzrůstají vpravo* a nahoru od počátku souřadnic. V polární soustavě souřadnic musí ležet počátek čtení úhlů na vodorovné nebo svislé ose a kladný smysl odpovídá opačnému směru otáčení hodinových ručiček.
4. Na vnější stranu os vyneseme *stupnici,* jejíž body jsou přiměřeně daleko od sebe abychom mohli z grafu pohodlně odečítat. Čísla píšeme vodorovně a to i u svislé osy, pokud je to účelné používáme mocnin 10, popř. násobků jednotek. **Souřadnice naměřených bodů na osách nevyznačujeme**, lze je vyhledat v tabulce. Měřítka pro obě osy nemusí být shodná a počátek stupnice nemusí být totožný s počátkem osy. Snažíme se, aby **plocha grafu byla co nejlépe využita**.
5. Zřetelně *vyznačíme body* odpovídající naměřeným hodnotám. Chceme-li do grafu vynášet více závislostí, body příslušející různým závislostem odlišíme různými značkami (×, +, Δ, ⊗, ♦, ◊, •), ke každé křivce uvedeme hodnotu parametru, kterým je určena.
6. Vyznačenými **body**, které **neodstraňujeme**, proložíme **hladkou** plynulou **křivku**. Pokud neužijeme exaktní numerické metody (např. regrese odstavec 3.1.5), rýsujeme křivku tak, aby neměla neopodstatněné skoky, zlomy a extrémy, byla dostatečně hladká a přibližně stejným počtem bodů nad a pod křivkou.
7. Do *záhlaví grafu* uvedeme <u>slovní vyjádření</u> znázorněné závislosti, podle potřeby grafy číslujeme a odvoláváme se na ně v textu.
8. Často musíme z grafu odečíst určitou hodnotu, kterou potřebujeme pro další zpracování měření. Tyto *význačné body* označíme odlišně od naměřených hodnot a to jak na křivce tak i na příslušné ose.

Poznámka: ***<u>Graf vytvořený počítačovými programy (např. EXCEL) musí splňovat všechny svrchu uvedené náležitosti!</u>***

[28] Pokud budeme grafy zpracovávat na počítači, použijeme čistý papír A4.

3.3. Protokol o provedeném měření

3.3.1. Pokyny pro vypracování referátu (protokolu o provedeném měření)

Každý protokol musí být zpracován tak, aby podával (i po značném časovém odstupu) srozumitelnou zprávu o provedeném měření. Je třeba jej prezentovat v předepsané úpravě (psaný inkoustem, tuší nebo tiskem) na kvalitním papíře formátu A4 a zahrnout do něho všechny údaje, podle kterých lze dotyčné měření nejen posoudit, ale i přesně reprodukovat.

U referátu se hodnotí nejen obsahová, ale i formální úroveň.

Referát zahrnuje následující body v uvedeném pořadí:

1. ***Záhlaví*** referátu (dle předlohy), kde **musí** být uvedeno:
   - kde bylo měření provedeno (TUL, fyzikální laboratoř)
   - název a číslo úlohy (podle seznamu úloh)
   - jméno a příjmení studenta, který úlohu měřil a **zpracoval**; fakulta, ročník
   - datum měření.
2. ***Pracovní úkol*** – přesně a úplně formulované úkoly dle zadání u příslušné úlohy.
3. ***Potřeby*** – seznam použitých přístrojů a potřeb (včetně nezbytných technických dat: typ, výrobce, přesnost, měřící ústrojí, popř. měřící rozsahy). Seznam obsahuje i použité přípravky, součástky a chemikálie.
4. ***Obecná část*** – ve stručné formě obsahuje:
   - definici měřené veličiny, dále fyzikální zákony, ve kterých veličina vystupuje a které jsou potřebné pro objasnění použité měřící metody
   - stručný popis zvolené měřící metody, včetně vzorců potřebných k výpočtu výsledné veličiny a rozboru přesnosti měření
   - teorii měření s uvedenými základními vztahy, včetně rozboru přesnosti měřených a počítaných hodnot.
5. ***Postup měření*** – přesný a podrobný popis jednotlivých kroků nutných k realizaci měření, včetně schémat zapojení .
6. ***Naměřené hodnoty*** – uvedené v pojmenovaných tabulkách, včetně označení a jednotek fyzikálních veličin.
7. ***Zpracování naměřených hodnot*** – přehledně (nejlépe tabelárně) s případným grafickým zpracováním. Uvedeme příklady výpočtu výsledných hodnot, výpočet chyby výsledku, případně odhad přesnosti měřící metody.
8. ***Vyjádření konečných výsledků*** s přesností měření (určení intervalu spolehlivosti - viz odstavec 3.1.1. a následující) – uvedeme **odděleně** od bodu 7., případně zvýrazníme.
9. ***Zhodnocení měření*** obsahuje:
   - porovnání výsledků s tabulkovými hodnotami (ty je třeba konkrétně uvést)
   - zhodnocení výsledků měření a připomínky k měření
   - vysvětlení případných nesrovnalostí ve výsledcích a v průběhu grafů (např. v porovnání s teoreticky očekávanými hodnotami).
10. ***Seznam literatury*** – citace použitých pramenů dle normy (včetně fyzikálních tabulek, bez těchto skript).

3.3.2. Několik rad pro začínající experimentátory.

Počítač použijte pouze tehdy, když vám ulehčí práci a uspoří čas.

Početní zpracování naměřených hodnot a vyhotovení referátu se jeví jako velký a pracný úkol. Přesto jeho provedení neodkládejte. Stačí den, dva prodlení a ……“Co jsme to vlastně měřili ?“ „Jaké hodnoty jsou zapsány v tuté tabulce a v jakých jednotkách?“ Mezivýpočty a odvození konečných výsledků je dobré si průběžně poznamenávat do pracovního sešitu. („Kam jsem jenom dal(a) ten papír, na kterém byl potřebný výpočet?“) Je zbytečné začít psát referát dříve, než jsem si jist(a), že dosažené výsledky jsou „rozumné“. Vychází-li při výpočtech na sebekvalitnějších kalkulačkách či kompjůtrech nesmysly, nezoufejte: problém je z 90% způsoben chybně použitými jednotkami. Nelze libovolně mixovat metry s centimetry či kilogramy s miligramy.

Jak odhalíme, že výsledek je zřejmý nesmysl? Často stačí zdravý rozum (někdy nazývaný též „selský“): plocha obrazce, který se vejde na dlaň ruky, nemůže být rovna 11,5 m^2, elektrický proud, používaný v laboratoři nebude nabývat velikosti desítek či stovek ampérů, není reálné, aby chyba výsledku byla větší než výsledek sám, a podobně. Nejspolehlivějším kriteriem však je porovnání dosažených výsledků s výsledky, kterých dosáhli naši předchůdci (stačí zalistovat ve fyzikálních tabulkách).

Samozřejmě je možné, že námi zaznamenané naměřené hodnoty neumožňují splnění pracovního úkolu. Stane se, že naměříme něco jiného, než bylo třeba, při měření spácháme fatální chyby, či soubor naměřených hodnot není kompletní. Ani v tomto případě není nutné si zoufat. Mnohé vyjasní včasná a otevřená konzultace s vedoucím cvičení, v krajním případě si měření zopakujeme (jako již zkušenější experimentátoři).

3.3.3. Ukázka referátu

Laboratorní cvičení z fyziky

Protokol o provedeném měření

TECHNICKÁ UNIVERZITA v Liberci

Název úlohy *MĚŘENÍ SOUČINITELE DÉLKOVÉ TEPLOTNÍ ROZTAŽNOSTI*	
Číslo úlohy 13	Datum měření *7. 1. 2004*
Jméno a příjmení ***František KOUDELKA***	*2.ročník FS*
Hodnocení	

Pracovní úkol:

1. Stanovte součinitel délkové teplotní roztažnosti $\overline{\alpha}$ (jedné tyče) a určete jeho krajní chybu $\kappa(\overline{\alpha})$. Výsledek měření porovnejte s tabulkovou hodnotou.
2. Graficky zpracujte závislost posunutí stopy paprsku na teplotě $(n - n_0 = f(t - t_0))$.

Potřeby: Edelmannův dilatometr, 2 teploměry (s rozsahem 0 – 100 °C s dělením 0,1 °C), posuvné měřítko s rozsahem do 50 cm - výrobce Somet.

Obecná část:
Teplotní součinitel délkové roztažnosti látky α je definován

$$\alpha = \frac{1}{l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\ . \qquad (1)$$

Teplotní součinitel délkové roztažnosti látky α závisí na teplotě. Protože jeho změna je v malém rozsahu teplot malá, zavádíme pro zjednodušení výpočtů průměrný teplotní součinitel délkové roztažnosti látky $\overline{\alpha}$ v určitém intervalu teplot (t_0, t_1)

Vztah (1) definuje jednotku průměrného teplotního součinitele délkové roztažnosti látky $\overline{\alpha}$, kterou je reciproký kelvin [K^{-1}].

Základními veličinami, které musíme určit při klasickém měření průměrného teplotního součinitele délkové roztažnosti látky $\overline{\alpha}$ je teplota a délka. Teplotu t budeme měřit teploměrem. K měření délky, kterou je nutno určit velmi přesně, můžeme použít:

a) přesné indikátorové hodinky,

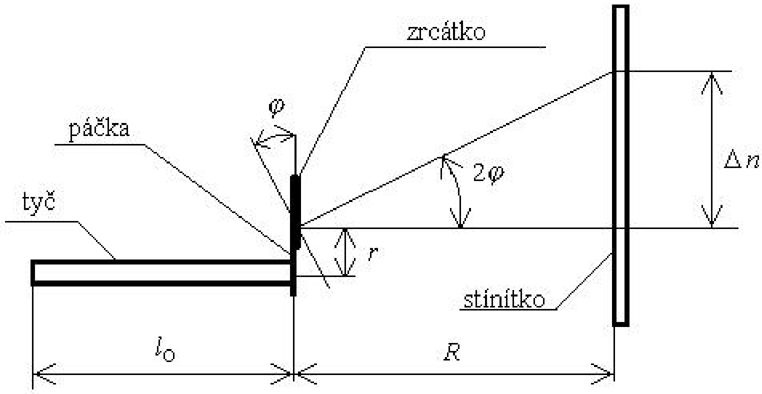
b) laserový interferometr,

c) zrcátkovou metodu.

V našem měření použijeme Edelmannova dilatometru, jehož princip je založen na výše uvedené zrcátkové metodě, kdy malou délkovou změnu Δl převedeme na výraznou změnu polohy světelné značky Δn na stupnici stínítka. Při zvýšení teploty tyče v Edelmannově dilatometru o $\Delta t = t - t_0$ se tyč prodlouží o $\Delta l = l - l_0$ a páčka P délky r se pootočí o úhel φ. Protože se jedná o malé úhly ($\varphi < 5°$), lze s dostatečnou přesností psát

$$\varphi \approx \tan\varphi = \frac{l - l_0}{r} = \frac{\Delta l}{r} . \tag{3}$$

Obr. 1



Úhel φ určíme zrcátkovou metodou, ze změny $\Delta n = n - n_0$ na stupnici stínítka ve vzdálenosti R od zrcátka (n_0 je počáteční hodnota stopy na stupnici). Platí

$$2\varphi \approx \tan 2\varphi = \frac{n - n_0}{R} = \frac{\Delta n}{R} . \tag{4}$$

Ze vztahů (3) a (4) dostaneme

$$\Delta l = l - l_0 = \frac{r}{2R}(n - n_0) . \tag{5}$$

Pro průměrný teplotní součinitel délkové roztažnosti látky $\overline{\alpha}$ ze vztahů (2) a (5) platí

$$\overline{\alpha} = \frac{r}{2Rl_0}\frac{(n - n_0)}{(t - t_0)} = \frac{r}{2Rl_0}k , \tag{6}$$

kde k je směrnice přímky $\Delta n = k\,\Delta t$.

K vyhodnocení závislosti $\Delta n = f(\Delta t)$ použijeme metodu lineární regrese, určíme hodnotu k a její krajní chybu $\overline{\kappa}(k)$.

Krajní chybu $\overline{\kappa}(\overline{\alpha})$ vypočteme aplikací lineárního zákona hromadění chyb na vztah (6), kde po derivování funkce $f = f(r, k, R, l_0)$ dostaneme pro výslednou relativní krajní chybu vztah

$$\overline{\kappa}_{\mathrm{r}}(\overline{\alpha}) = \overline{\kappa}_{\mathrm{r}}(r) + \overline{\kappa}_{\mathrm{r}}(k) + \overline{\kappa}_{\mathrm{r}}(R) + \overline{\kappa}_{\mathrm{r}}(l_0) . \tag{7}$$

Postup měření:

1) Po změření délky tyče l_0 jsme tyč vložili do Edelmannova dilatometru.
2) Hodnoty R a r nám byly zadány včetně krajních chyb, takže měření těchto vzdáleností jsme neprováděli.
3) K ohřevu tyče v Edelmannově dilatometru jsme využívali teplé vody. Teplotu lázně jsme vyrovnávali mícháním a odečítali ji na dvou teploměrech asi po 3 minutách, jak nám bylo doporučeno.
4) Hodnoty t a n jsme zaznamenávali do tabulky ve které jsme vypočítali hodnoty Δn a Δt, které jsme použili pro vyhodnocení metodou lineární regrese.
5) V závěru jsme provedli vyhodnocení měření.

Naměřené hodnoty:

Délka tyče l_0 (měřeno posuvným měřítkem s krajní chybou 0,2 mm) při teplotě 25 °C

č. měř.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
l_0 [mm]	500,0	500,0	500,0	500,0	500,0	500,0	500,0	500,0	500,0	500,0

Výběrová směrodatná odchylka je rovna nule a výslednou hodnotu vyjádříme pouze s krajní chybou měřidla, tj. $l_0 = (500{,}0 \pm 0{,}2)$ mm.

Hodnoty r a R jsou zadány v pokynech k úloze

R = (56,7 ± 0,1) cm r = (13,9 ± 0,3) mm.

Hodnoty naměřené na Edelmannově dilatometru:

č. měření	t_1 [°C]	t_2 [°C]	$t_i = (t_1+t_2)/2$ [°C]	n_i [cm]	Δt [°C]	Δn [cm]
1	36,2	37,0	36,60	15,70	0,00	0,000
2	40,0	41,0	40,50	15,60	3,90	0,100
3	45,5	46,0	45,75	15,40	9,15	0,300
4	49,5	50,0	49,75	15,20	13,15	0,500
5	55,0	56,0	55,50	15,00	18,90	0,700
6	60,0	60,0	60,00	14,70	23,40	1,000
7	65,0	65,0	65,00	14,50	28,40	1,200
8	70,0	70,5	70,25	14,25	33,65	1,450
9	74,0	75,5	74,75	14,00	38,15	1,700

Zpracování naměřených hodnot:

Lineární regresí pro závislost $\Delta n = f(\Delta t)$, jsme určili hodnotu k a její krajní chybu.

Směrnici k jsme vypočetli při zpracování grafu 1 na počítači v EXCELu. Získaná rovnice má tvar $y = 0{,}0453x - 0{,}0766$, korelační koeficient je $r_{xy} = 0{,}997$. Směrnice má hodnotu $k = 0{,}0453$ cm·K^{-1}.

Na kalkulačce jsme vypočítali výběrovou směrodatnou odchylku $\bar{s}_k = 0{,}0013$ cm·K^{-1}. Potom krajní chyba, kterou určíme z tabulky Studentova součinitele pro pravděpodobnost 95% a $n = 8$ (hodnota je 2,37) bude $\bar{\kappa}(k) = 0{,}003081$ cm·K^{-1}.

Dosazením do vztahu (6) jsme vypočítali hodnotu průměrného teplotního součinitele délkové roztažnosti látky $\bar{\alpha} = 1{,}11052 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}; krajní relativní chybu ze vztahu (7)

$$\bar{\kappa}_r(\bar{\alpha}) = \bar{\kappa}_r(r) + \bar{\kappa}_r(k) + \bar{\kappa}_r(R) + \bar{\kappa}_r(l_0) = 0{,}021 + 0{,}068 + 0{,}0017 + 0{,}0004 = 0{,}0911 .$$

Potom $\bar{\kappa}(\bar{\alpha}) = 1{,}0116 \cdot 10^{-6}$ K^{-1}.

Konečný výsledek:

$$\bar{\alpha} = (1{,}1 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}, \text{ pravděpodobnost } P = 95\ \% .$$

Zhodnocení měření:

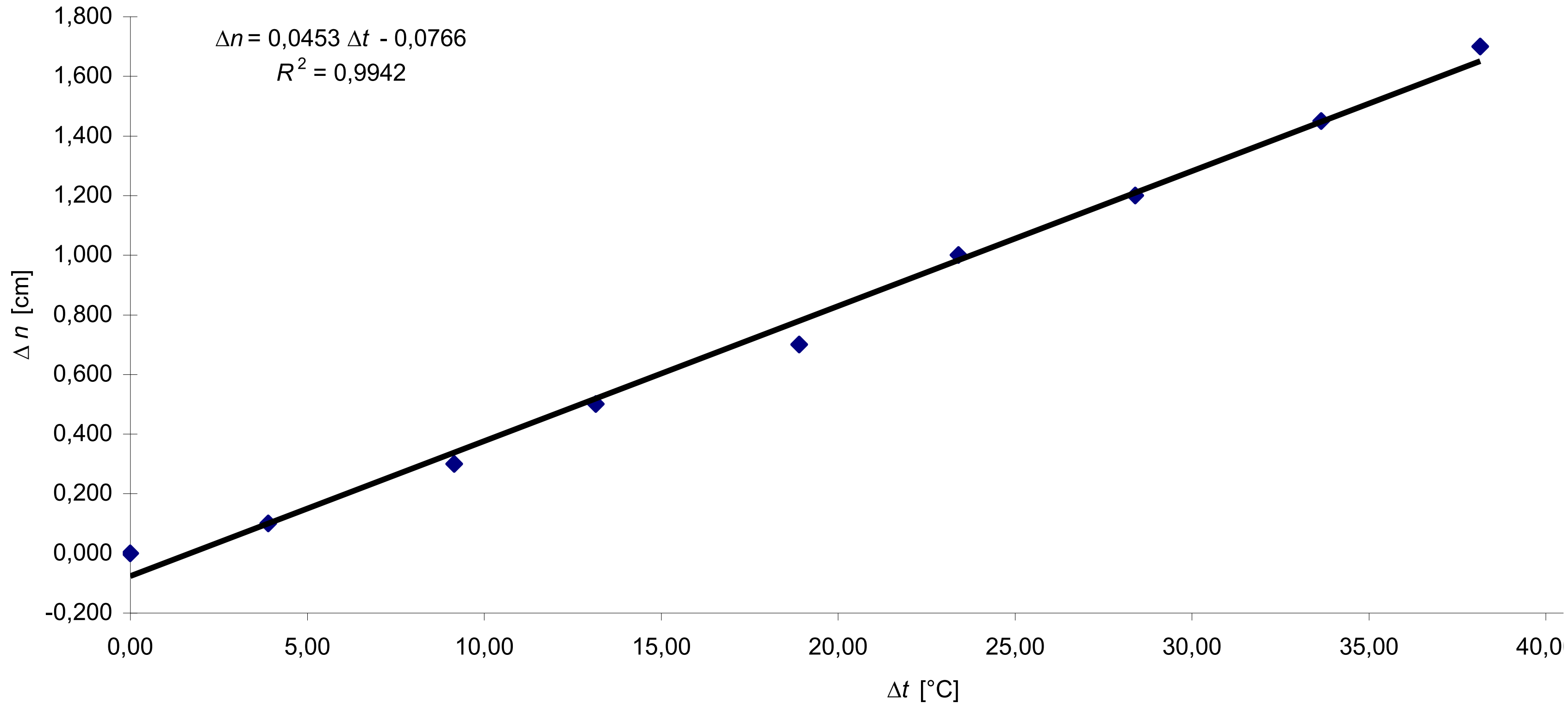
Provedli jsme měření průměrného teplotního součinitele délkové roztažnosti látky $\bar{\alpha}$. Námi naměřená hodnota pro ocelovou tyč je $\bar{\alpha} = (1{,}1 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-5}$ K^{-1} pro rozsah teplot 35 – 75 °C. Tabulková hodnota pro ocel v rozmezí teplot 0 až 100 °C je $\bar{\alpha} = 1{,}15 \cdot 10^{-5}$ K^{-1} [2]. Tedy tabulková hodnota padne do námi naměřeného intervalu. Hodnota korelačního koeficientu 0,997 ukazuje na správnost volby lineární závislosti, i když k výsledné chybě nejvíce přispívá právě krajní chyba získaná z lineární regrese. Do měření jsou zahrnuty veškeré chyby měření. Nedostatkem měření bylo, že se nám nepodařilo přiblížit počáteční teplotu tyče v lázni více teplotě, při které byla měřena délka l_0.

Literatura:

[1] LIBRA, M., ČERNÝ, F., VACEK, V. *Laboratorní cvičení z fyziky*. Praha: ČVUT, 1998. ISBN 80-01-01737-0.

[2] BROŽ, J., ROSKOVEC, V., VALOUCH, M. *Fyzikální a matematické tabulky*. Praha: SNTL, 1980.

Graf 1. Závislost posunutí stopy paprsku Δn [cm] na změně teploty Δt [°C] - měření součinitele délkové teplotní roztažnosti



Autoři textu: Mgr. Lubor Machonský, CSc.
Mgr. Milan Čmelík