Měření momentu setrvačnosti

Teorie:

Při popisu rotačního pohybu tělesa musíme, vedle jeho hmotnosti, počítat i s další fyzikální veličinou, kterou nazýváme **moment setrvačnosti**. Velikost momentu setrvačnosti ovlivňuje rotační pohyb těles.

Základní vztahy:

<u>Moment setrvačnosti *J*</u> [kg·m^2] tuhého tělesa *T* obecně proměnné hustoty ρ vzhledem k dané ose je definován vztahem (viz [1])

$$J = \int_{(T)} r^2\, dm = \int_{(T)} r^2 \rho\, dV, \qquad (1)$$

kde d*m* je hmotnost elementu tělesa o objemu d*V* a *r* jeho kolmá vzdálenost od osy rotace, a kde integrujeme přes celé těleso *T*.

Pro známá pravidelná homogenní tělesa lze vztah pro výpočet momentu setrvačnosti *J* odvodit z definice [1].

Hmotný bod hmotnosti *m* ve vzdálenosti *r* od osy	$J = mr^2$
Koule hmotnosti *m* poloměru *R* vzhledem k ose procházející jejím středem	$J = {}^2/_5\, mR^2$
Válec hmotnosti *m* poloměru *R* vzhledem k rotační ose symetrie	$J = {}^1/_2\, mR^2$
Pravoúhlý hranol hmotnosti *m* s hranami *a, b, c* vzhledem k ose rovnoběžné s hranou *a* a jdoucí jeho středem	$J = {}^1/_{12}\, m(b^2 + c^2)$

Pomocí *Steinerovy věty* [1] (nazývané i *Věta o rovnoběžné ose*) přepočítáme moment setrvačnosti vzhledem k navzájem rovnoběžným osám; v případě kdy jedna osa (o_T) prochází těžištěm a druhá osa (o_a) je od ní ve vzdálenosti *a,* platí pro moment setrvačnosti J_a (vzhledem k ose o_a)

$$J_a = J_T + ma^2, \qquad (2)$$

kde J_T je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose o_T a *m* hmotnost tělesa.

Necháme-li těleso hmotnosti *m* kývat v zemském tíhovém poli kolem vodorovné osy, která neprochází těžištěm a za předpokladu „malé“ úhlové amplitudy ($\varphi_m <$ 5°), platí pro dobu kmitu [1]:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_a}{mga}} \qquad (3)$$

kde g je tíhové zrychlení, a vzdálenost těžiště od osy kolem níž těleso kývá a J_a moment setrvačnosti vzhledem k ose kývání. Ze vztahu (3) potom můžeme experimentálně určit moment setrvačnosti tělesa J_a tělesa z naměřených hodnot: doby kmitu T, hmotnosti m tělesa a vzdálenosti a (pokud je známa poloha těžiště)

$$J_a = \frac{T^2 mga}{4\pi^2} \qquad (4)$$

V případě tělesa obecného tvaru, kdy není poloha těžiště známa, lze určit moment setrvačnosti následujícím postupem. K tělesu připevníme přívažek hmotnosti m_p, jednoduchého geometrického tvaru (nejčastěji se pro tento účel užívá válec), jehož moment setrvačnosti J_p umíme vypočítat. Označíme-li hmotnost soustavy m_s , moment setrvačnosti vzhledem k ose kývání J_s a vzdálenost těžiště soustavy od osy kývání a_s, bude pro dobu kmitu T_s platit

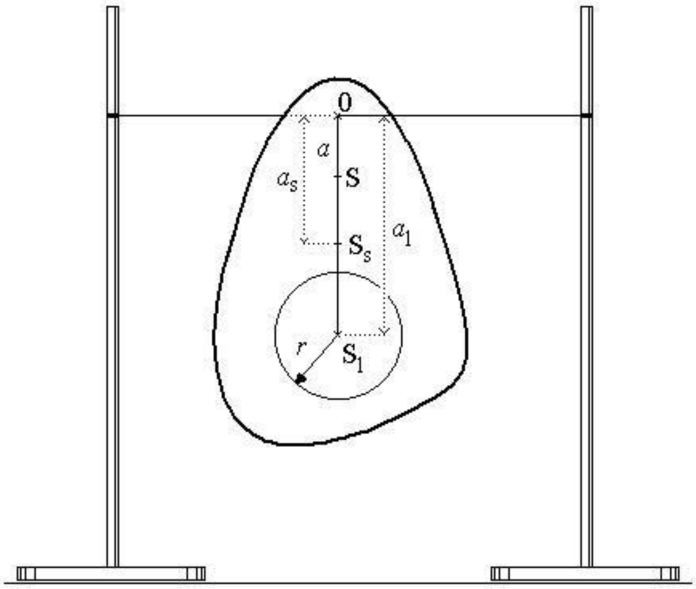
$$T_S = 2\pi \sqrt{\frac{J_S}{m_S g a_S}}. \qquad (5)$$

Pro moment setrvačnosti J_s soustavy podle osy kývání dále platí

$$J_s = J_a + J_p + m_p a_1^2 ,$$

kde a_1 je vzdálenost těžiště přívažku od osy kývání. Hmotnost soustavy je ovšem rovna součtu hmotností:

$m_s = m + m_p$. Vzdálenost a_s těžiště soustavy od osy kývání vypočteme podle vztahu pro polohu těžiště soustavy dvou těles:



Obr. 1 - měření momentu setrvačnosti

$$a_S = \frac{ma + m_p a_1}{m + m_p}$$

Dosazením do vztahů (3), (4) a (5) dostaneme pro moment setrvačnosti J_a tělesa (u kterého neznáme polohu těžiště)

$$J_a = \frac{T^2}{T^2 - T_S^2} \left(\frac{T_S^2}{4\pi^2}\, m_p g a_1 - J_p - m_p a_1^2 \right) \qquad (6)$$

Pracovní úkol:

1. Určete moment setrvačnosti desky pravidelného tvaru (válec nebo hranol) vzhledem k ose procházející jejím těžištěm, a to z doby kmitu tělesa měřené pro tři různé vzdálenosti *a* osy kývání od těžiště.
2. Hodnotu stanovenou měřením porovnejte s přímým výpočtem.
3. Změřte moment setrvačnosti tělesa nepravidelného tvaru vzhledem k ose kývání.

Potřeby: přípravek k upevnění desek, tělesa včetně přívažku, digitální váhy, měřítko, stopky s čítačem.

Pokyny pro měření a jeho zpracování:

1) K výpočtu momentu setrvačnosti desky pravidelného tvaru podle vztahu (4) a (2) změříme hmotnost desky *m*, vzdálenost *a* osy kývání od těžiště a k ní příslušnou dobu kmitu *T* desky, včetně krajních chyb. K měření doby kmitu použijeme metody opakovaných měření (nejméně 5x) pro 30 kmitů. Krajní chybu vážení odečteme z manuálu digitálních vah, krajní chybu vzdálenosti z opakovaných měření, krajní chybu doby kmitu podle použité metody (reakční doba člověka je cca. 0,2 s). Moment setrvačnosti J_a vypočteme ze vztahu (4), výslednou krajní chybu pak ze vztahu

$$\sigma_{J_a} = \sqrt{\left(\frac{\partial J_a}{\partial T}\,\sigma_T\right)^2 + \left(\frac{\partial J_a}{\partial m}\,\sigma_m\right)^2 + \left(\frac{\partial J_a}{\partial a}\,\sigma_a\right)^2},$$

kde $\left(\frac{\partial J_a}{\partial T}\right) = \frac{Tmga}{2\pi^2}$, $\left(\frac{\partial J_a}{\partial m}\right) = \frac{T^2 ga}{4\pi^2}$, $\left(\frac{\partial J_a}{\partial a}\right) = \frac{T^2 mg}{4\pi^2}$

Moment setrvačnosti J_T vypočítáme ze Steinerovy věty (2) a krajní chybu ze vztahu

$$\sigma_{J_T} = \sqrt{\left(\frac{\partial J_T}{\partial J_a}\,\sigma_{J_a}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_T}{\partial m}\,\sigma_m\right)^2 + \left(\frac{\partial J_T}{\partial a}\,\sigma_a\right)^2}\ ,$$

kde $\left(\frac{\partial J_T}{\partial J_a}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial J_T}{\partial m}\right) = -a^2$, $\left(\frac{\partial J_T}{\partial a}\right) = -2ma$.

2) Moment setrvačnosti desky nepravidelného tvaru vypočítáme podle vztahu (6). Musíme tedy změřit dobu kmitu tělesa bez přívažku *T*, dobu kmitu tělesa s přívažkem T_s, hmotnost přívažku m_p, vzdálenost a_1 těžiště přívažku od osy kývání a poloměr *r* válcovitého přívažku. Krajní chyby těchto veličin určíme jako v bodu 1). Po výpočtu momentu setrvačnosti J_a dle vztahu (6) (kde pro moment setrvačnosti přívažku zřejmě platí $J_p = ½\, m_p r^2$) stanovíme výslednou chybu ze vztahu

3) $\sigma_{J_a} = = \sqrt{\left(\frac{\partial J_a}{\partial T}\ \sigma_T\right)^2 + \left(\frac{\partial J_a}{\partial T_S}\ \sigma_{T_S}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_a}{\partial m_p}\ \sigma_{m_p}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_a}{\partial a_1}\ \sigma_{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_a}{\partial J_p}\ \sigma_{J_p}\right)^2}$

kde $\left(\frac{\partial J_a}{\partial T}\right) = -3\ \frac{2J_a T_S^2}{T(T^2 - T_S^2)}$, $\left(\frac{\partial J_a}{\partial T_S}\right) = \frac{T^2}{T^2 - T_S^2}\left(\frac{T_S m_p g a_1}{2\pi^2} + \frac{2J_a T_S}{T^2}\right)$,

$\left(\frac{\partial J_a}{\partial m_p}\right) = \frac{T^2}{T^2 - T_S^2}\left(\frac{T_S^2 g a_1}{4\pi^2} - a_1^2\right)$, $\left(\frac{\partial J_a}{\partial a_1}\right) = \frac{T^2}{T^2 - T_S^2}\left(\frac{T_S^2 m_p g}{4\pi^2} - 2m_p a_1\right)$,
$\left(\frac{\partial J_a}{\partial J_p}\right) = \frac{T^2}{T^2 - T_S^2}$, $\sigma_{J_p} = \frac{1}{2} r^2 \sigma_{m_p} + m_p r \sigma_r$

4) U všech výpočtů krajních chyb se zanedbává krajní chyba konstant π a *g,* neboť se předpokládá, že student bude provádět výpočty na kalkulačce, kde je číslo π určeno minimálně na 5 platných míst, a za hodnotu *g* vezme hodnotu normálního tíhového zrychlení uvedenou v tabulkách.

Kontrolní otázky:

🕮 Odvoďte vztah (3) z pohybové rovnice rotujícího tělesa.

🕮 Vypočtěte moment setrvačnosti tenké homogenní tyče délky *l* hmotnosti *m* vzhledem k ose procházející těžištěm kolmo na tyč.

🕮 Formulujte Steinerovu větu.

Literatura:

[1] KOPAL, A. a kol. *Fyzika I*. Vyd. 2. Liberec: TUL, 2009.

Autoři textu: Mgr. Milan Čmelík