

Varianta

- 1) V následující tabulce jsou uvedeny měsíční výdaje na potraviny 30 domácností. Vypočítejte aritmetický průměr a směrodatnou odchylku z těchto dat a výsledky konkrétně interpretujte. Proměnnou vhodným způsobem graficky znázorněte. Určete dále modální interval a vysvětlete, co konkrétně vyjadřuje. 3 body

Interval	Hranice intervalu		p _i	Střed intervalu	x _{si} p _i	x _{si} ² p _i
	dolní	horní				
1	1400	2000	0,167	1700	283,9	482 630
2	2000	2600	0,233	2300	535,9	1 232 570
3	2600	3200	0,333	2900	965,7	2 800 530
4	3200	3800	0,200	3500	700	2 450 000
5	3800	4400	0,033	4100	135,3	554 730
6	4400	5000	0,033	4700	155,1	728 970
Celkem				x	2775,9	8 249 430

$$\bar{x} = \sum x_{si}p_i = 2775,9$$

Průměrné měsíční výdaje na potraviny jsou 2 775,9 Kč.

$$s_x^2 = \sum x_{si}^2 p_i - \left(\sum x_{si} p_i \right)^2 = 8249430 - 2775,9^2 = 543809,2$$

$$s_x = \sqrt{543809,2} = 737,434$$

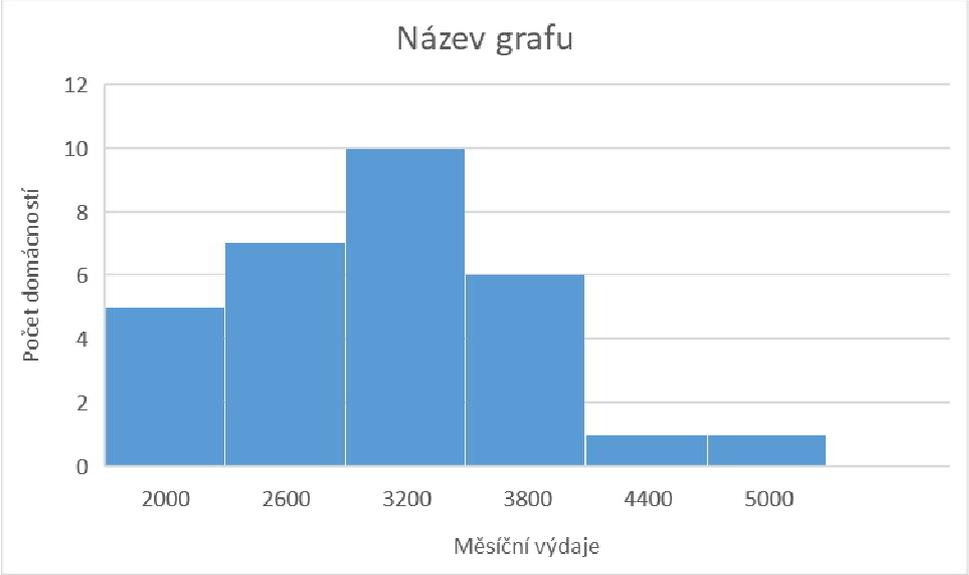
Měsíční výdaje na potraviny se v průměru odlišují od průměrných výdajů o 737,434 Kč.

Modální interval: (2600, 3200>.

Největší podíl domácností má měsíční výdaje na potraviny mezi 2600 a 3200 Kč.

Grafické znázornění: histogram

(Poznámka: na ose y by měly být relativní četnosti p_i, mohou tam ale být i absolutní četnosti n_i. Já jsem zde uvedla absolutní četnosti, které jsem přepočítala z relativních četností vynásobením rozsahem výběru, tj. hodnotou 30. Žádný program mi nechtěl zobrazit p_i, proto jsem se přiklonila k tomuto řešení. Jinak ale bychom primárně zobrazili p_i.)



- 2) Sledovali jsme proměnnou x a dodatečně jsme zjistili chyby u dvou jednotek. Místo 85 má být správně 95 a místo 120 má být 150. Ostatních 18 údajů je správných. Opravte vypočítané charakteristiky, byl-li aritmetický průměr 110 a rozptyl 800. 2 body

$$n = 20$$

$$\bar{x} = 110$$

$$s_x^2 = 800$$

Záměna 85 za 95.

Záměna 120 za 150.

Změna aritmetického průměru:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$110 = \frac{\sum x_i}{20}$$

$$2200 = \sum x_i$$

$$\bar{x}^* = \frac{2200 + 10 + 30}{20}$$

$$\bar{x}^* = 112$$

Aritmetický průměr po vložení správných hodnot je 112.

Změna rozptylu:

$$s_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n} \right)^2$$

$$800 = \frac{\sum x_i^2}{20} - 110^2$$

$$\sum x_i^2 = 258000$$

$$s_x^{*2} = \frac{258000 + 95^2 - 85^2 + 150^2 - 120^2}{20} - 112^2$$

$$s_x^{*2} = 13395 - 12544$$

$$s_x^{*2} = 851$$

Hodnota rozptylu je po vložení správných hodnot 851.

- 3) Každé písmeno, ze kterého se skládá slovo „automobil“, je napsáno na jednom lístku. Všechny devět lístků je řádně promícháno. Náhodně bez vracení vybereme čtyři lístky. Jaká je pravděpodobnost, že z nich postupně lze sestavit slovo „auto“ (tj. na prvním vybraném lístku je písmeno A, na druhém U, na třetím T a na čtvrtém O)? 2 body

4 závislé náhodné jevy A_1, A_2, A_3, A_4 .

A_1 ... vybrání písmene A

A_2 ... vybrání písmene U

A_3 ... vybrání písmene T

A_4 ... vybrání písmene O

Jde mi o společné nastoupení všech sledovaných jevů, tedy o jejich průnik.

Průnik 4 závislých náhodných jevů je dán jako:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Nyní zjistíme jednotlivé podmíněné pravděpodobnosti:

$$P(A_1) = \frac{1}{9}$$

$$P(A_2|A_1) = \frac{1}{8}$$

$$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{1}{7}$$

$$P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{2}{6}$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{1512} = 0,00066138 \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že ze 4 náhodně vybraných lístků sestavíme slovo auto, je 0,066 %, což je velice malá pravděpodobnost.

- 4) V textilní továrně se pracuje na tři směny po osmi hodinách. Poruchy strojního zařízení se vyskytují náhodně a za jednu směnu se vyskytnou v průměru tři. Jaká je pravděpodobnost, že během příštích 24 hodin dojde nejvýše ke čtyřem poruchám? Určete dále, jaká je pravděpodobnost, že během příštích 24 h dojde
- k nejvýše šesti a nejméně třem poruchám;
 - k alespoň dvěma poruchám.

3 body

NV X ... počet poruch za 24 h

Řídí se Poissonovým rozdělením.

Určení parametru λ :

Platí, že $E(X) = \lambda$. Hledám tedy v zadání příkladu informaci o střední hodnotě.

1 směna 3 poruchy (v průměru)

3 směny (24h) ... x poruch

$x = 9$ poruch = λ

Po [9]

$$P(X \leq 4) = F(4) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \\ = 0,00012 + 0,00111 + 0,005 + 0,01499 + 0,03374 = 0,055$$

Pravděpodobnost, že během příštích 24 hodin dojde nejvýše ke čtyřem poruchám, je 5,5 %, což je velmi malá pravděpodobnost.

$$a) P(3 \leq X \leq 6) = F(6) - F(2) = P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 0,207 - 0,006 = \\ = 0,015 + 0,034 + 0,061 + 0,091 = 0,201$$

Pravděpodobnost, že během příštích 24 h dojde k nejvýše šesti a nejméně třem poruchám, je 20,1 %, což je malá pravděpodobnost.

$$b) P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - [P(0) + P(1)] = \\ = 1 - 0,001 = 0,999$$

Pravděpodobnost, že během příštích 24 h dojde k alespoň dvěma poruchám, je 99,9 %, což je velmi vysoká pravděpodobnost blízká se jistotě.