7 PRAVDĚPODOBNOST – 4. ČÁST

7.1 Některá rozdělení spojitých náhodných veličin

7.1.1 Exponenciální rozdělení $\boldsymbol{E(A;\delta)}$

- NV X je doba čekání do nastoupení sledovaného jevu, může-li tento jev nastat v kterémkoli okamžiku
- *rozdělení má jeden parametr:*
  A … počáteční doba, během které sledovaný jev nastat nemůže.

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{1}{\delta} \cdot e^{-(x-A)/\delta}, \; x > A, \delta > 0, A \geq 0,$$
$$= 0 \qquad \text{jinak.}$$

Distribuční funkce:

$$F(x) = 1 - e^{-(x-A)/\delta}, \; x > A,$$
$$= 0 \qquad x \leq A.$$

$$E(X) = A + \delta$$
$$D(X) = \delta^2$$

Např.: NV X je doba čekání zákazníka na obsluhu v prodejně, doba realizace dvou po sobě jdoucích telefonních hovorů, doba životnosti zařízení, u nichž dochází k poruše z náhodných příčin (nikoli v důsledku opotřebení).

Použití: V teorii spolehlivosti a životnosti, v teorii hromadné obsluhy (tzv. teorii front), v teorii obnovy.

7.1.2 Normální rozdělení $\boldsymbol{N(\mu;\ \sigma^2)}$

- je vhodné všude tam, kde kolísání NV X je způsobeno velkým počtem nepatrných a vzájemně nezávislých vlivů
- klasickým typem veličin, které se řídí tímto rozdělením, jsou *náhodné chyby*
- pomocí $N(\mu;\ \sigma^2)$ lze za jistých podmínek aproximovat řadu jiných rozdělení, a to jak spojitých, tak i nespojitých
- *rozdělení má dva parametry:*
  μ … střední hodnota,
  σ^2… rozptyl.

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \; -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \ \sigma^2 > 0.$$

Distribuční funkce:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt\,,\ -\infty<x<\infty, -\infty<\mu<\infty, \sigma>0.$$

$$E(X)=\mu$$
$$D(X)=\sigma^2$$

- hustota pravděpodobnosti $f(x)$ je zvonovitá křivka, symetrická podle $x=\mu$ a její tvar závisí na parametru σ^2
- rozdělení $N(\mu;\ \sigma^2)$ je jednovrcholové, vrchol je v bodě $x=\mu$
- $\mu = modus = medián.$

Normování NV X s normálním rozdělením: výpočet $F(x)$ normálního rozdělení je poměrně komplikovaný, proto se z důvodů usnadnění výpočtu transformuje náhodná veličina X, která má normální rozdělení s parametry μ a δ^2 na *normovanou veličinu U*, která má *normované normální rozdělení*.

Normované normální rozdělení $\boldsymbol{N(0;\ 1)}$

- původní NV *X*, která má $\boldsymbol{N(\mu;\ \sigma^2)}$ normujeme, tzn. transformujeme na NV *U*, která má $\boldsymbol{N(0;\ 1)}$
- hodnoty $\Phi(u)$ a kvantilů u_p lze tabelovat.

$$U=\frac{x-\mu}{\sigma},\ E(U)=0,\ D(U)=1.$$

Vztah pro výpočet F(x):

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\Phi(u)\ .$$

Hustota pravděpodobnosti:

$$\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{u^2}{2}}\,,\ -\infty<u<\infty.$$

Distribuční funkce:

$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\,,\ -\infty<u<\infty.$$

Tabulky normovaného normálního rozdělení:

Tabelovány jsou obvykle hodnoty $\Phi(u)$ jen pro $u\geq 0$ a kvantily u_p jen pro $P\geq 0{,}5$, neboť vzhledem k symetrii $N(0;\ 1)$ podle bodu $u=0$ platí vztahy:

$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$, $u_P = -u_{1-P}$,

$u_p = \dfrac{x_p - \mu}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad x_p = \sigma u_p + \mu$.

7.2 Rozdělení některých funkcí náhodných veličin

- mají zvláštní význam pro řešení některých matematicko-statistických úloh
- stejné značení pro náhodné veličiny i jejich hodnoty
- používají se především kvantily těchto rozdělení, jejich hodnoty jsou tabelovány.

7.2.1 Rozdělení χ^2 $\chi^2(\nu)$

- NV χ^2 je součtem ν nezávislých NV U s normovaným normálním rozdělením
- *rozdělení má jeden parametr:*
  ν … počet stupňů volnosti
- kvantily jsou tabelovány pro $\nu = 1, 2, \ldots, 30$ a pro vybrané pravděpodobnosti.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\nu} U_i^2 = U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_\nu^2$$

7.2.2 Rozdělení Studentovo (t) $t(\nu)$

- NV t je podílem dvou nezávislých NV, a to NV U s rozdělením $N(0;\ 1)$ a NV χ^2 s rozdělením $\chi^2(\nu)$
- *rozdělení má jeden parametr:*
  ν … počet stupňů volnosti
- kvantily jsou tabelovány pro $\nu = 1, 2, \ldots, 30$ a pro vybrané pravděpodobnosti
- používá se především pro výběry malého rozsahu ($n < 30$)
- rozdělení je symetrické podle bodu $t = 0$, pro kvantily proto platí vztah $t_p = -t_{1-p}$.

$$t = \frac{U}{\sqrt{\dfrac{\chi^2}{\nu}}}$$

7.2.3 Rozdělení Fisherovo (Snedecorovo) $F(\nu_1;\ \nu_2)$

- NV F je podílem dvou nezávislých NV, a to NV χ_1^2 s rozdělením $\chi^2(\nu_1)$ a NV χ_2^2 s rozdělením $\chi^2(\nu_2)$
- *rozdělení má dva parametry:*
  ν_1… počet stupňů volnosti NV χ_1^2 (v čitateli)
  ν_2… počet stupňů volnosti NV χ_2^2 (ve jmenovateli)

$$F = \frac{\dfrac{\chi_1^2}{\nu_1}}{\dfrac{\chi_2^2}{\nu_2}}$$