9 MATEMATICKÁ STATISTIKA – 2. ČÁST

9.1 Intervalový odhad

***Spolehlivost odhadu* $1-\alpha$**

- je to pravděpodobnost; $0 < \alpha < 1$
- volíme vždy číslo blízké 1, nejčastěji 0,95 (event. 0,99 nebo 0,9)
- čím vyšší spolehlivost požadujeme, tím je za jinak stejných podmínek interval spolehlivosti (dále jen IS) širší.

***Riziko odhadu* α**

- udává, v kolika případech ze 100 (tj. v jakém procentu případů) nebude IS pokrývat odhadovaný parametr Θ.

Intervaly spolehlivosti mohou být konstruovány jako:

1. oboustranné, kde $\Theta_d < \Theta < \Theta_h$
2. jednostranné: pravostranné, kde $\Theta < \Theta_h$

   levostranné, kde $\Theta > \Theta_d$.

Θ_h je horní mez, Θ_d je dolní mez.

9.1.1 Odhad parametru μ (střední hodnoty) normálního rozdělení

1. Bodový odhad

Bodovým odhadem střední hodnoty $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ je *výběrový průměr* $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Je to nevychýlený odhad střední hodnoty μ.

2. Intervalový odhad

Při konstrukci IS pro parametr μ rozlišujeme následující situace:

- **Velký výběr z normálního rozdělení se známým rozptylem σ^2:**

  Oboustranný IS:

$$P\left(\bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

  Pravostranný IS:

$$P\left(\mu < \bar{x} + u_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

Levostranný IS:

$$P\left(\bar{x}-u_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu\right)=1-\alpha$$

$\Delta=u_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ je *přípustná chyba odhadu.*

- **Velký výběr z normálního rozdělení s neznámým rozptylem σ^2:**

Při řešení praktických úloh obvykle neznáme rozptyl ZS σ^2, a proto ho odhadujeme pomocí *výběrového rozptylu* s_x^2:

$$s_x^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n-1}.$$

Oboustranný IS:

$$P\left(\bar{x}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{s_x}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{s_x}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

Pravostranný IS:

$$P\left(\mu<\bar{x}+u_{1-\alpha}\cdot\frac{s_x}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

Levostranný IS:

$$P\left(\bar{x}-u_{1-\alpha}\cdot\frac{s_x}{\sqrt{n}}<\mu\right)=1-\alpha$$

- **Malý výběr z normálního rozdělení s neznámým rozptylem σ^2:**

Kvantily normovaného normálního rozdělení ve vzorcích z předcházející situace nahradíme kvantily Studentova rozdělení s $\nu = \mathrm{n} - 1$ stupni volnosti.

Oboustranný IS:

$$P\left[\bar{x}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s_x}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s_x}{\sqrt{n}}\right]=1-\alpha$$

Pravostranný IS:

$$P\left[\mu<\bar{x}+t_{1-\alpha}(n-1)\cdot\frac{s_x}{\sqrt{n}}\right]=1-\alpha$$

Levostranný IS:

$$P\left[\bar{x}-t_{1-\alpha}(n-1)\cdot\frac{s_x}{\sqrt{n}}<\mu\right]=1-\alpha$$

9.1.2 Odhad parametru σ^2 (rozptylu) normálního rozdělení

1. Bodový odhad

Bodovým odhadem rozptylu $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N}$ je *výběrový rozptyl* $s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$.
Je to nezkreslený a konzistentní odhad σ^2 .

2. Intervalový odhad

Při konstrukci IS pro parametru σ^2 rozlišujeme teoreticky dva případy: buď druhý parametr rozdělení (μ) známe nebo neznáme. V praxi je daleko častější případ, kdy parametr μ neznáme, proto se na něj v následujícím textu zaměříme.

Oboustranný IS:

$$P\left[\frac{(n-1)s_x^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s_x^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right] = 1-\alpha$$

Pravostranný IS:

$$P\left[\sigma^2 < \frac{(n-1)s_x^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}\right] = 1-\alpha$$

Levostranný IS:

$$P\left[\frac{(n-1)s_x^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)} < \sigma^2\right] = 1-\alpha$$

9.1.3 Odhad parametru π (relativní četnosti) alternativního rozdělení

Je třeba mít k dispozici výběr dostatečně velkého rozsahu; to je zajištěno splněním podmínky $n\pi(1-\pi) > 9$.

1. Bodový odhad

Bodovým odhadem relativní četnosti $\pi = \frac{M}{N}$ je *výběrová relativní četnost* (výběrový podíl) $p = \frac{m}{n}$.

M ... počet jednotek se sledovanou vlastností v ZS
N ... rozsah ZS
m ... počet jednotek se sledovanou vlastností ve výběrovém souboru
n ... rozsah výběru.

2. Intervalový odhad

Oboustranný IS:

$$P\left[p - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \pi < p + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = 1 - \alpha$$

$\Delta = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ je *přípustná chyba odhadu.*

Pravostranný IS:

$$P\left[\pi < p + u_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = 1 - \alpha$$

Levostranný IS:

$$P\left[p - u_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \pi\right] = 1 - \alpha$$

9.2 Stanovení minimálního rozsahu výběru

Pokud při stanovení minimálního rozsahu výběru, potřebného k dodržení zadaných podmínek, vycházíme ***ze vzorce přípustné chyby odhadu parametru μ***, jeho úpravou dostaneme:

$$n \geq \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot \sigma^2}{\Delta^2}.$$

Pokud neznáme rozptyl základního souboru σ^2, použijeme jeho bodový odhad s_x^2.

Budeme-li vycházet ***ze vzorce přípustné chyby odhadu parametru π***, jeho úpravou dostaneme:

$$n \geq \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot \pi(1-\pi)}{\Delta^2}.$$

Pokud neznáme relativní četnost základního souboru π, použijeme její bodový odhad p.