

10 MATEMATICKÁ STATISTIKA – 3. ČÁST

10.1 Testování statistických hypotéz

- *hypotéza* je určitý předpoklad (tvrzení) o základním souboru
- jestliže se hypotéza týká neznámého parametru ZS, jde o tzv. parametrické testy
- jestliže se hypotéza týká vlastností ZS, jde o tzv. neparametrické testy
- testování hypotéz je postup, sloužící k ověření předpokladů o ZS (hypotéz) na základě výběrových dat
- testovací postup umožňuje rozhodnout, zda určitou hypotézu zamítneme či ne, a to s malým, předem zvoleným *rizikem* α .

Symbolika a základní pojmy:

H_0 ... nulová (testovaná) hypotéza

H_1 ... alternativní hypotéza

Testové kritérium (t): je to vhodná charakteristika, která má při platnosti H_0 známé pravděpodobnostní rozdělení (dále jen TK).

Kritický obor (W): je tvořen hodnotami TK, které jsou při platnosti H_0 tak extrémní, že pravděpodobnost jejich výskytu je velmi malá.

Obor přijetí (V): je tvořen všemi hodnotami TK mimo kritický obor.

Hladina významnosti (α) = pravděpodobnost chyby 1. druhu: je to pravděpodobnost, že zamítneme H_0 , ačkoli platí.

Pravděpodobnost chyby 2. druhu (β): je to pravděpodobnost, že nezamítneme H_0 , ačkoli neplatí.

Síla testu ($1 - \beta$): je to pravděpodobnost správného zamítnutí H_0 , tj. schopnost testu zamítnout neplatnou H_0 .

Standardní testovací postup:

- jedná se o obecný postup
- je nezávislý na konkrétním typu testu
- provádí se v několika krocích.

1. Formulace hypotéz H_0 a H_1 .

2. Volba testového kritéria: zvolíme vhodnou charakteristiku, jejíž rozdělení při platnosti H_0 známe.

3. Vymezení kritického oboru: je omezen kvantily rozdělení TK při platnosti H_0 (tzv. kritické hodnoty).

4. Výpočet hodnoty TK z výběrových dat.

5. **Formulace závěru o výsledku testu:** existují pouze dvě možnosti, jedna z nich tedy musí nastat.

- TK leží v kritickém oboru ($TK \in W$): zamítáme H_0 , tzn. prokázali jsme H_1 .
- TK neleží v kritickém oboru ($TK \notin W$): nezamítáme H_0 , tzn. neprokázali jsme H_1 .

10.1.1 Některé parametrické testy

❖ Test parametru μ (střední hodnoty) normálního rozdělení

1. Formulace hypotéz

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

- a) $H_1 : \mu \neq \mu_0$ *oboustranná alternativní hypotéza*
- b) $H_1 : \mu > \mu_0$ *pravostranná alternativní hypotéza*
- c) $H_1 : \mu < \mu_0$ *levostranná alternativní hypotéza*

2. Volba testového kritéria

Rozlišujeme tři případy:

- a) známe rozptyl ZS σ^2

$$U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, \text{ při platnosti } H_0 \text{ má rozdělení } N(0;1)$$

- b) neznáme rozptyl ZS σ^2 a výběr má malý rozsah

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}, \text{ při platnosti } H_0 \text{ má rozdělení } t(n-1)$$

- c) neznáme rozptyl ZS σ^2 a výběr má velký rozsah

$$U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}, \text{ při platnosti } H_0 \text{ má rozdělení } N(0;1)$$

3. Stanovení kritického oboru

Pro případy a) a c) a různé typy alternativních hypotéz:

$$a) W \equiv \left\{ u; u \leq u_{\frac{\alpha}{2}} \text{ a } u \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$b) W \equiv \{u; u \geq u_{1-\alpha}\}$$

$$c) W \equiv \{u; u \leq u_{\alpha}\}.$$

Pro případ b) a různé typy alternativních hypotéz:

$$a) W \equiv \left\{ t; t \leq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \text{ a } t \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\}$$

$$b) W \equiv \{t; t \geq t_{1-\alpha}(n-1)\}$$

$$c) W \equiv \{t; t \leq t_{\alpha}(n-1)\}.$$

❖ **Test parametru π (relativní četnosti) alternativního rozdělení**

Je třeba mít k dispozici výběr dostatečně velkého rozsahu; to je zajištěno splněním podmínky $n\pi(1-\pi) > 9$.

1. $H_0 : \pi = \pi_0$

a) $H_1 : \pi \neq \pi_0$

b) $H_1 : \pi > \pi_0$

c) $H_1 : \pi < \pi_0$

2. $U = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$, při platnosti H_0 má rozdělení $N(0;1)$

3. a) $W \equiv \left\{ u; u \leq u_{\frac{\alpha}{2}} \text{ a } u \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$

b) $W \equiv \{u; u \geq u_{1-\alpha}\}$

c) $W \equiv \{u; u \leq u_{\alpha}\}$

❖ **Test parametru σ^2 (rozptylu) normálního rozdělení**

1. $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

a) $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

b) $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

c) $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$

2. Rozlišujeme dva případy – buď parametr μ ZS známe nebo ne.

V praxi je daleko častější případ, kdy parametr μ neznáme, proto se na něj omezíme.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}, \text{ při platnosti } H_0 \text{ má rozdělení } \chi^2(n-1)$$

3. a) $W \equiv \left\{ \chi^2; \chi^2 \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) \text{ a } \chi^2 \geq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) \right\}$

b) $W \equiv \{\chi^2; \chi^2 \geq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)\}$

c) $W \equiv \{\chi^2; \chi^2 \leq \chi_{\alpha}^2(n-1)\}$

Test hypotézy o shodě dvou průměrů

Východisko	Testové kritérium	Rozdělení TK při platnosti H_0	Parametry rozdělení	Alternativní hypotéza	Kritický obor
Známe σ_1^2 a σ_2^2	$U = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	N	$\mu = 0$ $\sigma^2 = 1$	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	$U \leq u_{\frac{\alpha}{2}} \text{ a } U \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$
				$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$U \geq u_{1-\alpha}$
				$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	$U \leq u_{\alpha}$
Neznáme σ_1^2 a σ_2^2 Předpokládáme: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1'^2 + (n_2-1)s_2'^2}{n_1+n_2-2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$	t	$\nu = n_1 + n_2 - 2$	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	$t \leq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$ a $t \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$
				$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$t \geq t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$
				$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	$t \leq t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$
Neznáme σ_1^2 a σ_2^2 Předpokládáme: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1'^2}{n_1} + \frac{s_2'^2}{n_2}}}$	t	$\nu = \frac{\left(\frac{s_1'^2}{n_1} + \frac{s_2'^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1} \left(\frac{s_1'^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2-1} \left(\frac{s_2'^2}{n_2}\right)^2}$	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	$t \leq t_{\frac{\alpha}{2}}(\nu) \text{ a } t \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)$
				$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$t \geq t_{1-\alpha}(\nu)$
				$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	$t \leq t_{\alpha}(\nu)$