KINEMATIKA – PŘEHLED MATEMATIKY

1. ÚPRAVY ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

- ekvivalentní úpravy algebraických rovnic
- řešení logaritmických rovnic typu $\boxed{\ln x = a}$ (tzv. odlogaritmování)

$$\ln x = a \quad / \exp$$
$$\mathrm{e}^{\ln x} = \mathrm{e}^{a} \qquad \text{(aplikujeme } \mathrm{e}^{\ln x} = x\text{)}$$
$$x = \mathrm{e}^{a}$$

- práce s logaritmy

$$\ln a + \ln b = \ln(ab)$$
$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$
$$\ln a^{c} = c \cdot \ln a$$

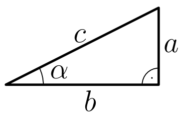
- práce s exponenty

$$a^{x} \cdot a^{y} = a^{x+y}\,;\;\; (a^{x})^{y} = a^{x \cdot y}\,;\;\; a^{x} \cdot b^{x} = (ab)^{x}$$

- umocňování dvojčlenu: $\boxed{(A \pm B)^2 = \mathrm{A}^2 \pm 2AB + B^2}$, nebo trojčlenu

$$(A+B+C)^2 = (A+(B+C))^2 = A^2 + 2A(B+C) + (B+C)^2 =$$
$$= A^2 + 2AB + 2AC + B^2 + 2BC + C^2$$

2. GONIOMETRICKÉ FUNKCE, PYTHAGOROVA VĚTA, PRAVOÚHLÝ TROJÚHELNÍK, TROJÚHELNÍKY



$$a = c \sin\alpha\,,\;\; b = c\cos\alpha\,;\;\; \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,;\text{ atd.}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

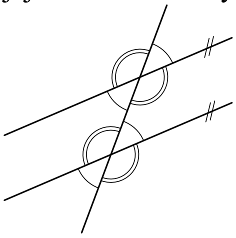
- vztahy mezi goniometrickými funkcemi

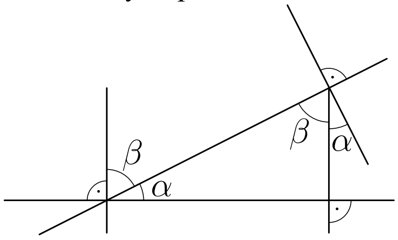
$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$
$$\boxed{\frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{tg}\, x}$$

dále může být užitečné např.:

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin 2x = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$\cos 2x = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

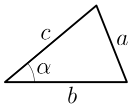
- souhlasné a střídavé úhly; úhly mezi přímkou, její kolmicí a svislými a vodorovnými přímkami



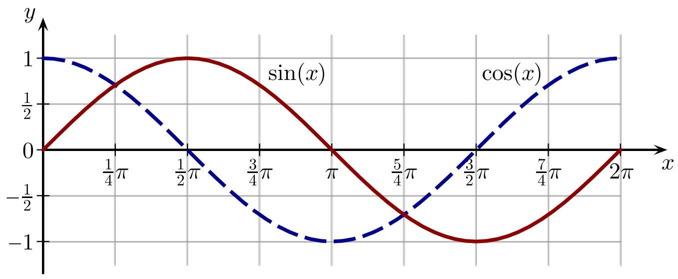


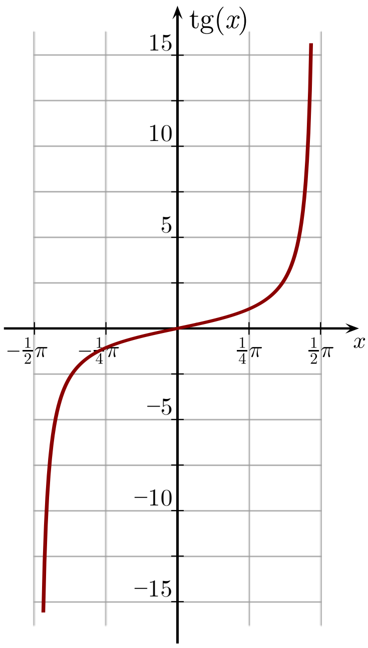
- kosinová věta

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$



- vlastnosti goniometrických funkcí – znalost průběhu; sinus, tangens – liché funkce ($\sin(-x) = -\sin(x)$; $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}(x)$);
  - cosinus – sudá funkce ($\cos(-x) = \cos(x)$);





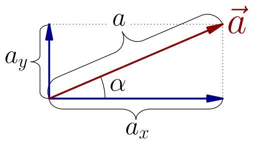
φ[rad]	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\varphi$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

- také co to znamená sudá/lichá funkce.
- vodorovné posunutí grafu sinus/cosinus a přechod sinus na cosinus a opačně:

$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos x;\ \cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin x$$

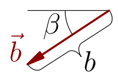
3. Vektory

- rozdíl mezi skalárem a vektorem (skalární veličinou a vektorovou veličinou);
- rozklad vektoru do kolmých složek:



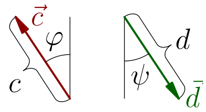
$$a_x = a\cos\alpha \qquad a_y = a\sin\alpha$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cos\alpha \\ a\sin\alpha \end{bmatrix}$$

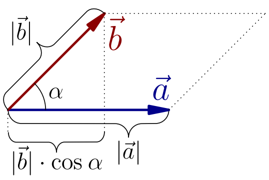


$$b_x = -b\cos\beta \qquad b_y = -b\sin\beta$$

  - umět si poradit i s různými variantami kótování úhlu vektoru (ke svislici, horizontále, v kladném/záporném směru – viz např. obr. vpravo);
  - **pozor také na znaménka složek vektoru!**



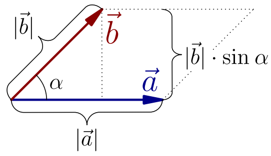
- **skalární součin** + jeho vlastnosti:
  - $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + \ldots =$ skalár (skalár = číslo, tedy pouze hodnota, neurčuje směr – např. tlak, hmotnost, energie atd.);
    $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$;
  - skalární součin vektorů svírajících úhel α :
    $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$;



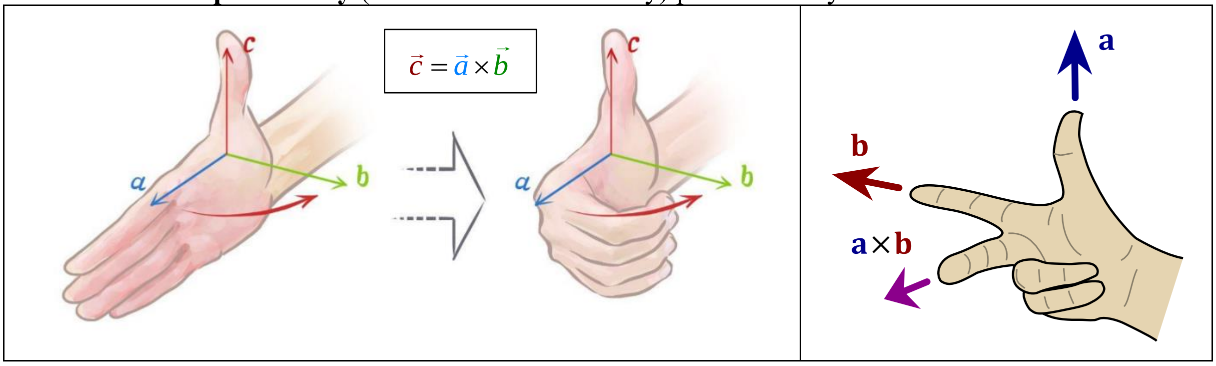
- **vektorový součin** + jeho vlastnosti:
  - $$\vec{a} \times \vec{b} = \det\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{matrix} (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + \\ (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + \\ (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} \end{matrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_x b_z - a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

    (viz Sarrussovo pravidlo v dalším textu)

- $\boxed{\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}\ \ !!!}$ vektorový součin **není** komutativní! Platí $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$
- $\boxed{\vec{a}\,||\,\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}}$ pozn.: $\vec{0}$ je tzv. nulový vektor;
- velikost vektorového součinu vektorů svírajících úhel α $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha$ (obsah rovnoběžníku);

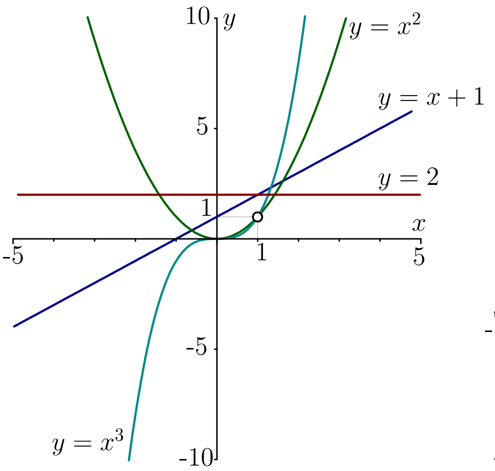


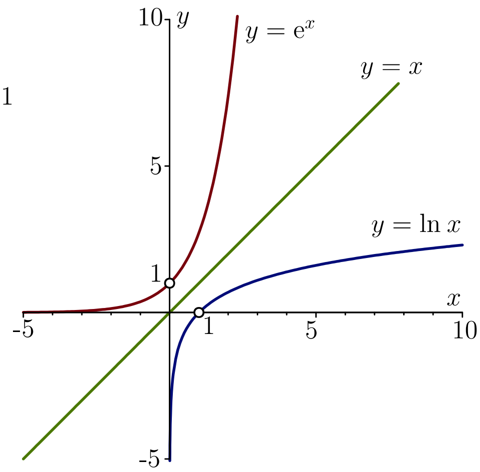
- **Pravidlo pravé ruky** (dvě rovnocenné varianty) pro vektorový součin:



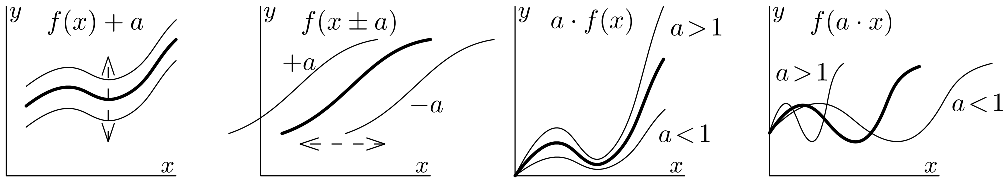
4. Grafy elementárních funkcí

- Znalost grafů funkcí (důležité body, definiční obory, obory hodnot):
  - konstanta;
  - lineární;
  - kvadratická;
  - kubická;
  - exponenciální – protíná osu y v $y = 1$; $x\in\mathbb{R}$; $y\in(0,\infty)$;
  - logaritmická – protíná osu x v $x = 1$; $x\in(0,\infty)$; $y\in\mathbb{R}$; rostoucí;
  - goniometrické funkce sinus, cosinus, tangens (viz předchozí text);





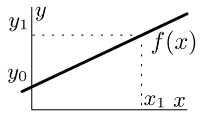
- vědět co se s grafem funkce stane když:
  - přičtení konstanty $f(x)+a$;
  - násobení konstantou $a\cdot f(x)$;
  - argument funkce násobený konstantou $f(a\cdot x)$;
  - k argumentu přičteme(odečteme) konstantu $f(x\pm a)$.



svislé posunutí | vodorovné posunutí | svislé natažení (vertical stretch) | vodorvoné natažení (horizontal stretch)

- umět určit předpis lineární funkce dle obrázku – např.:

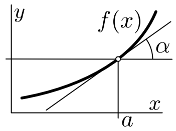
  v případě dle obrázku vpravo: $f(x)=\dfrac{y_1-y_0}{x_1}x+y_0$.



5. DERIVACE

- derivace základních funkcí (lineární, mocninné, lomené, goniometrické, exponenciála, logaritmus), derivace součinu a podílu funkcí;
- geometrická interpretace derivace v bodě:

  $$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}=\mathrm{tg}\,\alpha\,;$$



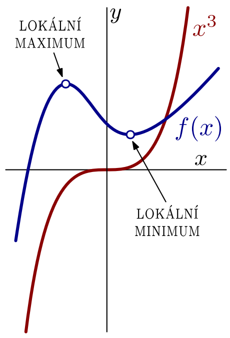
„Směrnice tečny funkce má hodnotu derivace funkce v bodě.“

(tečna: $y = kx + q$; kde k nazýváme směrnicí)

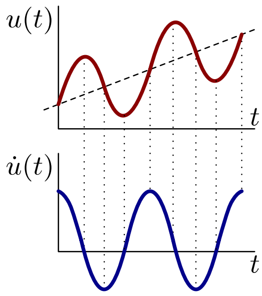
- jak souvisí hodnota derivace s růstem funkce
  - $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}>0 \Leftrightarrow$ je funkce rostoucí; $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}<0 \Leftrightarrow$ je funkce klesající;
  - $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=0 \rightarrow$ vodorovná (horizontální) tečna a může (ale nemusí!) být extrém (lokální minimum/maximum).
    - nulová derivace v bodě vždy neznamená lokání extrém např.:

      $$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^3\right)\right|_{x=0}=\left.3x^2\right|_{x=0}=0$$

      a přitom funkce x^3 žádný extrém nemá – viz obr. vpravo.



- souvislosti grafů funkce a její 1. derivace (průsečíky s osou x, extrémy, růst) – viz obr. vpravo, zejména pro polynomiální ($\sum_0^n a_n x^n$) a harmonické (sin, cos) funkce;



- derivování a derivace funkcí s obecnými koeficienty nejen podle nezávisle proměnné *x* (např. $f(x)=ax^2+bx+c$), ale také například podle času *t* (např. $u(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+B\cos(\omega t+\varphi)$).

- derivace složené funkce: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(x(t)\right)=\dfrac{\mathrm{d}\,f(x)}{\mathrm{d}\,x}\dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t}$ např.:
  - $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\mathrm{e}^{-kx}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-kx)}\left(\mathrm{e}^{-kx}\right)\cdot\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(-kx\right)=\mathrm{e}^{-kx}\cdot\left(-k\right)=-k\,\mathrm{e}^{-kx}$;
  - $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left[(ax^2+bx)^2\right]=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(ax^2+bx)}\left[(ax^2+bx)^2\right]\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(ax+b\right)=2(ax^2+bx)\cdot(2ax+b)$;
  - $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A\sin(kt^2)\right)=\underbrace{A\cos(kt^2)}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\mathrm{kt}^2)}A\cos(kt^2)}\cdot\underbrace{2kt}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(kt^2)}$;
  - $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sin^2(\omega t+\varphi)\right)=\underbrace{2\sin(\omega t+\varphi)}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\sin(\omega t+\varphi))}\left[(\sin(\omega t+\varphi))^2\right]}\cdot\underbrace{\cos(\omega t+\varphi)}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\omega t+\varphi)}[(\sin(\omega t+\varphi))]}\cdot\underbrace{\omega}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega t+\varphi)}$;

  pozn: obvykle je z kontextu úlohy zřejmé, že koeficienty jsou například kladné, nebo např. nejsou vzájemně v nějakém speciálním (celočíselném) poměru atd.

- **Implicitní derivování** (považujeme za velmi důležité)
  např.: mějme časovou závislost natočení nějakého členu mechanismu $\varphi(t)$ danou implicitním vztahem:
  $$-b\cos\varphi+h\sin\varphi=\frac{\left(u(t)\right)^2-a^2-b^2-h^2}{2a},$$
  kde *a*, *b*, *h* jsou kladné konstanty a $u(t)$ je neznámá časově proměnná délka například hydraulického válce. Máme určit úhlovou rychlost otáčení daného členu mechanismu $\dot{\varphi}(t)$. Bylo by samozřejmě možné nějakým způsobem nejdříve vyjádřit $\varphi(t)$:
  $$\varphi(t)=\arcsin\frac{\left(u(t)\right)^2-a^2-b^2-h^2}{\pm2a\sqrt{b^2+h^2}}+\operatorname{arctg}\frac{b}{h}$$
  a tento vztah potom zderivovat podle času *t*, ale to může být nepříjemné ať už pro složitosti úprav, nebo např. kvůli „nehezkým" funkcím (inverzní goniometrické, odmocnina, lomená funkce atp.). Snadnější bývá provést implicitní derivování podle proměnné *t*, přičemž pamatujme na to, že φ je neznámá funkce času *t*:
  $$b\dot{\varphi}\sin\varphi+h\dot{\varphi}\cos\varphi=\frac{\cancel{2}\dot{u}(t)u(t)}{\cancel{2}a}$$
  následně již snadno vyjádříme $\dot{\varphi}$:
  $$\dot{\varphi}=\frac{\dot{u}(t)u(t)}{ab\sin\varphi+ah\cos\varphi}$$

6. INTEGROVÁNÍ

- znalost integrálů základních funkcí jako např.:
  $$\text{konstanta},\ t,\ t^2,\ t^3,\ \mathrm{e}^t,\ \sin t,\ \cos t,\ \frac{1}{t},\ \frac{1}{t^2}=t^{-2},\ \int\tfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\operatorname{arctg}t+C,\ \ldots$$
- integrování funkcí s obecnými koeficienty (kromě nezávisle proměnné funkce obsahuje další obecné konstanty („písmenka"), které ovšem nejsou funkcemi nezávisle proměnné).
- určité integrály;
- integrování metodou substituce;
- aplikace substituce i na meze určitého integrálu (šetří čas, postup je přehlednější);

7. Separovatelné diferenciální rovnice 1. řádu

- řešení ODR 1. řádu metodou separace proměnných;
- řešení integrací s aplikací okrajových/počátečních podmínek v mezích určitých integrálů na obou stranách separované ODR, například:
  - $\left.\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-g\right|_{v(t=0)=v_0} \rightarrow \mathrm{d}v=-g\,\mathrm{d}t \rightarrow \int_{v_0}^{v(t)}\mathrm{d}v=-g\int_0^t\mathrm{d}t \rightarrow \underline{\underline{v(t)=v_0-gt}}$;
  - $\left.\cancel{v}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-c_x v^{\cancel{2}}\right|_{v(x=0)=v_0} \rightarrow \dfrac{1}{v}\,\mathrm{d}v=-c_x\,\mathrm{d}x \rightarrow \int_{v_0}^{v(x)}\dfrac{1}{v}\mathrm{d}v=-c_x\int_0^x\mathrm{d}x \rightarrow$

    $\ln\dfrac{v(x)}{v_0}=-c_x x \rightarrow \underline{\underline{v(x)=v_0\,\mathrm{e}^{-c_x x}}}$;

8. Matice, operace s maticemi

- sčítání, odčítání matic: $\mathbf{A}\pm\mathbf{B}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12}\\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22}\end{pmatrix}$;
- násobení skalárem: $c\mathbf{A}=c\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\cdot a_{11} & c\cdot a_{12}\\ c\cdot a_{21} & c\cdot a_{22}\end{pmatrix}$;
- transpozice matice: $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a & c\\ d & b\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a & d\\ c & b\end{pmatrix}$;
- násobení matic: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}$;

  „řádek × sloupec“ → matice **B** musí mít počet sloupců shodný s počtem řádků matice **A** (pokud matice **A** je typu $m\times n$, pak matice **B** musí být typu $k\times m$);
- jednotková matice $\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ (někdy se také označuje **I**); $\mathbf{AE}=\mathbf{A}$;
- inverzní matice $\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{E}$; $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\mathbf{A}$;
- inverze čtvercové matice například Gaussovou eliminací (do řádu 3×3);
- vlastnosti operací s maticemi
  - komutativnost součtu: $\mathbf{A}\pm\mathbf{B}=\mathbf{B}\pm\mathbf{A}$;
  - distributivnost součtu: $a(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})=a\mathbf{A}\pm a\mathbf{B}$
  - součin matic **není** komutativní: $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$
  - distributivnost maticového součinu: $\mathbf{ABC}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$;

    $c\mathbf{AB}=(c\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(c\mathbf{B})$;

    $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$;
  - vlastnosti transpozice: $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$; $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$;
  - determinant matice do řádu 3×3 (Sarrusovo pravidlo – Wikipedie, nebo rozvoj determinantu podle řádku/sloupce);
- ortonormální (ortogonální) matice (např. transformační matice rotace), **pouze** pro tyto platí: $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$;