

Kinematika mechanismů

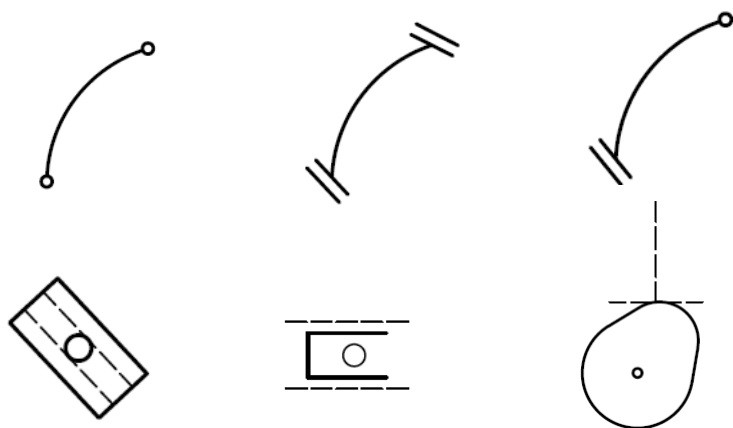
Iva Petříková, doc. Ing. Ph.D.

Základní pojmy

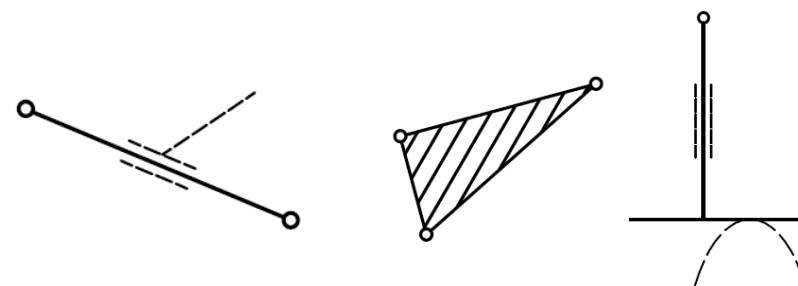
- ▶ Kinematické poměry u navzájem se pohybujících prostorů,
- ▶ Prostory reprezentovány tělesy nebo členy rovinné (prostorové) soustavy těles
- ▶ Binární člen, ternární člen
- ▶ Soustava navzájem pohybujících se členů, z nichž jeden se nepohybuje, tvoří mechanismus
- ▶ Kinematické dvojice (vazby) – dva členy, které se dotýkají (viz tabulka – sn. 4)
- ▶ Kinematická schémata, členy označeny čísly (rám – 1, hnací člen – 2, hnaný člen – 3, 4,...)
- ▶ Hnací člen – pohyb motoru, hydraulického válce, ... dán nezávislou souřadnicí,
- ▶ Hnaný(é) člen(y) – ostatní členy, souřadnice je závislá na souřadnici hnacího členu
- ▶ Počet hnacích dvojic (např. hydraulický válec) udává počet stupňů volnosti mechanismu

Kinematické dvojice

- ▶ binární členy - spojeny se dvěma sousedními členy (obr. 1)
- ▶ ternární členy – spojeny se třemi jinými tělesy (obr. 2)
- ▶ vícenásobné členy (kvaternární, ..)

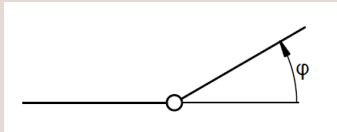

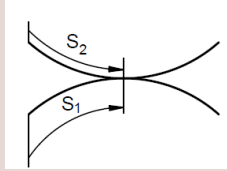
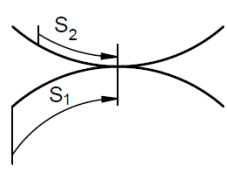


Obr. 1



Obr. 2

Kinematická dvojice - rovinné

Název	Souřadnice	Schéma
rotační	φ	
posuvná	s	
valivá	$s = s_1 = s_2$	
obecná	s_1, s_2	

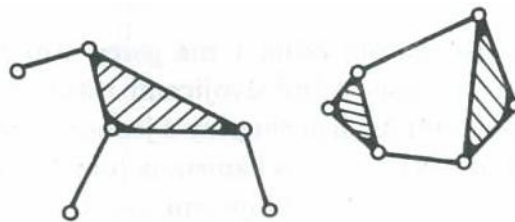
Zdroj: Lederer P.: Kinematika, Vydavatelství ČVUT, 2000

Soustavové skupiny

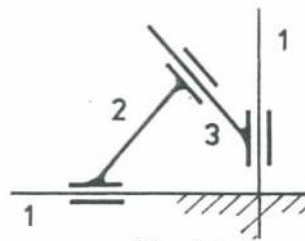
- ▶ Soustavovou skupinu tvoří 2 nebo více těles navzájem spojených kinematickými dvojicemi, existuje 5 binárních skupin s různými kombinacemi rotačních a posuvných kinematických dvojic



- ▶ Soustavové skupiny se třemi tělesy a 6 kinematickými dvojicemi



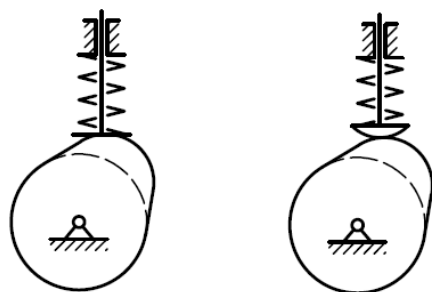
- ▶ Výjimečný případ s konečnou pohyblivostí členů 2 a 3 – soustava těles se 3 kinematickými dvojicemi posuvnými



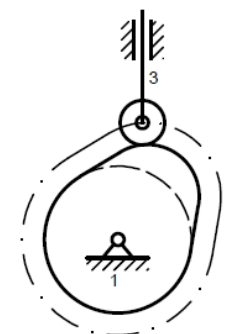
Rovinné mechanismy - příklady

Trojčlenné mechanismy s jedním stupněm volnosti

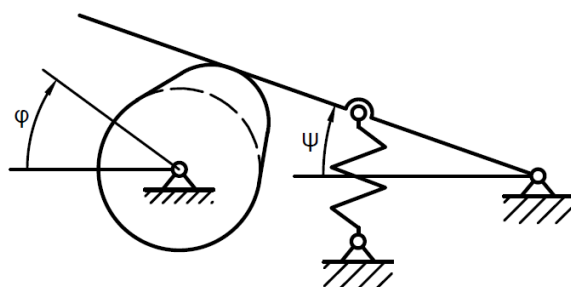
- ▶ obsahují jednu obecnou kinematickou dvojici
- ▶ vačkové mechanismy – hnacím členem (2) je vačka, hnacím členem (3) je zvedák (zvedák s kladkou), resp. vahadlo (vahadlo s kladkou),



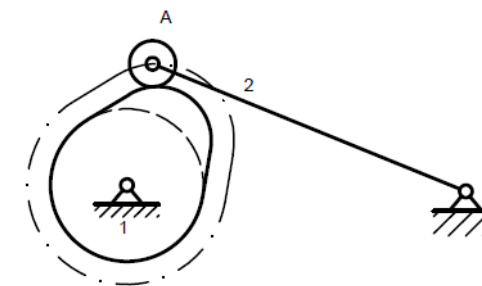
Vačka s plochým zvedákem



Vačka se zvedákem s kladkou



Vačka s plochým vahadlem

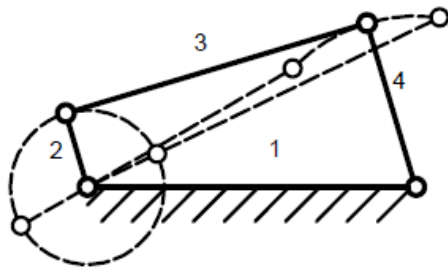


Vačka s vahadlem s kladkou

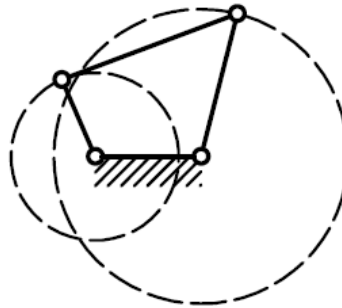
Rovinné mechanismy - příklady

Čtyřčlenné mechanismy s jedním stupněm volnosti

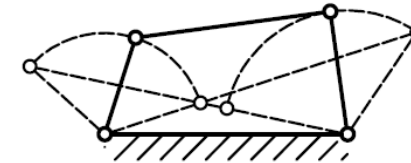
- ▶ Čtyřkloubový mechanismus s rotačními dvojicemi . Hnaný člen se otáčí dokola = klika, hnací člen kýve = vahadlo



Klikovahadlový čtyřkloubový mechanismus



Dvojklikový čtyřkloubový mechanismus

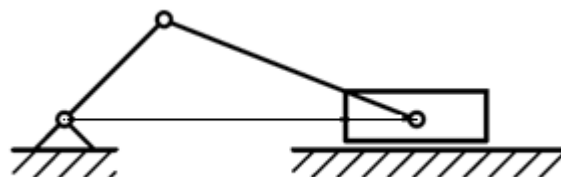


Dvojvahadlový čtyřkloubový mechanismus

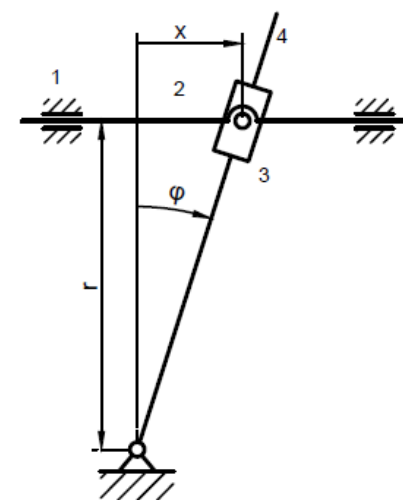
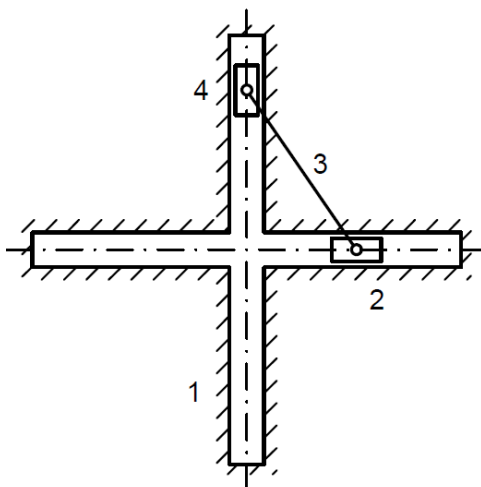
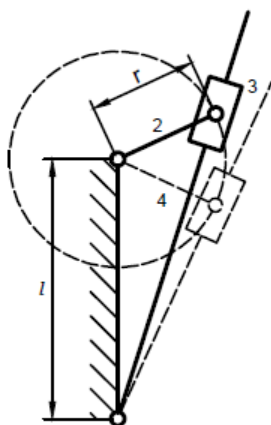
- ▶ [vačkové mechanismy](#)
- ▶ [čtyřčlenné mechanismy](#)

Rovinné mechanismy - příklady

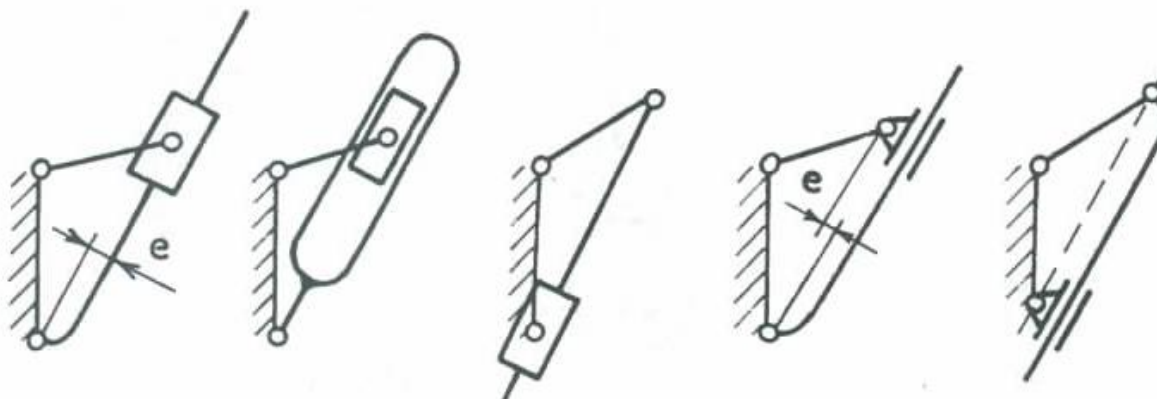
- ▶ Klikový mechanismus – se třemi rotačními kinematickými dvojicemi



- ▶ Kulisový (Whitworthův) mechanismus



Rovinné mechanismy - příklady



Počet stupňů volnosti rovinného mechanismu

- ▶ Počet stupňů volnosti zpravidla vypočteme podle vzorce

$$i = 3(m - 1) - 2(r + p + v) - o$$

- ▶ kde
- ▶ m ... počet členů včetně rámu
- ▶ r ... počet rotačních dvojic (vazeb)
- ▶ p ... počet posuvných dvojic (vazeb)
- ▶ v ... počet valivých dvojic (vazeb)
- ▶ o ... počet obecných dvojic (vazeb)
- ▶ Vzorec platí pro řádné (regulární) případy mechanismů.
- ▶ U některých zvláštních rozměrů členů mechanismů nebo u zvláštní konfigurace těchto členů je pohyblivost mechanismů trvale vyšší nebo vyšší v určitých polohách – tzv. singulární případy.

Analytické vyšetřování mechanismů

Kinematická analýza:

1. Vyšetření pohybu tělesa nebo bodu je vyšetření závislosti geometrických veličin na poloze hnacích členů a na čase (rovnice pohybu tělesa a trajektorie vybraných bodů)
2. výpočet rychlostí (derivací rovnic polohy)
3. výpočet zrychlení (derivací rovnic pro výpočet rychlosti)

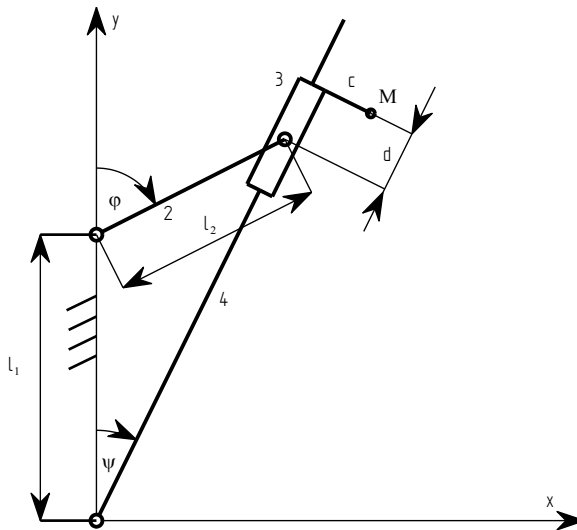
Metody výpočtu:

- ▶ Geometrická metoda
- ▶ Vektorová metoda
- ▶ Maticová metoda

Geometrická (trigonometrická) metoda

- ▶ Geometrické závislosti jsou dány řešením obrazce daného kinematickým schématem mechanismu.
- ▶ Obvykle obrazce rozdělíme na vhodné trojúhelníky, v nichž figurují hledané i dané délkové a úhlové veličiny (strany a úhly), ty řešíme trigonometricky.
- ▶ Metoda je intuitivní.

Příklad:



$$u \sin \psi = l_2 \sin \varphi$$

$$u \cos \psi = l_2 \cos \varphi + l_1$$

Převodové funkce

- ▶ Charakterizují geometrické vlastnosti mechanismu s 1 stupněm volnosti

- ▶ Dáno: $x(t)$, resp. $\varphi(t)$

- ▶ Zdvihová závislost: $y = f(x)$ $\psi = f(\varphi)$

- ▶ Rychlost (úhlová rychlost)

- ▶
$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{kde} \quad \mu = \frac{d\psi}{d\varphi} \quad \text{a} \quad \dot{\psi} = \mu\dot{\varphi}$$

- ▶ μ ... 1. převodová funkce (nezávislá na čase)

- ▶ Zrychlení (úhlové zrychlení)

- ▶
$$\ddot{\psi} = \frac{d\dot{\psi}}{dt} = \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{d\varphi} \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \text{kde} \quad \nu = \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} \quad \text{a} \quad \ddot{\psi} = \nu\dot{\varphi}^2 + \mu\ddot{\varphi}$$

- ▶ ν ... 2. převodová funkce

Vektorová metoda

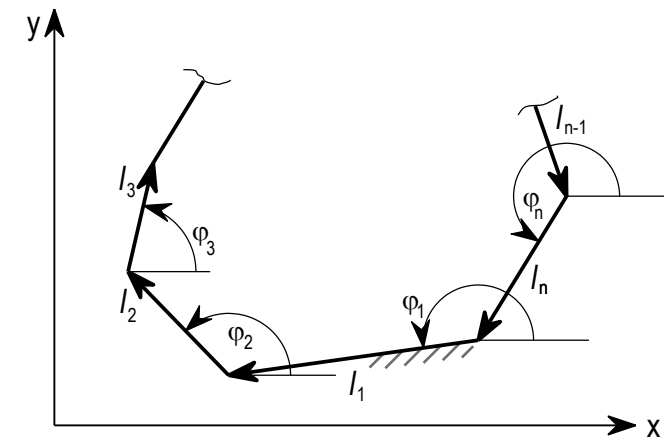
- ▶ Udává obecný návod, jak získat rovnice polohy
- ▶ Některé mechanismy tvoří uzavřené smyčky, tj. přecházíme od 1. členu mechanismu na další až se dostaneme opět na 1. člen.
- ▶ Vektorová metoda přiřazuje každé smyčce vektorový mnohoúhelník (viz obr. 3).
- ▶ Strany mnohoúhelníka jsou vektory \vec{V}_i .
- ▶ Smysl volíme tak, aby se vektory sledovaly, úhly měříme od osy x proti směru otáčení hodinových ručiček.
- ▶ Vektorovou uzavřenost popíšeme vektorovou rovnicí

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \dots + \vec{V}_i + \dots + \vec{V}_{n-1} + \vec{V}_n = \vec{0}$$

- ▶ Po rozepsání do dvou skalárních rovnic

$$\sum_{i=1}^n l_i \cos \varphi_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^n l_i \sin \varphi_i = 0,$$

- ▶ kde l_i jsou délky členů mechanismu –
– délky vektorů V_i



Obr. 3

Vektorová metoda

- ▶ Derivováním rovnic dostaneme

$$\sum_{i=1}^n (\dot{l}_i \cos \varphi_i - l_i \dot{\varphi}_i \sin \varphi_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n (\dot{l}_i \sin \varphi_i + l_i \dot{\varphi}_i \cos \varphi_i) = 0.$$

- ▶ Další derivací dostaneme rovnice zrychlení

$$\sum_{i=1}^n (\ddot{l}_i \cos \varphi_i - 2\dot{l}_i \dot{\varphi}_i \sin \varphi_i - l_i \dot{\varphi}_i^2 \cos \varphi_i - l_i \ddot{\varphi}_i \sin \varphi_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n (\ddot{l}_i \sin \varphi_i + 2\dot{l}_i \dot{\varphi}_i \cos \varphi_i - l_i \dot{\varphi}_i^2 \sin \varphi_i + l_i \ddot{\varphi}_i \cos \varphi_i) = 0.$$

- ▶ Pro výpočet pohybu obecného bodu mechanismu vyjdeme ze známých souřadnic a úhlů u mechanismu a nalezneme souřadnice obecného bodu L v souřadnicovém systému xy (obr. 4)

$$\vec{r}_L = \vec{V}_0 + \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \dots + \vec{V}_i + \dots + \vec{V}_{n-1} + \vec{V}_n + \vec{\xi} + \vec{\eta}$$

- ▶ kde \vec{V}_0 je vektor určující polohu mnohoúhelníka v souřadnicovém systému,
 $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ jsou polohové vektory bodu ležící v prostoru tělesa.

Vektorová metoda

Rozepsáním dostaneme parametrické rovnice trajektorie bodu L:

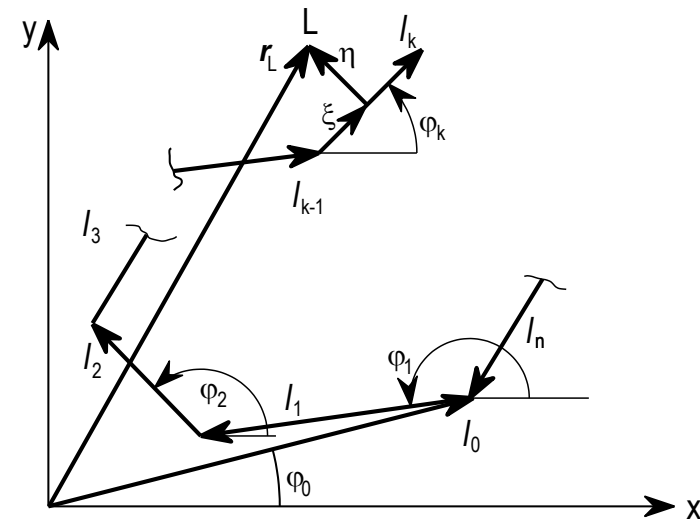
$$x_L = l_0 \cos \varphi_0 + l_1 \cos \varphi_1 + \dots + l_{k-1} \cos \varphi_{k-1} + \xi \cos \varphi_k - \eta \sin \varphi_k$$

$$y_L = l_0 \sin \varphi_0 + l_1 \sin \varphi_1 + \dots + l_{k-1} \sin \varphi_{k-1} + \xi \sin \varphi_k + \eta \cos \varphi_k$$

Rychlost a zrychlení jsou určeny vztahy

$$\vec{v}_L = \dot{x}_L \vec{i} + \dot{y}_L \vec{j}$$

$$\vec{a}_L = \ddot{x}_L \vec{i} + \ddot{y}_L \vec{j}$$



Obr. 4