

Kinematika mechanismů

Mechanismy s konstantním převodem

Iva Petříková, prof. Ing. Ph.D.

Základní pojmy

- ▶ Mechanismy s ozubenými koly
- ▶ Mechanismy s ohebnými členy
- ▶ Vyšetřujeme: převod, (úhlové) rychlosti, (úhlová) zrychlení, přemístění výstupních členů
- ▶ Definice převodu (viz také přednáška Kinematika mechanismů I)

$$\psi = f(\varphi)$$

$$\dot{\psi} = p\dot{\varphi} \quad p = \frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}}$$

- ▶ Mechanismus s 1 stupněm volnosti (rám – 1, rotující hnací člen – 2, rotující hnaný člen – s)
- ▶ Kinematické veličiny hnacího členu – $\varphi_{21}, \omega_{21}, \alpha_{21}$
- ▶ Kinematické veličiny hnaného členu s – $\varphi_{s1}, \omega_{s1}, \alpha_{s1}$
- ▶ Pro značení veličin, jako jsou úhel, úhlová rychlost a úhlové zrychlení, je možné v indexu uvádět pouze první číslici (2, 3 ...), protože se jedná o absolutní velikost vzhledem rámu (1).

Mechanismy s ozubenými koly

- ▶ Rovinné mechanismy – čelní kola, transformace rotačního pohybu mezi rovnoběžnými (souosými) hřídeli
- ▶ Sférické mechanismy – kuželová kola, transformace mezi různoběžnými hřídeli
- ▶ Prostorové mechanismy – hypoidní kola, šroubová kola, transformace rotačních pohybů mezi mimoběžnými hřídeli

- ▶ Podle teorie ozubených kol se při záběru dvou ozubených kol po sobě valí dvě roztečné kružnice.

- ▶ Počet stupňů volnosti u ozubených kol: 1 nebo 2 (diferenciály)
- ▶ Typy mechanismů:
 1. **předlohové** – absolutní pohyby všech členů
 2. **planetové** – členy s obecným rovinným (sférickým) pohybem

Předlohové mechanismy

Soukolí s čelními ozubenými koly

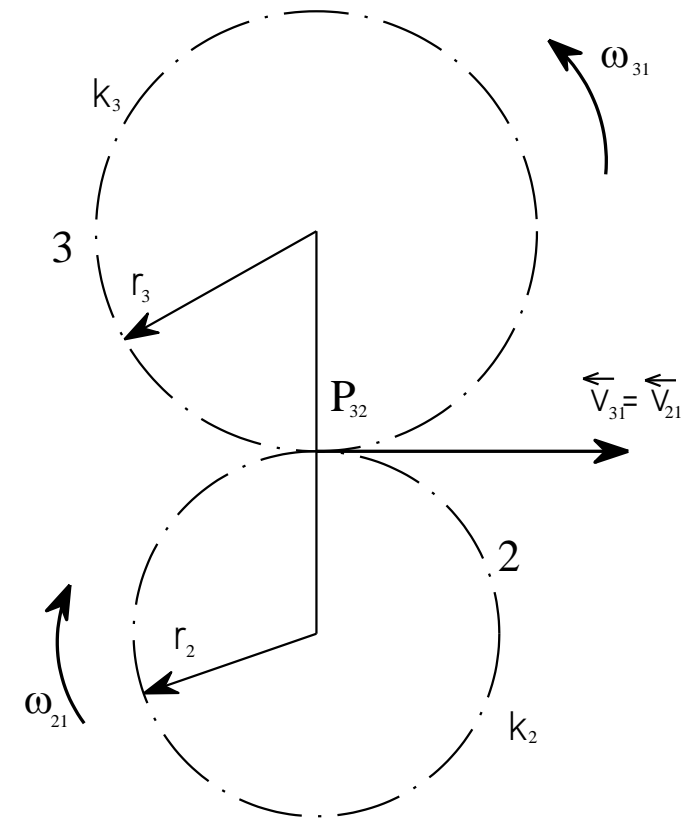
- ▶ Dány: poloměry roztečných kružnic, úhlová rychlost hnacího kola ω_{21} , můžeme značit ω_2
- ▶ Určete: úhlovou rychlost hnaného kola ω_{31} (ω_3)
- ▶
- ▶ Podmínka valení: pól P_{32} leží v průsečíku spojnice středů otáčení – bod dotyku kružnic
- ▶ Protože se jedná o současné pohyby, platí $31=32+21$

- ▶ Rychlost v pólu P_{32} vyjadřuje podmínka valení,
- ▶ P_{32} : $\vec{v}_{31} = \vec{0} + \vec{v}_{21}$, přičemž rychlost v pólu $\vec{v}_{32} = \vec{0}$
- ▶ Podmínka platí i skalárně: $r_3 \omega_{31} = r_2 \omega_{21}$
- ▶ Z rovnice vyjde úhlová rychlost kola 3

$$\omega_3 = \frac{r_2}{r_3} \omega_2$$

- ▶ a převod

$$p_{23} = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_3}$$



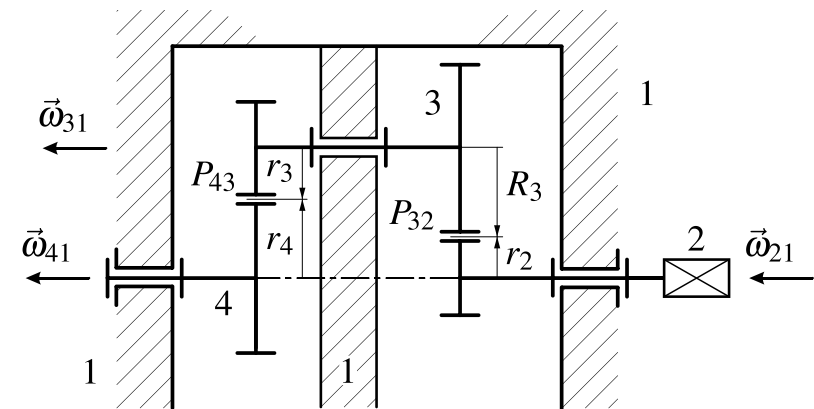
Předlohové mechanismy

Vícečlenná předlohová soustava s čelními ozubenými koly (převodovka)

- ▶ Dány: poloměry roztečných kružnic r_2, r_3, r_4 , úhlová rychlost hnacího kola ω_{21}
- ▶ Určete: úhlovou rychlost hnaného kola ω_3, ω_4 a převod P_{24}
- ▶ Mezi hnací člen 2 a hnaný 4 je vložen předlohový hřídel 3
- ▶ se dvěma ozubenými koly. Hřídele 2 a 4 jsou souosé,
- ▶ platí $r_2 + R_3 = r_3 + r_4$, z rovnice vypočítáme R_3
- ▶ Smysly hledaných úhlových rychlostí předpokládáme stejné
- ▶ Označíme póly relativních obecných pohybů (místa styku ozubených kol)
- ▶ Rychlost v pólu P_{32} vyjadřuje podmínka valení
- ▶ P_{32} : $v_3 = v_2$ resp. $-R_3\omega_3 = r_2\omega_2$
- ▶ Znaménka jsou opačná (jedná se vnější záběr), úhlové rychlosti mají opačný smysl
- ▶ Rychlost v pólu P_{34} : $v_4 = v_3$ resp. $r_4\omega_4 = -r_3\omega_3$
- ▶ Výsledné neznáme úhlové rychlosti jsou:

$$\omega_3 = -\frac{r_2}{R_3} \omega_2$$

$$\omega_4 = \frac{r_2 r_3}{R_3 r_4} \omega_2$$



Předlohové mechanismy

- ▶ Kladná hodnota výsledku úhlové rychlosti určuje stejný smysl jako byl zvolen, záporná hodnota úhlové rychlosti určuje opačný smysl úhlové rychlosti oproti zvolenému
- ▶ Z rovnice (1) vyplyne převod

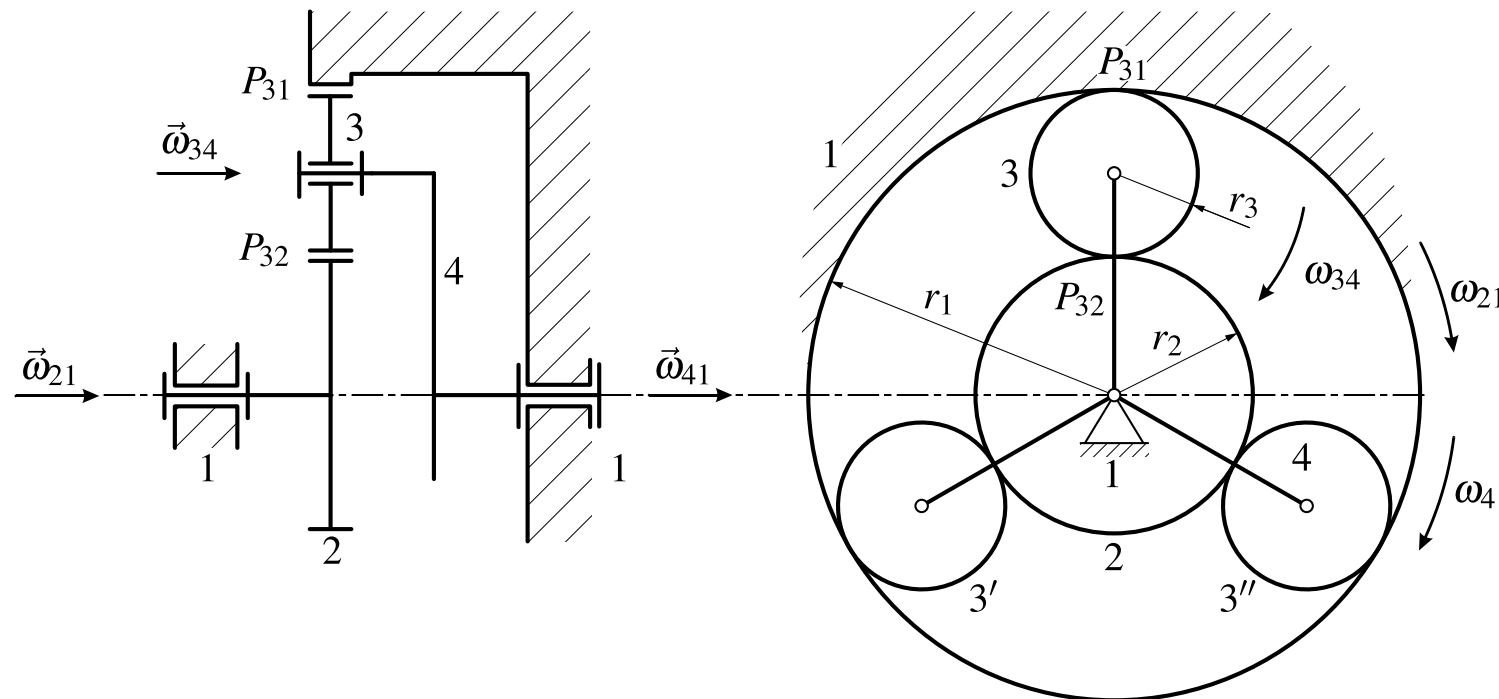
$$p_{24} = \frac{\omega_{41}}{\omega_{21}} = \frac{r_2 r_3}{R_3 r_4}$$
- ▶ Rozdělení převodovek:
 1. převod do pomala $p < 1$
 2. převod do rychla $p > 1$
- ▶ U nejběžnějších evolventních ozubení je roztečná kružnice totožná s valivou, a proto můžeme vyjádřit převod i pomocí počtu zubů ozubených kol.

Planetové mechanismy

- ▶ Planetová soustava:
 - hnací člen: kolo 2
 - hnaný člen: 4 (oba členy se otáčejí okolo stejné přímky (osy převodovky) vzhledem k základnímu rámu
- ▶ Pohyb od hnacího ke hnanému členu předávají kola rotačně uložená na otáčejícím se tělese 4, zabírající s hnacím kolem 2 a se stojícím kolem s vnitřním ozubením.
- ▶ Popis planetového soukolí
 - 2, 1... centrální kola, 1 označováno jako korunové kolo
 - 3, 3', 3'' ... satelity (planety, oběžná kola)
 - 4 ... unašeč
- ▶ Rozdíl mezi předlohovými soukolím a planetovým je v pohybu satelitů, které se vůči rámu pohybují obecným rovinným pohybem složeným ze dvou současných pohybů rotačních $31 = 34 + 41$.
- ▶ Použití tří satelitů využívá lépe prostoru převodovky, kinematické poměry jsou stejné jako při použití pouze jednoho satelitu.

Planetové mechanismy

- ▶ Dány: poloměry roztečných kružnic r_1, r_2 , úhlová rychlost hnacího kola ω_2
- ▶ Určete: úhlovou rychlost unašeče a hnaného kola ω_4, ω_3 a převod p_{24}



<https://www.youtube.com/watch?v=ECIjAo1q1RQ>

<https://www.youtube.com/watch?v=JBB1sC7LCuQ>

<https://www.youtube.com/watch?v=ARd-Om2VyiE>

Planetové mechanismy

Rychlostní poměry na planetovém soukolí, satelit koná obecný rovinný pohyb (ORP):

- ▶ V pólu pohybu \mathbf{P}_{32} : $v_2 = r_2 \omega_2$
- ▶ Ve středu satelitu A, na ose o_{34} : $v_A = (r_2 + r_3) \omega_4$
- ▶ Rychlost satelitu v \mathbf{P}_{32} je snížena o rychlost rotace kolem jeho středu A: $r_3 \omega_3$
- ▶ Rychlosti satelitu 3 a hnacího kola 2 jsou v pólu \mathbf{P}_{32} shodné.
- ▶ Platí rovnice: $r_2 \omega_2 = (r_2 + r_3) \omega_4 - r_3 \omega_3$ (1)

- ▶ Na korunovém kole v \mathbf{P}_{31} : $\vec{v}_1 = \vec{0}$
Pohybující se unašeč má ve středu satelitu (bod A) má rychlost

$$v_A = (r_2 + r_3) \omega_4 = (r_1 - r_3) \omega_4$$

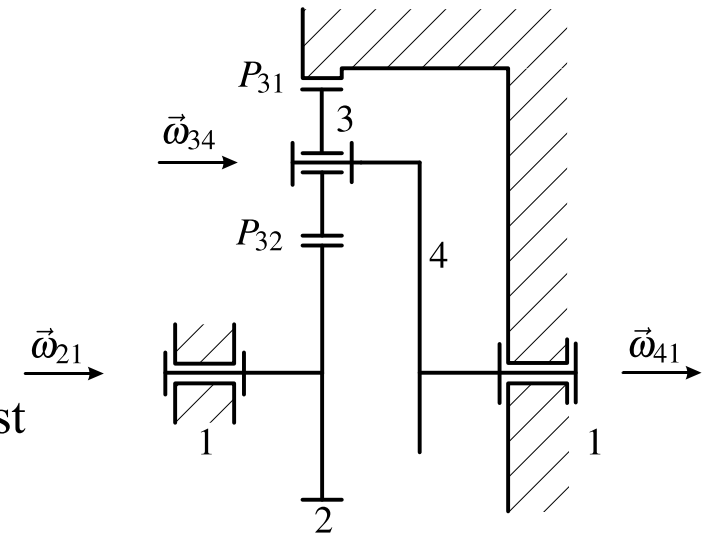
- ▶ V pólu \mathbf{P}_{31} : $0 = (r_1 - r_3) \omega_4 + r_3 \omega_3$ (2)

- ▶ Z rovnic (1) a (2) vypočítáme ω_3, ω_4
- ▶ Sečtením rovnic (1) a (2) vypočítáme

$$\omega_4 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \omega_2$$

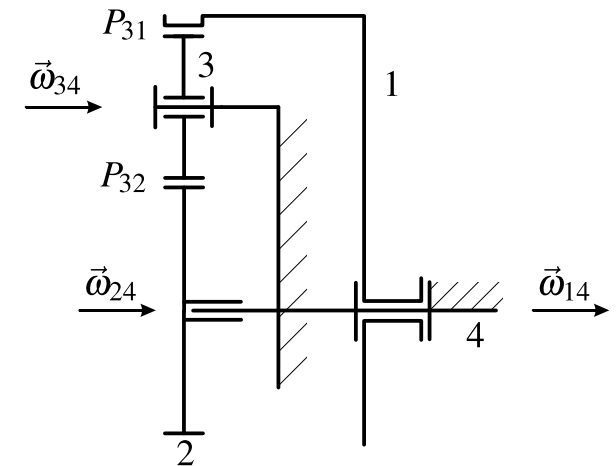
- ▶ Úhlová rychlost rotace satelitu se vypočte z rovnice (2)

$$\omega_3 = -\frac{r_1 - r_3}{r_3} \frac{r_2}{r_1 + r_2} \omega_2$$



Planetové mechanismy (další metody výpočtu)

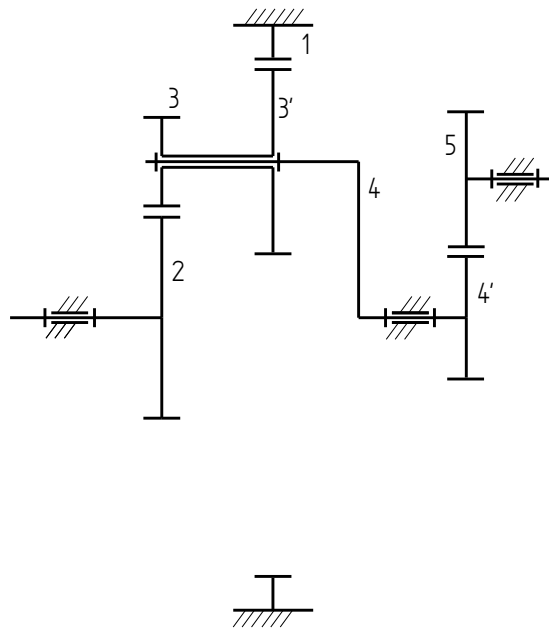
- ▶ Metoda záměny rámu (Willisova metoda)
- ▶ Nepohyblivý člen = unašeč 4 (Obr.1)
- ▶ Uvolníme člen 1, všechny členy 1, 2, 3 se pohybují vzhledem ke 4
- ▶ Změněná soustava je předlohová
- ▶ Podmínky valení:
- ▶ P_{32} : $\omega_{24}r_2 = -\omega_{34}r_3$
- ▶ P_{31} : $\omega_{14}r_1 = \omega_{34}r_3$
- ▶ Po sečtení $\omega_{24}r_2 + \omega_{14}r_1 = 0$; $\omega_{14} = -\omega_{41}$
- ▶ Podle rozkladu $21=24+41$ je $\omega_{21} = \omega_{24} + \omega_{41}$
- ▶ Po dosazení dostaneme $\omega_{21}r_2 - \omega_{41}r_2 - \omega_{41}r_1 = 0$
- ▶ Odtud dostáváme převod $p_{24} = \frac{\omega_{41}}{\omega_{21}} = \frac{r_2}{r_1 + r_2}$



Obr. 1

Příklad řešení planetového soukolí

- Určete úhlové rychlosti ω_{51} , ω_{34} , je-li dáno: $z_1, z_2, z_3, z_3', z_4', z_5, \omega_{21}$.



Řešení: Metoda záměny rámu

Rám $\equiv 4$; 1 uvolnit

Převod $\mu_{25} = \mu_{24} \cdot \mu_{45}$

Převod μ_{24} :

$$\text{Zastavíme unašeč, uvolníme rám} \Rightarrow \mu_{21} = \frac{\omega_{14}}{\omega_{24}} = \frac{-\omega_{41}}{\omega_{21} - \omega_{41}}; \mu_{21} = \mu_{23} \mu_{34} = \frac{z_2}{z_3} \cdot \frac{z_3'}{z_1} (-1)^1$$

Obě rovnice porovnáme a určíme μ_{24}

$$\frac{-\omega_{41}}{\omega_{21} - \omega_{41}} = \frac{-z_2 z_3'}{z_3 z_1}, \mu_{24} = \frac{\omega_{41}}{\omega_{21}} = \frac{z_2 z_3'}{z_2 z_3 + z_3 z_1} \quad (I)$$

$$\mu_{45} = \frac{\omega_{51}}{\omega_{41}} = \frac{z_4'}{z_5} (-1)^1;$$

$$\text{Úhlová rychlost } \omega_{51} \text{ je dána vztahem } \omega_{51} = \mu_{25} \omega_{21} = -\frac{z_2 z_3' z_4'}{(z_2 z_3' + z_3 z_1) z_5}$$

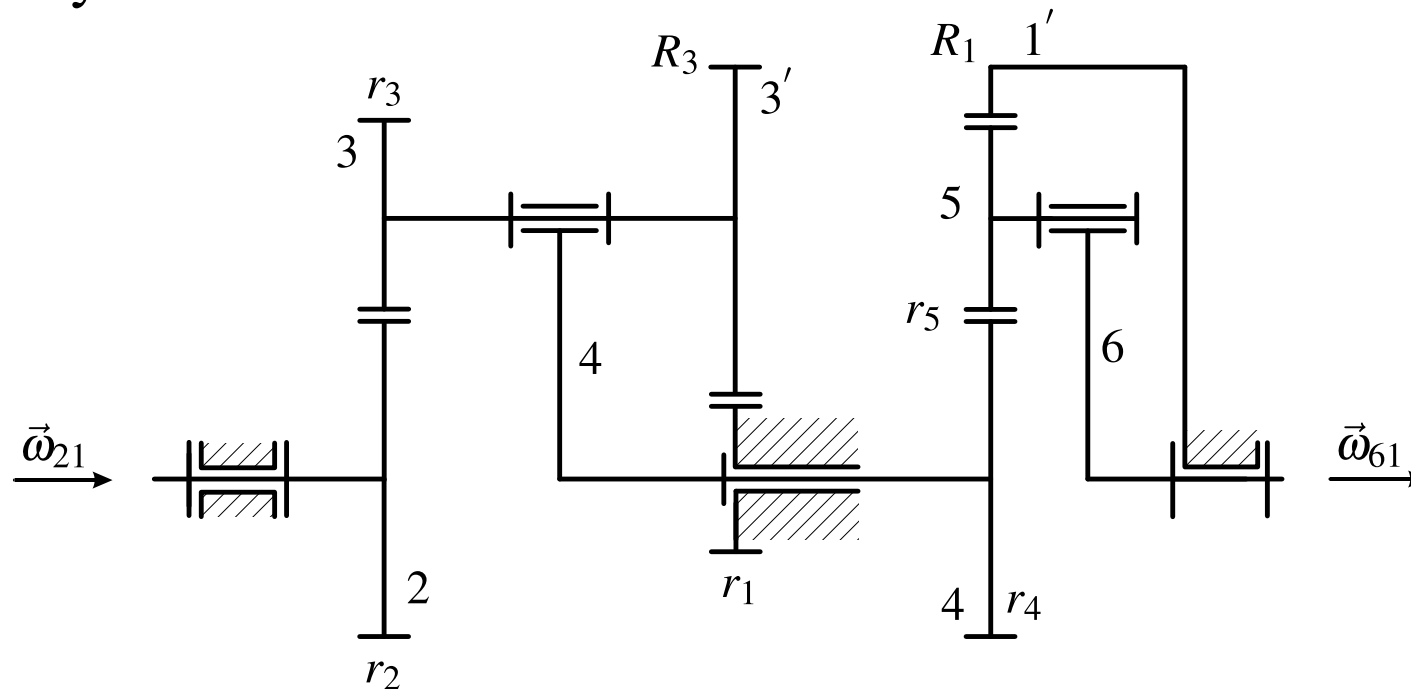
Pro výpočet ω_{34} využijeme poznatku, že se při současných pohybech úhlové rychlosti sčítají algebraicky

$$\omega_{31} = \omega_{34} + \omega_{41}, \text{ odtud } \omega_{34} = \omega_{31} - \omega_{41}.$$

$$\text{Za } \omega_{41} \text{ dosadíme z rovnice (I), } \omega_{31} = -\omega_{21} \frac{z_2}{z_3}.$$

Složený planetový mechanismus, kombinované převodovky

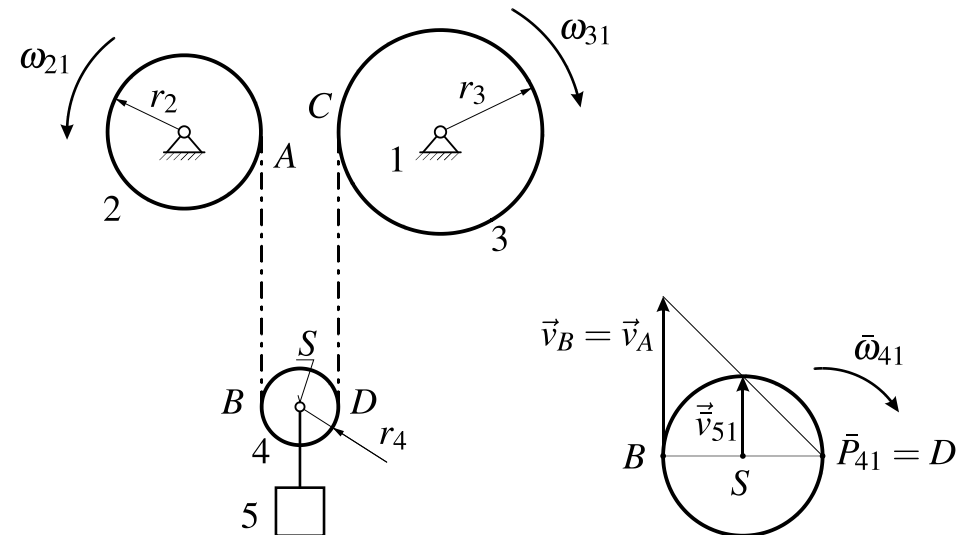
- Příklad: U daného planetového mechanismu určete úhlovou rychlost ω_6 , je-li dáno: $r_1, R_1, r_2, r_3, R_3, r_4, r_5, \omega_2$. Výslednou úhlovou rychlost ω_6 vyjádřete v závislosti na hnací úhlové rychlosti ω_2 a poloměrech roztečných kružnic.



Mechanismy s ohebnými členy

- ▶ Ohebné členy – lana, řemeny, řetězy,
- ▶ Zdvihací zařízení na obr. 3 má dva stupně volnosti
- ▶ Hnací bubny se otáčejí úhlovými rychlostmi ω_2, ω_3 a zvedají břemeno 5 zavěšené na kladce 4
- ▶ Rychlost břemena v_5 vypočteme z předpokladu zastavení bubnu 3, bod D je pak pólem P_{41}
- ▶ Všechny body lana AB se pohybují stejnou rychlostí za předpokladu, že je dokonale nepružné:

$$\bar{v}_5 = \bar{v}_S = \frac{v_B}{2} = \frac{v_A}{2} = \frac{r_2 \omega_2}{2}$$



- ▶ Při stojícím bubnu 2 a analogických předpokladech je:

$$\bar{v}_5 = \bar{v}_S = \frac{v_D}{2} = \frac{r_3 \omega_3}{2}$$

- ▶ Rychlost břemene $v_5 = \bar{v}_5 + \bar{v}_5 = \frac{r_2 \omega_2 + r_3 \omega_3}{2}$

- ▶ Úhlová rychlost ORP kladky 4

$$\omega_4 = \frac{\omega_2 r_2 - \omega_3 r_3}{2r_4}$$

Mechanismy s valivými kinematickými dvojicemi

▶ Příklad: 3 valivé kinematické dvojice

▶ Dáno: r_2, r_4, R_4 a rychlost bodu S v_S

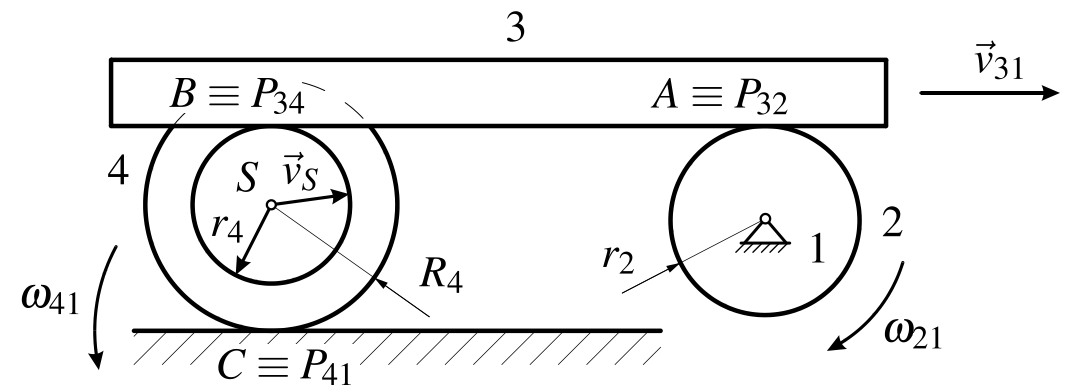
▶ Určit: ω_2, ω_4, v_3

▶ Podmínky valení:

▶ $A=P_{32}$: $v_3 = r_2 \omega_2$

▶ $B=P_{34}$: $v_3 = (r_4 + R_4) \omega_4$

$$v_S = R_4 \omega_4$$



$$\omega_4 = \frac{v_S}{R_4} \quad v_3 = \frac{r_4 + R_4}{R_4} v_S \quad \omega_2 = \frac{r_4 + R_4}{r_2 R_4} v_S$$