TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Nové možnosti rozvoje vzdělávání na Technické univerzitě v Liberci

Specifický cíl A2: Rozvoj v oblasti distanční výuky, online výuky a blended learning

NPO_TUL_MSMT-16598/2022

Plánování průmyslových experimentů

doc. Ing. Vladimír Bajzík, Ph.D.

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU

Národní plán obnovy

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

FAKULTA TEXTILNÍ TUL

Plánování průmyslových experimentů

Vladimír Bajzík

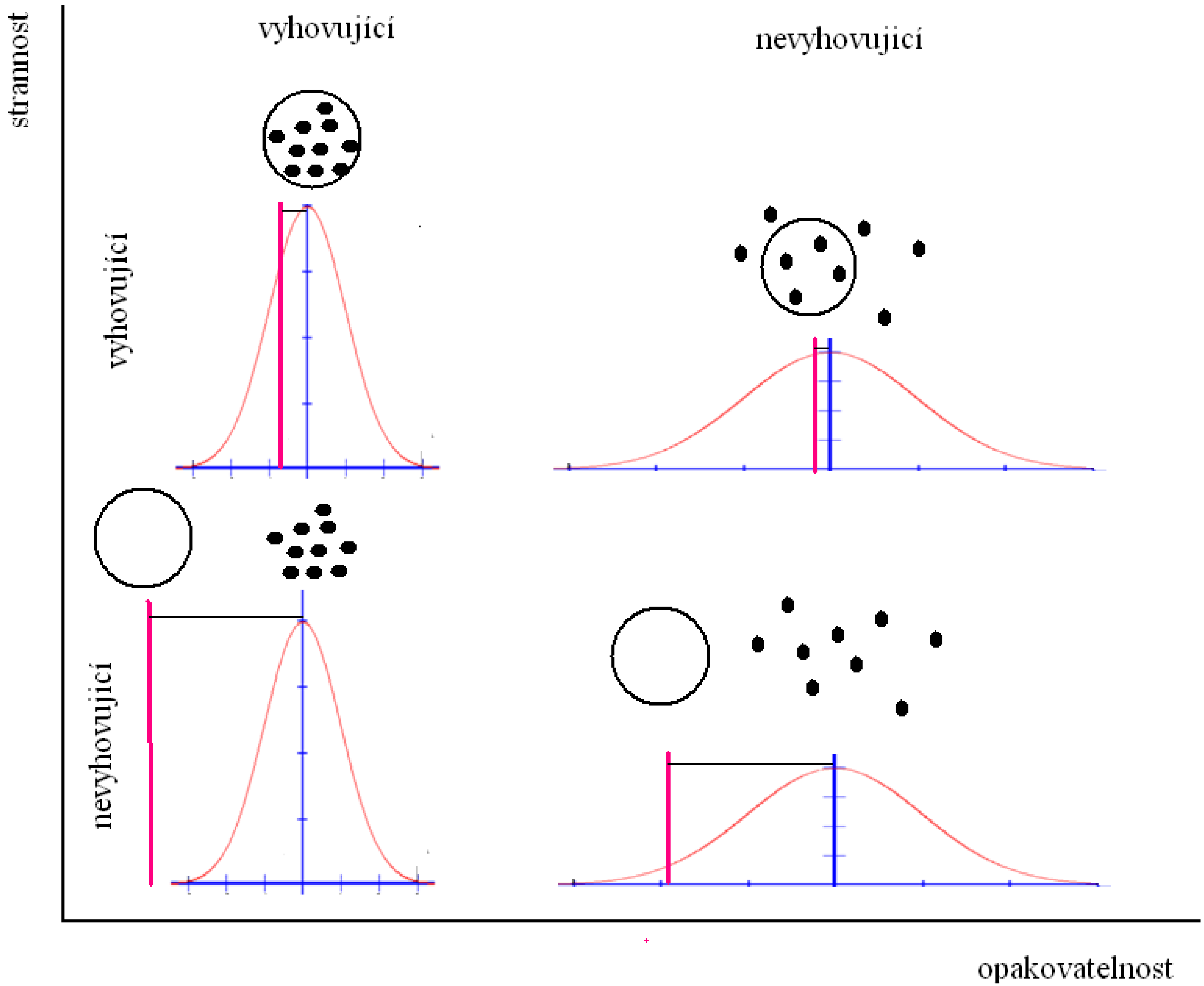
Historie řízení jakosti I

- Statistická přejímka (1910)
- Ekonomické řízení kvality vyráběných produktů
- Navrhování experimentů - DOE (1930)
- Statistické řízení kvality (1940)
- Management by objectives (1950)
- Nulové vady (1960)
- Participative problem solving, SPC, kruh kvality (1970)
- Celkové řízení kvality - TQM (1980)

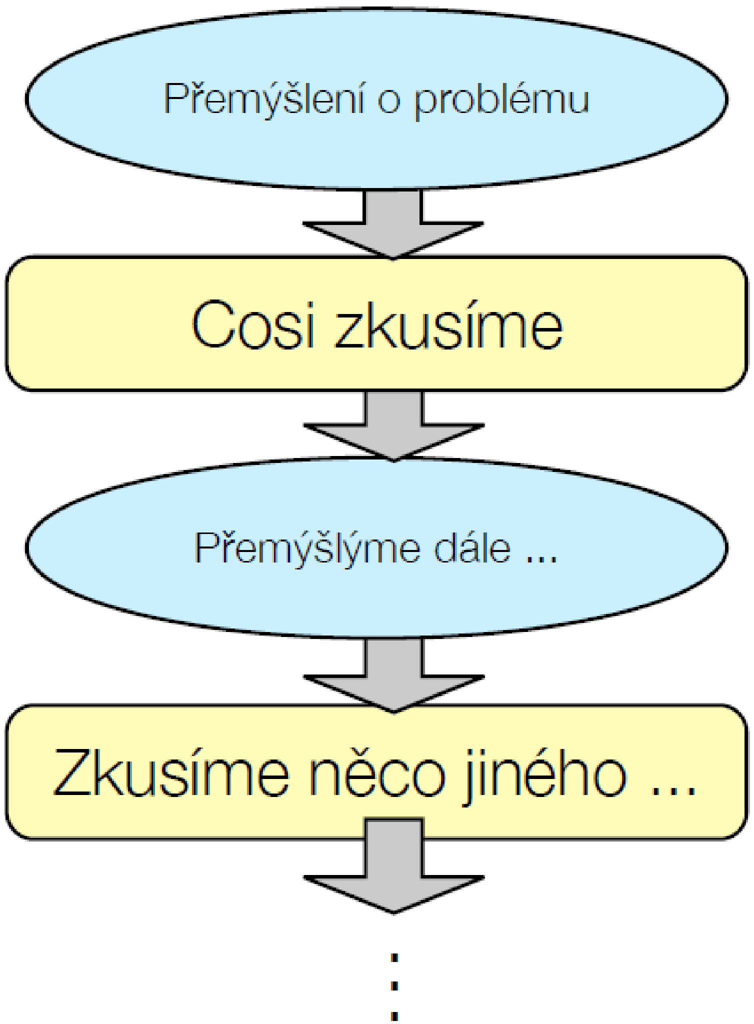
Historie řízení jakosti II

- Klasický přístup - R. A. Fisher (20. léta 20. století)
  - Návrh experimentů (DOE) je založen na
    - statistických metodách
    - studiu společných efektů několika proměnných vlivů
    - určením kombinace hodnot faktorů pro optimální výsledek
- Taguchiho přístup (40. léta 20. století)
  - standardizoval a zjednodušil použití technik DOE
  - navrhl koncept zlepšování kvality ve všech fázích návrhu a výroby
- K významnému rozšíření metody DOE v USA a Evropě došlo až v 80. letech 20. století

Historie řízení jakosti III



Historie řízení jakosti IV

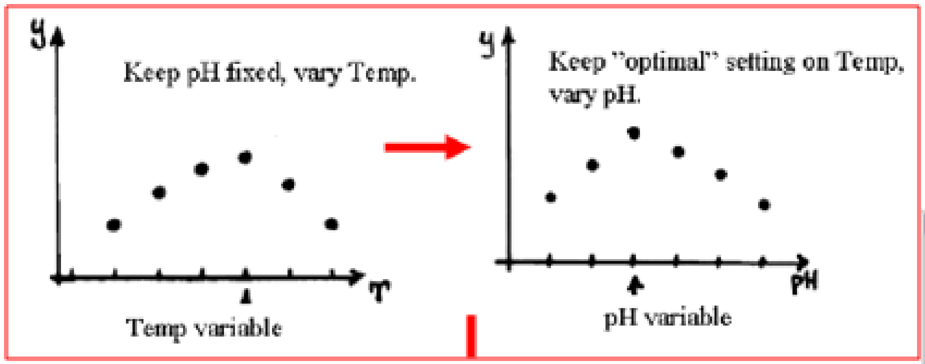


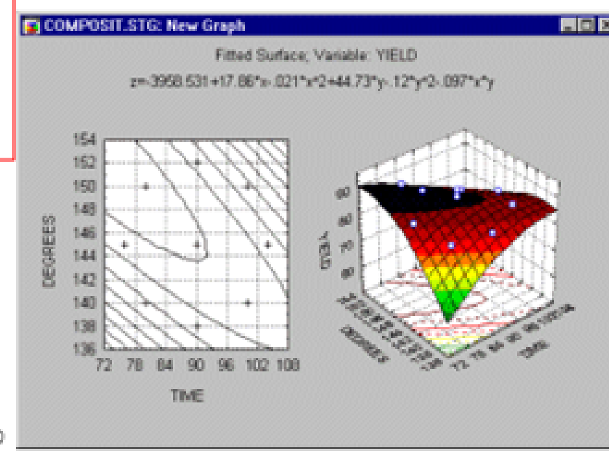
Typický "starý" přístup k řešení problému:

- funguje v jednotlivých případech a jen s několika málo lidmi
- často čekáme velmi dlouho na výsledek
- vyžaduje zkušenost a intuici
- lze jej využít pouze v omezeném okruhu aplikací

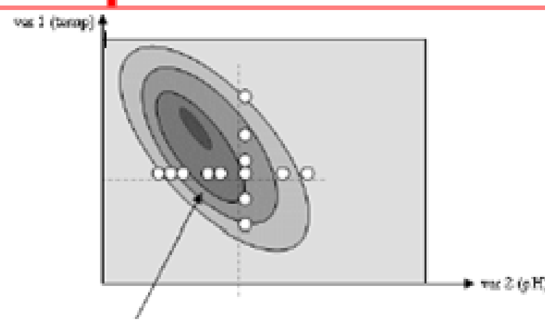
Historie řízení jakosti V

Postupné hledání optima ve směrech faktorů



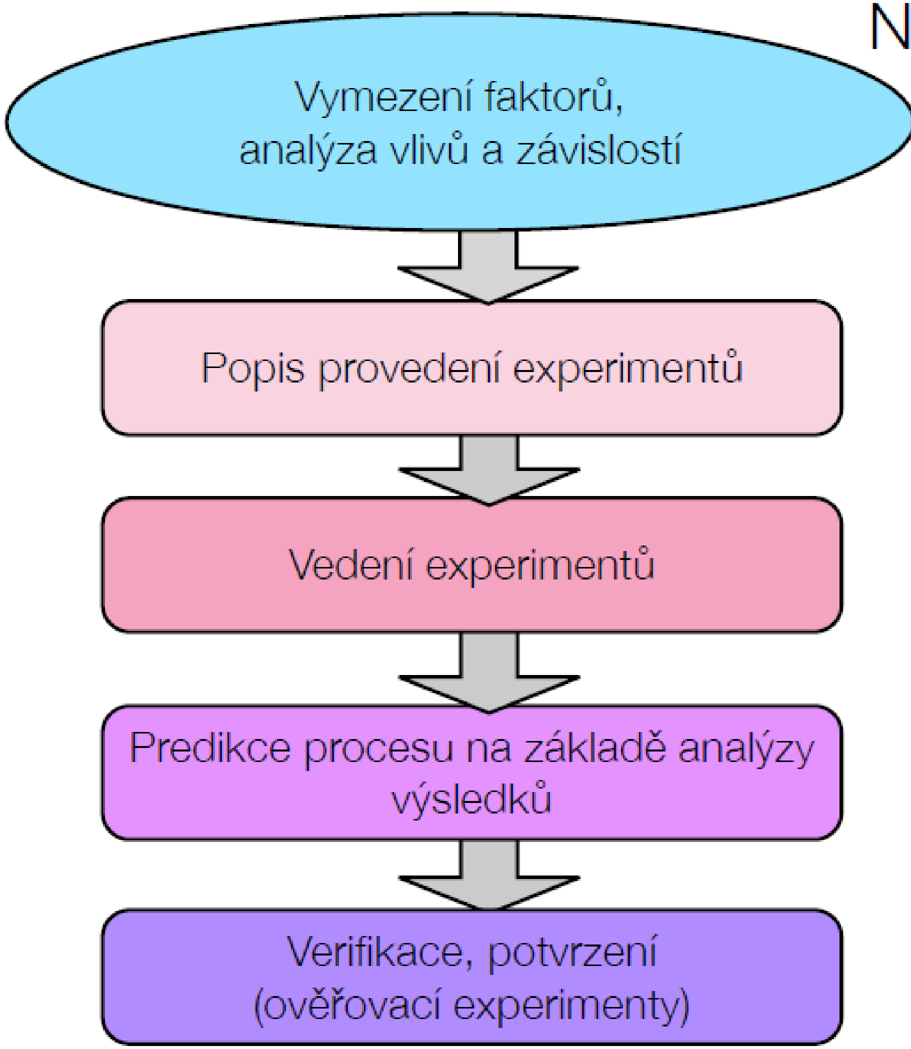


- Simultánní hledání op



- Vhodně zvolený plánovaný experiment umožní oddělit efekty (vlivy faktorů , resp. jejich interakcí od náhodného vlivu (šumu)).

Historie řízení jakosti VI



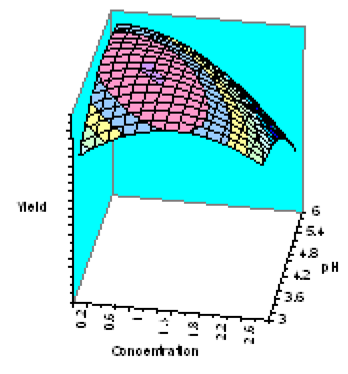
Nový "systematický" přístup k řešení problému:

- týmová práce a společné rozhodování
- vyžaduje být aktivní a objektivně plánovat experimenty
- prvním krokem je vždy plán experimentu
- experimenty jsou prováděny v náhodném pořadí
- zahrnuje předvídání a ověřování očekávaných výsledků před provedením experimentu
- důraz na optimalitu

Úvod do plánování experimentů I

-

DOE pro a proti

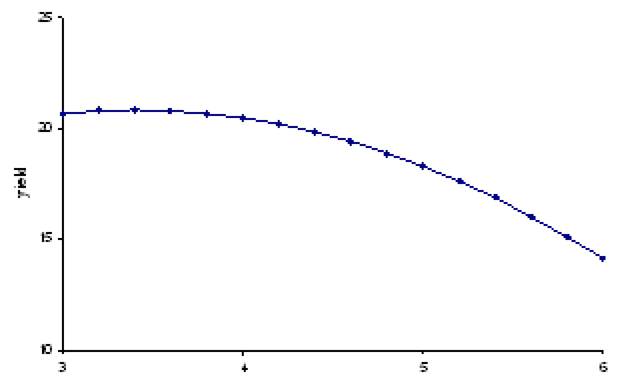


Výhody

- minimální náklady na experiment
- snadné výpočty (ručně)
- automatizovaný výběr modelů

Nevýhody

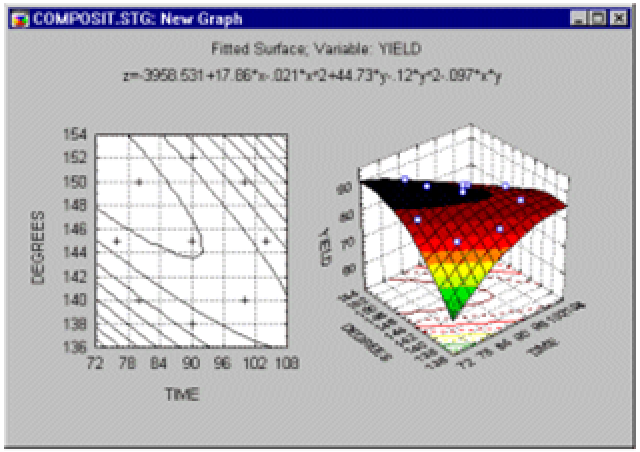
- Pro každý model je jiný optimální plán
- Datově závislé modely
- Není zajištěna robustnost ani predikční vlastnosti



Úvod do plánování experimentů II

- Oblasti použití

- <u>Plánovaný experiment (PE)</u>
- je nástrojem, který vede k efektivnímu zlepšení kvality a produktivity
- použití: při vývoji:
  - a) nových výrobků
  - b) zlepšování kvality stávajících výrobků
  - c) optimalizace výrobního procesu
- správné použití PE může vést:
  - a) ke zjednodušení výroby
  - b) k vyšší spolehlivosti
  - c) ke zvýšení zpracovatelnosti
  - d) ke zlepšení při hledání a odstraňování nedostatků



Úvod do plánování experimentů III

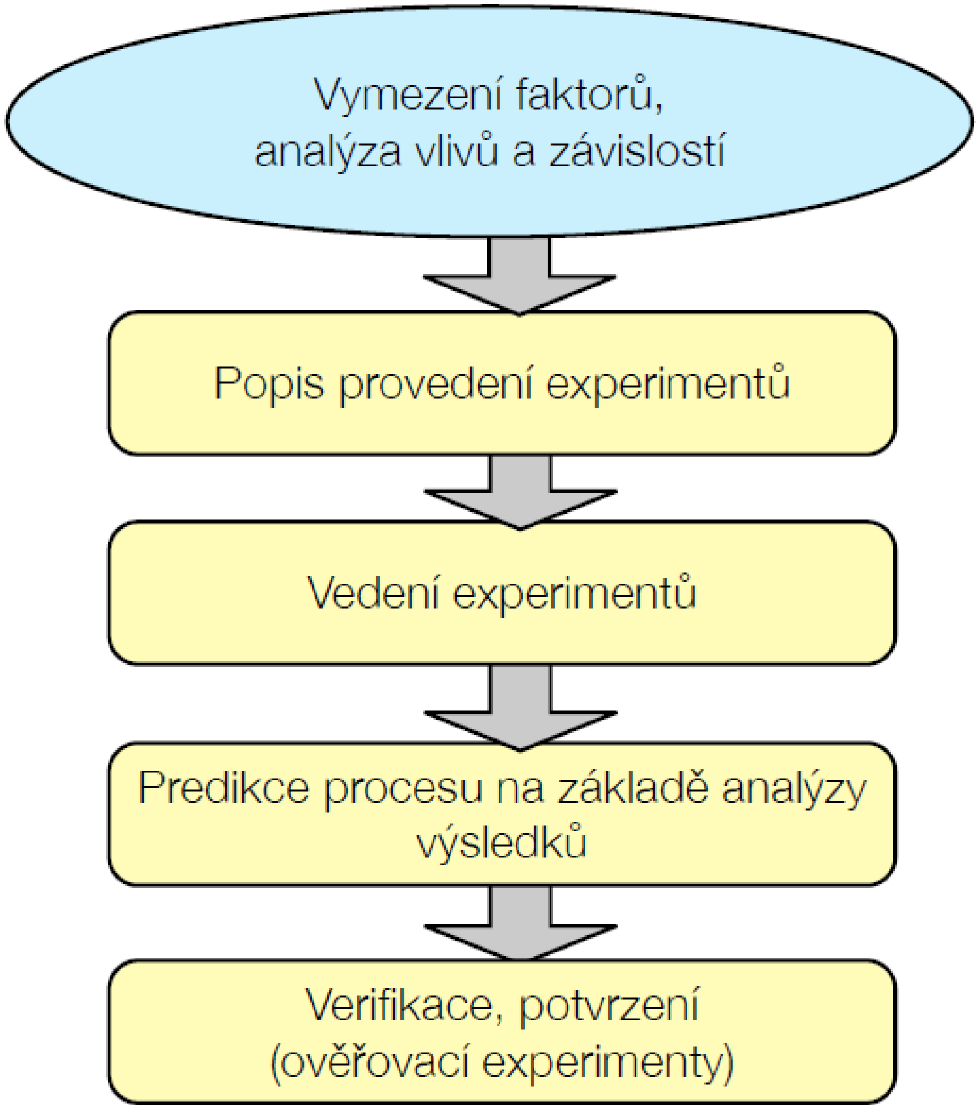
- Jak to funguje?

PE je soubor měření, ve kterých jsou provedeny účelové změny na vstupních proměnných (nezávisle proměnné) a jsou sledovány odpovídající změny u výstupní proměnné (závisle proměnná).

- Úkoly:

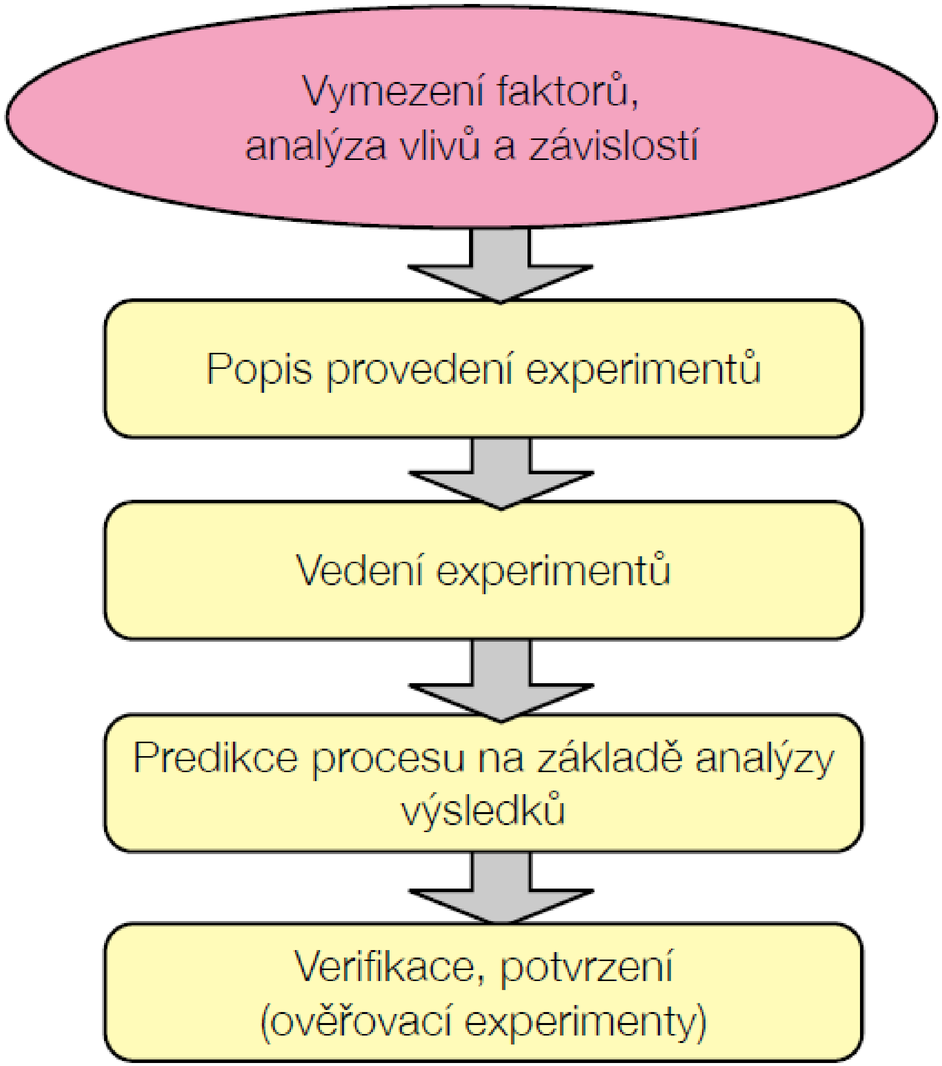
1) určit, které proměnné Xi, mají největší vliv na Y.
2) jak nastavit Xi , aby Y bylo co nejblíže své nominální hodnotě
3) jak nastavit Xi, tak aby variabilita Y byla co nejmenší
4) jak nastavi Xi, tak aby vliv šumových Zj byl minimalizován

Úvod do plánování experimentů I



- **A**nalýza procesu
- **N**ávrh experimentu
- **P**rovedení zkoušek
- **A**nalýza výsledků
- **Z**ávěry

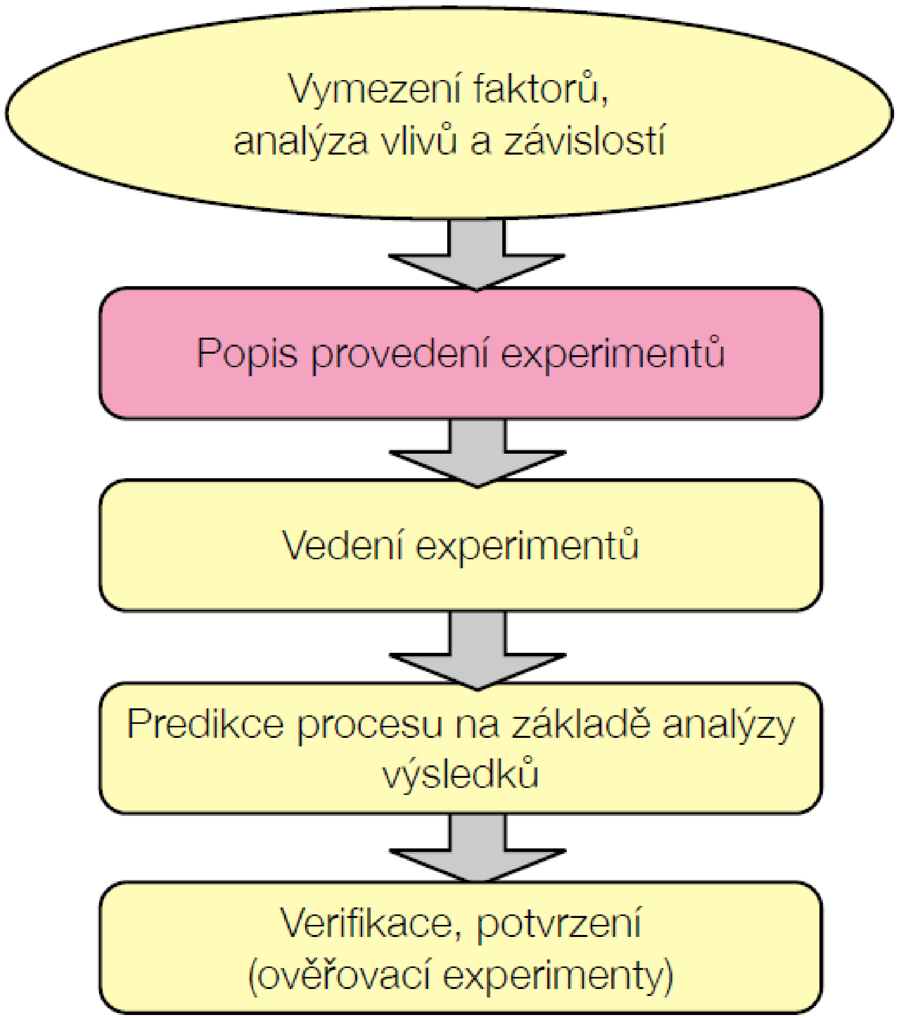
Úvod do plánování experimentů II



- **A**nalýza procesu

1) volba odezvy
   (spojitá, diskrétní)
2) vymezení faktorů (nenáhodné, blokové, náhodné
3) stanovení (měřitelných) úrovní faktorů
4) naplánování experimentu

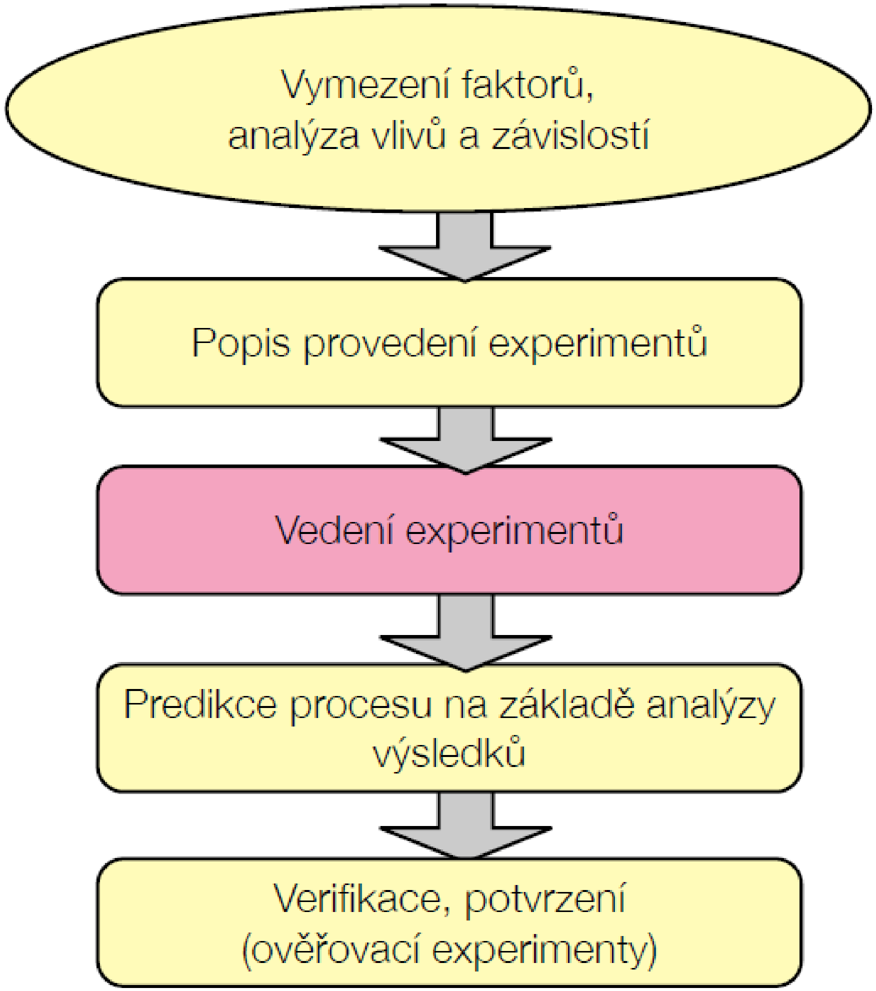
Úvod do plánování experimentů III



- **N**ávrh experimentu
  (Plánování experimentu)

1) zvážení časové a ekonomické náročnosti
2) norma ČSN ISO 35343 Navrhování experimentů (1993)
3) návrh randomizace

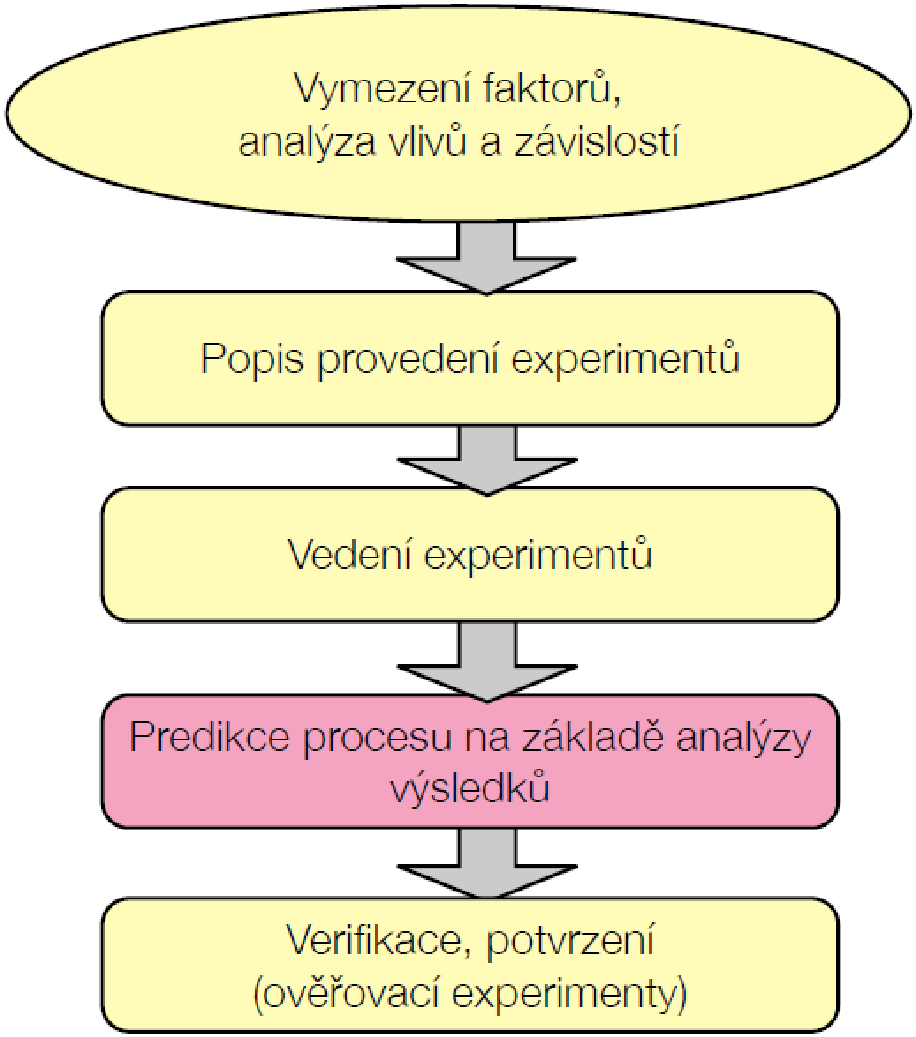
Úvod do plánování experimentů IV



- **P**rovedení zkoušek

1) měření ve stanoveném pořadí (náhodném)
2) měření v blocích
3) výsledky zaznamenáváme (software)

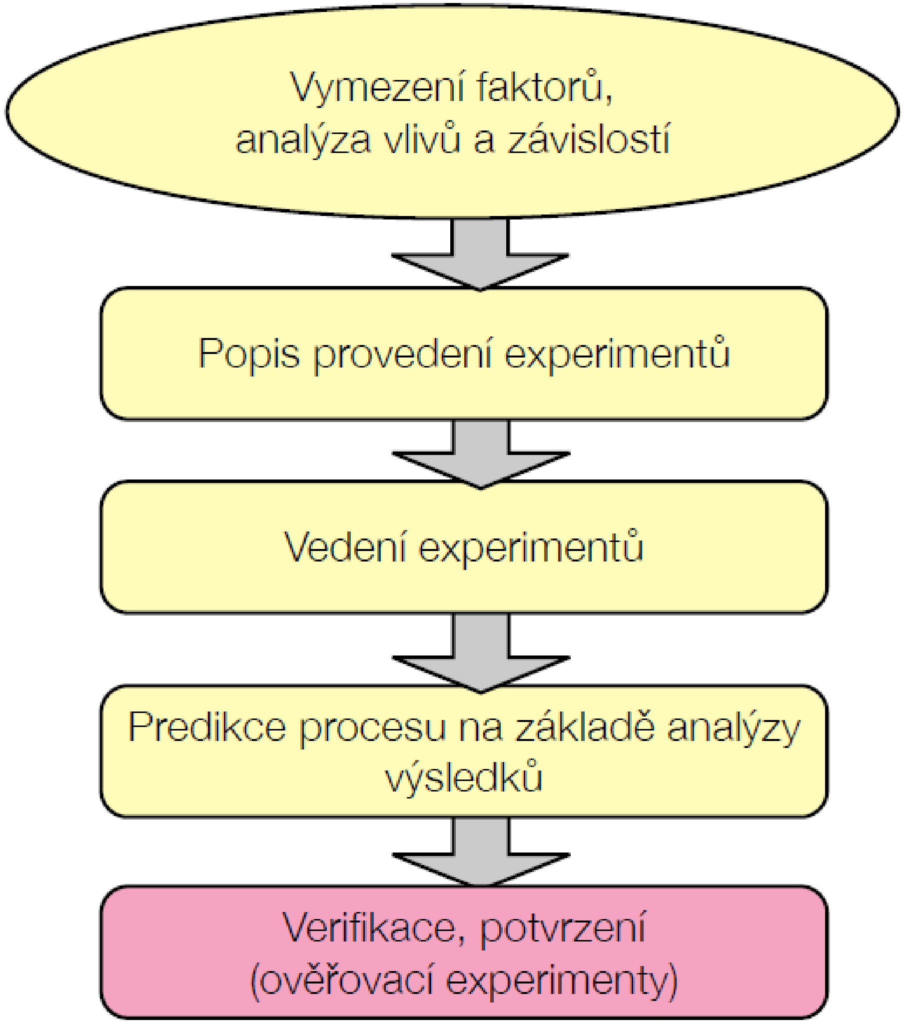
Úvod do plánování experimentů V



- **A**nalýza výsledků

1) vyhodnocení vlivů faktorů a jejich interakcí
2) využití matematicko-statistických metod
3) optimalizační metody

Úvod do plánování experimentů VI



- **Z**ávěry

1) stanovení statisticky významných faktorů a jejich interakcí
2) vymezení úrovní faktorů které vedou k optimální odezvě
3) vymezení irelevantních faktorů

Některé základní pojmy

Proces :

soubor vzájemně souvisejících nebo vzájemně působících činností, které přeměňují vstupy na výstupy (ČSN EN ISO 9000:2005)

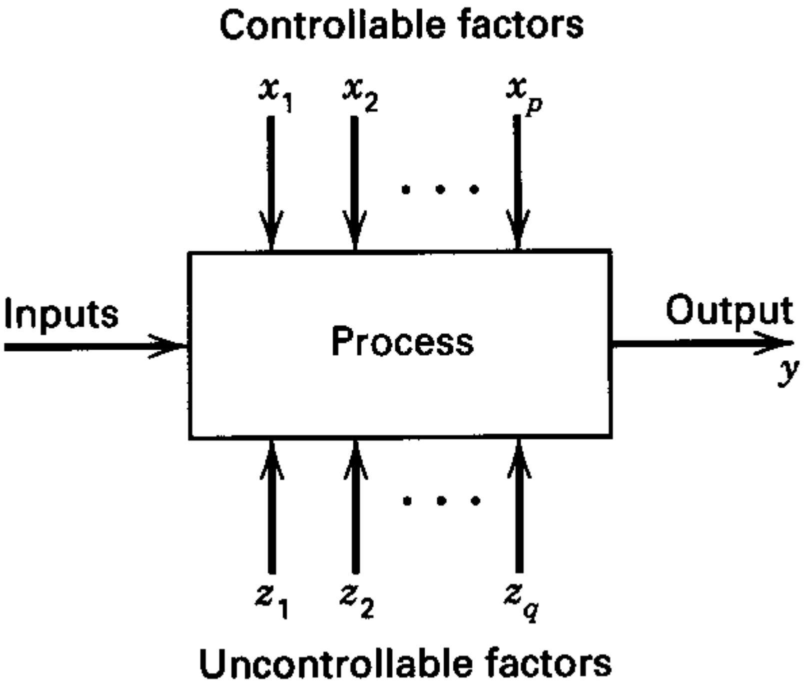


Figure 1-1 General model of a process or system.

Některé základní pojmy II

- **Experiment je test nebo série testů (pokusů), provedená za účelem zvýšení kvality produktu nebo procesu, případně zvýšení jejich efektivity.**
  - stanovení charakteristik procesu a jeho optimalizace
  - vyhodnocení vlastností materiálů
  - návrh a vývoj produktů
  - stanovení tolerance komponent a vstupních veličin

Všechny experimenty jsou navržené experimenty, některé dobře, jiné špatně

- **Návrh experimentu**
  - zkracuje dobu pro návrh a vývoj nových produktů
  - zlepšuje fungování stávajících procesů
  - zvyšuje spolehlivost a zlepšuje kvalitu výrobků
  - zvyšuje robustnost výrobků a procesů
  - umožňuje vyhodnocení různých variant, výběr komponent, nastavení parametrů a systémových tolerancí

Některé základní pojmy III

- **Odezva** - výstupní veličina
  - měřitelná, zpravidla spojitá
- **Náhodný vliv** - neznáme jeho příčiny, nelze jej odstranit,
  - způsobuje variabilitu, kterou lze měřit (experimentální chyba)
  - lze jej předvídat, snaha je co nejvíce jej snížit
- **Systematický vliv** - je způsoben známými vlivy (vymezitelnými příčinami)
  - projevuje se například trendem, periodicitou, posunutím
  - snažíme se jej popsat a kvantifikovat jej
- **Faktory** - vstupní veličiny
  - kvalitativní (kategoriální), kvantitativní (diskrétní, spojité)
  - hlavní, vedlejší, blokové
- **Interakce** - současné působení několika (alespoň dvou) faktorů

Některé základní pojmy IV

- **Replikace** - opakování zkoušek za (přibližně) stejných podmínek (úrovní faktorů)
  - umožňuje měřit náhodnou variabilitu a oddělit ji od variability celkové
- **Znáhodnění** - stanovení pořadí zkoušek podle náhodného "zamíchání"
  - do jisté míry může eliminovat vedlejší vlivy
  - zajišťuje vyšší míru "nezávislosti" jednotlivých pokusů
- **Uspořádání do bloků** - slouží ke snižování náhodné variability (variability náhodné složky)
  - v rámci bloku probíhají zkoušky za přibližně stejných experimentálních podmínek (ale při různých kombinacích úrovní faktorů)
  - často představuje jednu repliku experimentu

Příklady 1-I

- **Výběr nejlepšího dodavatele příze**
  - 4 dodavatelé, různá kvalita (pevnost)
  - chceme vybrat toho nejlepšího
  - od každého změříme 10 vzorků (= 10 replikací)
- **Vliv teploty na výtěžek chemického procesu**
  - zvolíme 3 úrovně teploty (z intervalu určeného technologickým postupem)
  - při každé teplotě měříme výtěžnost (odezvu)
  - vstupní surovina se dodává v dávkách, jedna dávka stačí na 3 zkoušky

blok 1 (1. dávka)	blok 2 (2. dávka)	blok 3 (3. dávka)	blok 4 (4. dávka)
T1	T3	T2	T1
T3	T1	T3	T2
T2	T2	T1	T3

Příklady 1-II

- **Zlepšení vlastnosti slitiny**

  - vliv mědi a hořčíku na slitinu pro výrobu pístů motoru

  - zkoumáme vliv faktorů ve dvou úrovních (3,5% a 4,5% pro Cu, 1,2% a 1,8% pro Mg)

  - každou kombinaci úrovní faktorů měříme třikrát

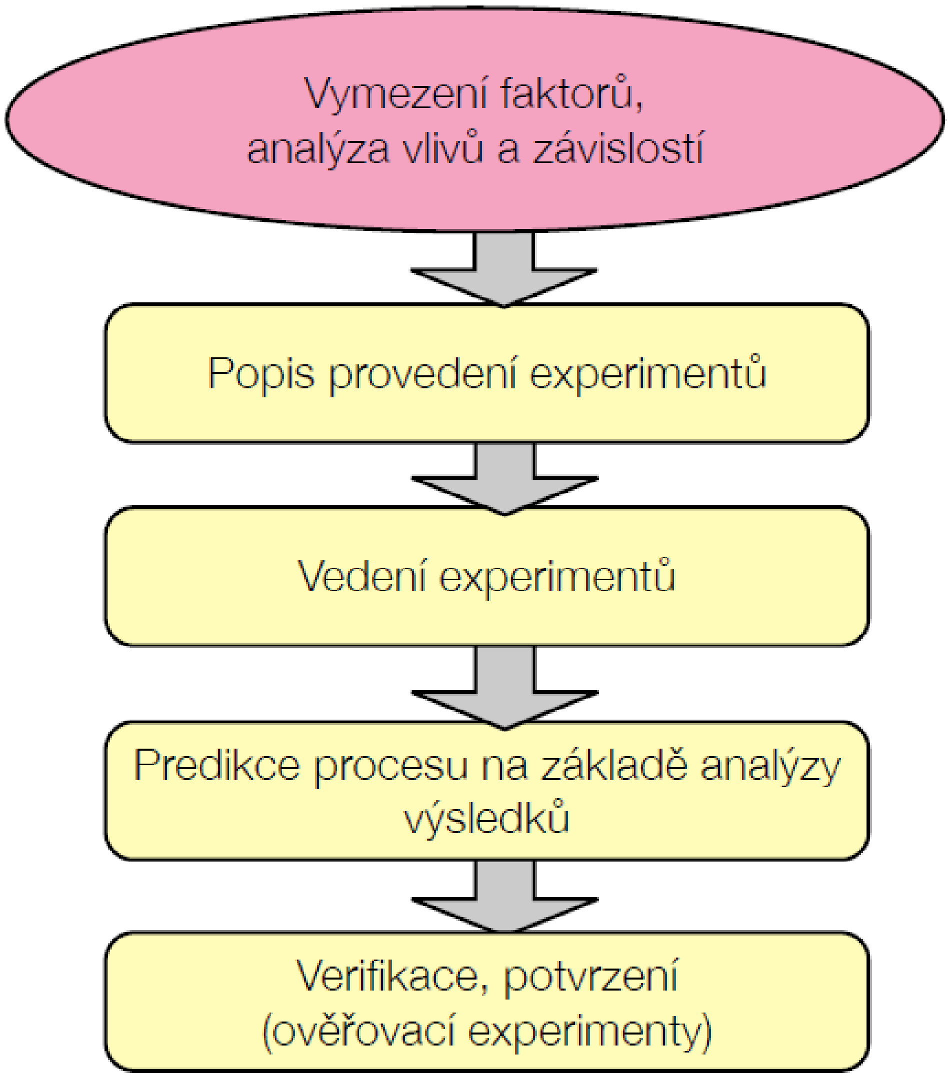
- **Spotřeba paliva automobilů**

  - benzín od 3 dodavatelů

  - 2 různá aditiva

  - 3 auta

Plánování experimentů



- **A**nalýza procesu
- **N**ávrh experimentu
- **P**rovedení zkoušek
- **A**nalýza výsledků
- **Z**ávěry

Plánování experimentů – analýza procesu

Vymezení faktorů,
analýza vlivů a závislostí

- **A**nalýza procesu

- **Definice procesu**

- **Volba odezvy**

- **Analýza vlivu jednotlivých faktorů**

- **Výběr hlavních faktorů, volba jejich měřitelných úrovní**

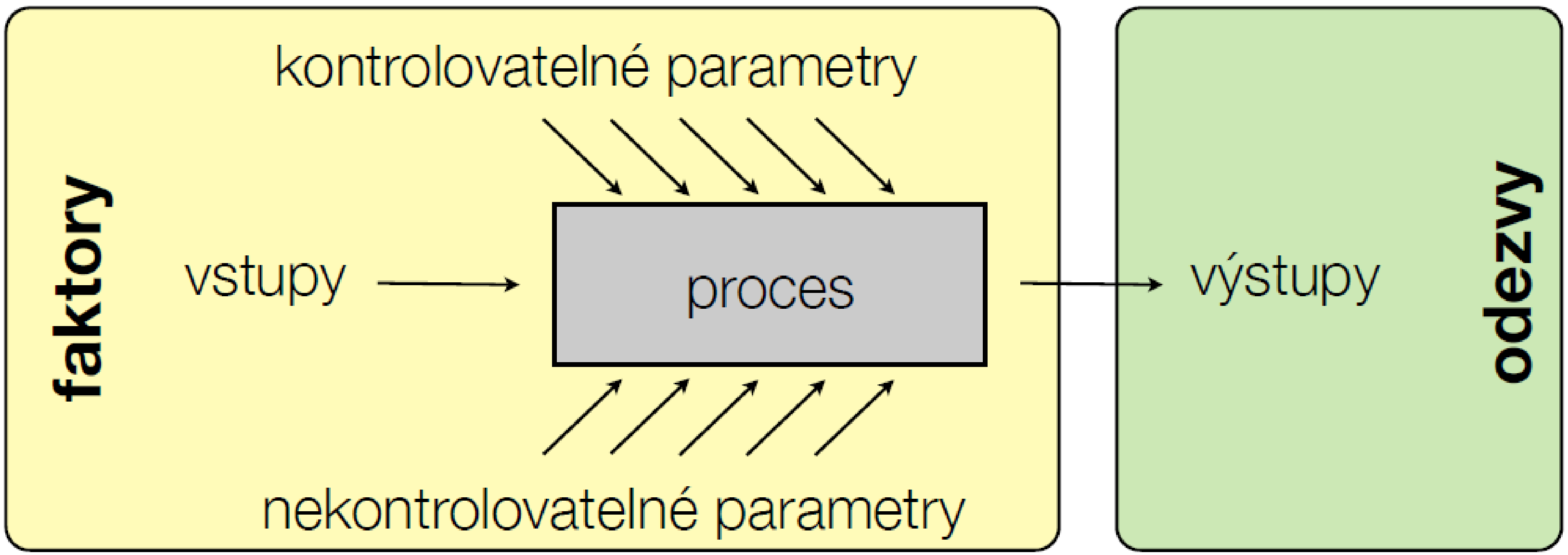
Plánování experimentů – analýza procesu

- **A**nalýza procesu

- **Definice procesu**

Plánování experimentů – analýza procesu

- **Definice procesu**
- **Volba odezvy**
- **Analýza vlivu jednotlivých faktorů**



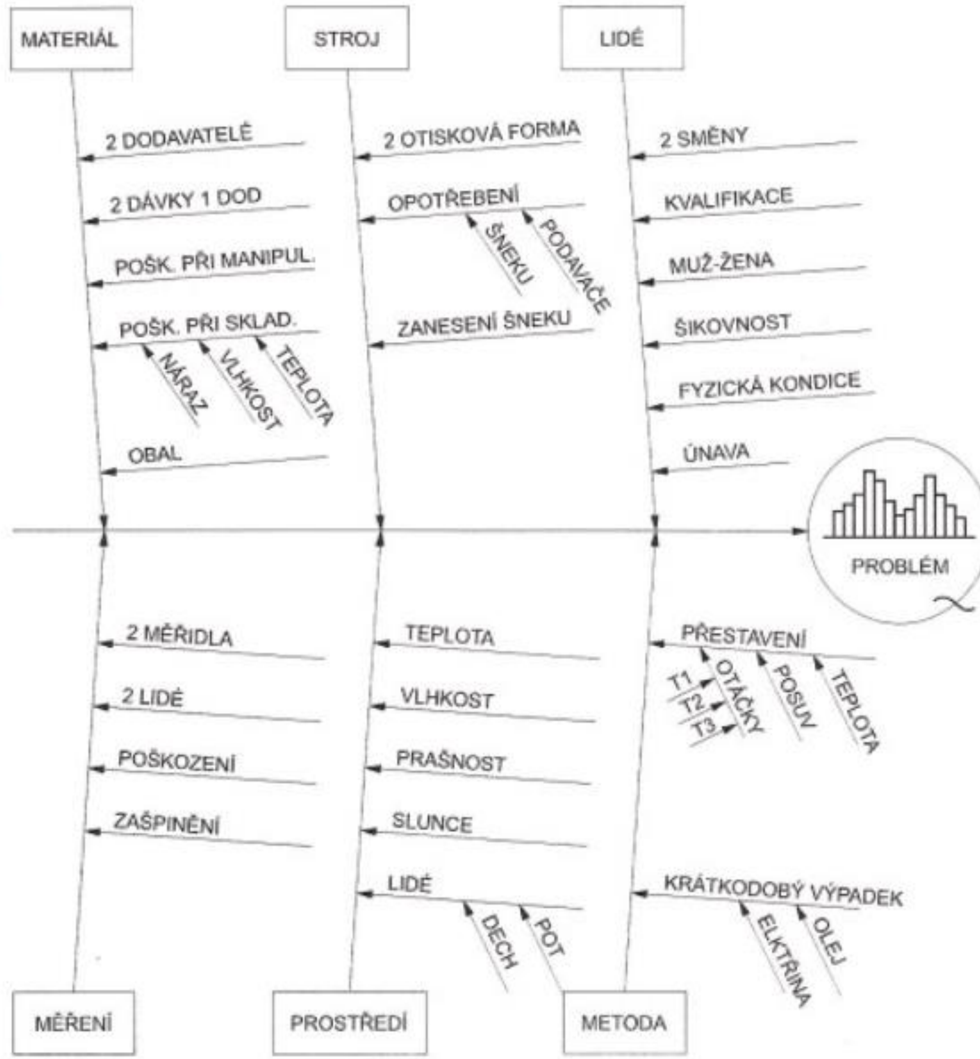
Plánování experimentů – analýza procesu

- **Definice procesu**
- **Volba odezvy**
- **Analýza vlivu jednotlivých faktorů**

Vztahy mezi proměnnými

	Prom1	Prom2	Prom3	Prom4	Prom5	Prom6	Prom7	Prom8	Prom9	Prom10
Prom1	1,00000	0,41751	-0,14240	0,16520	0,18123	-0,12016	-0,01114	0,21660	0,20847	0,22494
Prom2	0,41751	1,00000	-0,08809	0,46050	0,23849	0,03854	0,18485	0,19321	-0,17372	0,25236
Prom3	-0,14240	-0,08809	1,00000	0,53066	-0,09957	0,07507	0,01896	-0,16897	-0,41554	-0,18221
Prom4	0,16520	0,46050	0,53066	1,00000	0,04964	-0,00920	-0,09900	-0,12158	-0,42370	-0,07118
Prom5	0,18123	0,23849	-0,09957	0,04964	1,00000	-0,03731	0,14979	-0,00201	0,06294	0,00679
Prom6	-0,12016	0,03854	0,07507	-0,00920	-0,03731	1,00000	0,18537	-0,10264	-0,05058	-0,07301
Prom7	-0,01114	0,18485	0,01896	-0,09900	0,14979	0,18537	1,00000	-0,14477	-0,12047	0,07507
Prom8	0,21660	0,19321	-0,16897	-0,12158	-0,00201	-0,10264	-0,14477	1,00000	0,02049	0,23242
Prom9	0,20847	-0,17372	-0,41554	-0,42370	0,06294	-0,05058	-0,12047	0,02049	1,00000	0,46218
Prom10	0,22494	0,25236	-0,18221	-0,07118	0,00679	-0,07301	0,07507	0,23242	0,46218	1,00000
Průměry	87,48276	10,93103	40,31034	40,41379	58,06897	55,34483	15,03448	143,03448	28,79310	51,75862
Sm.Odch.	32,80094	8,76246	18,94183	17,04514	14,99031	24,18423	10,21023	47,38179	20,60925	29,64511
Poč.příp	29,00000									
Matrix	1,00000									

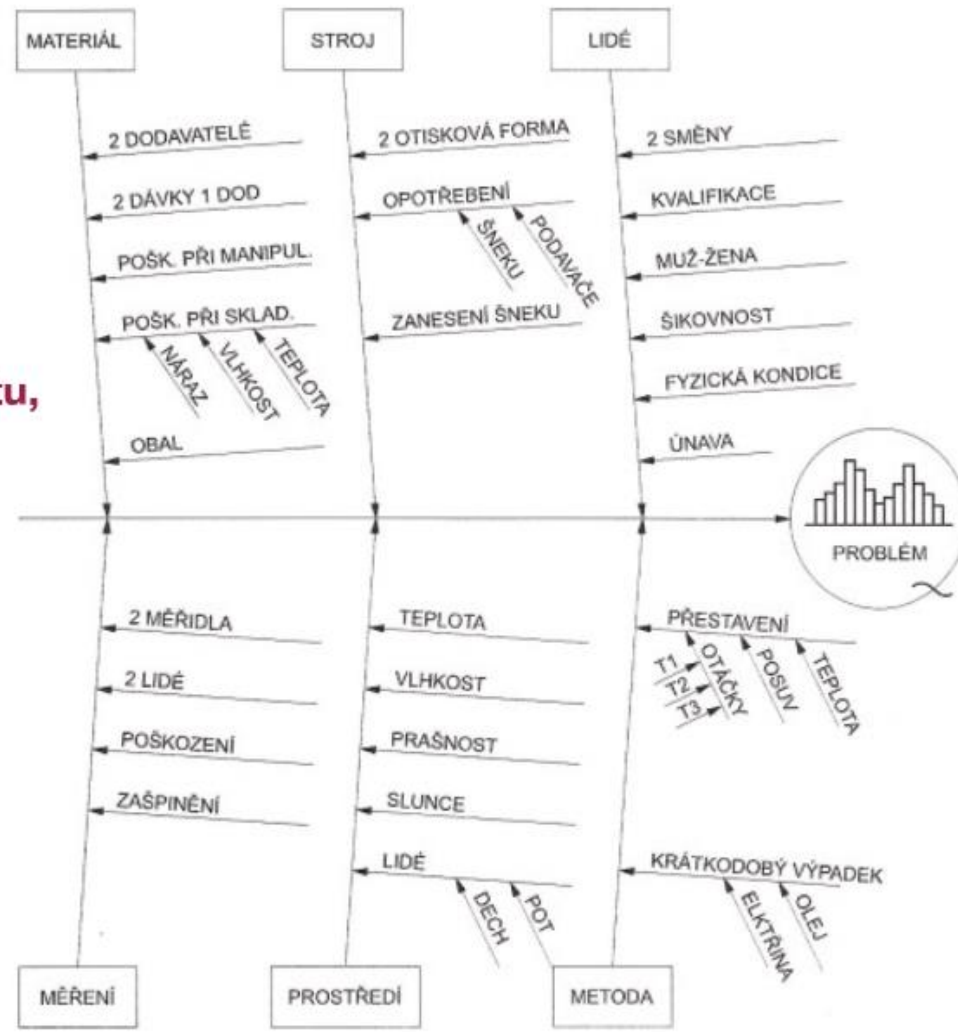
Kovarianční matice



Ishikawův diagram

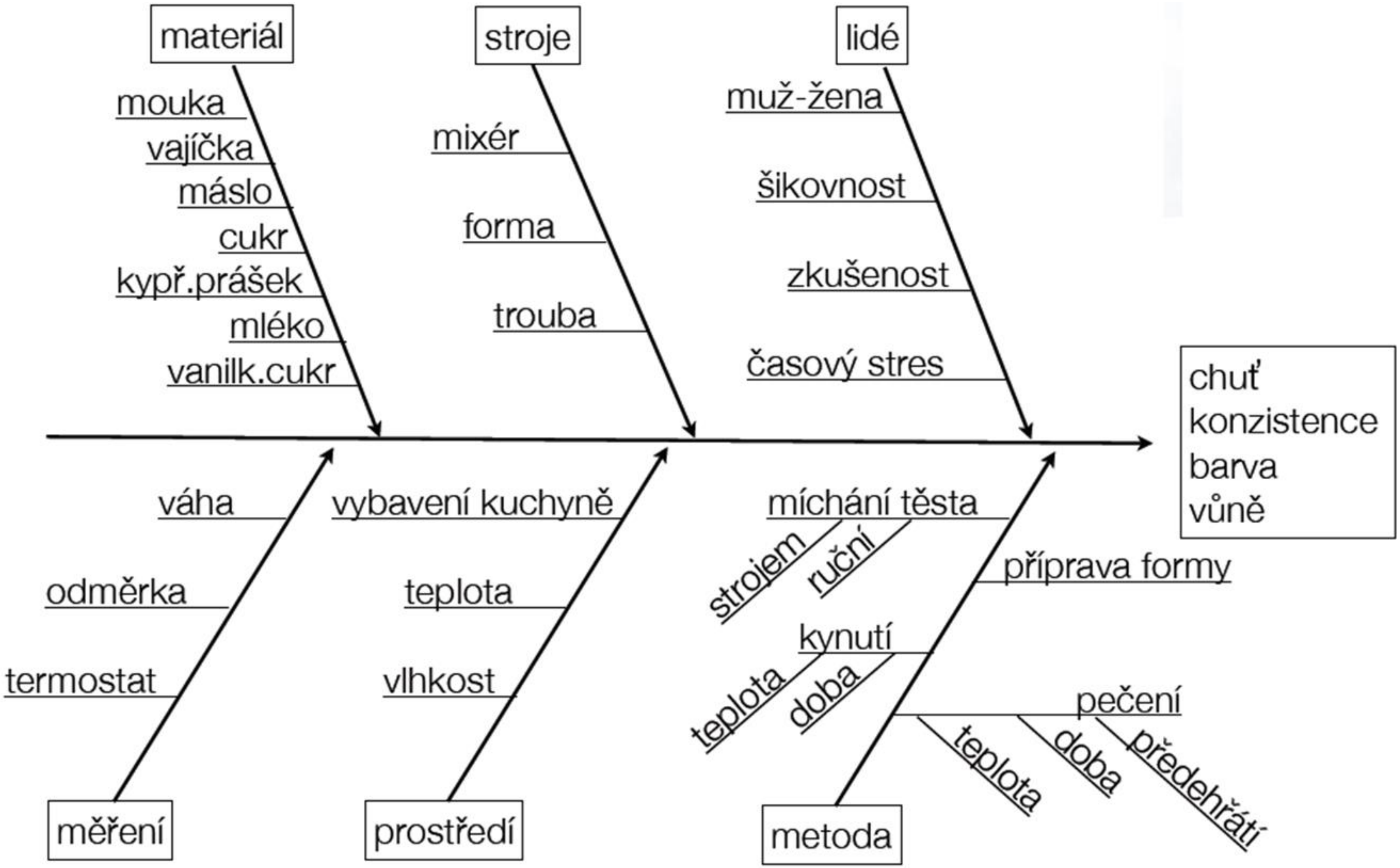
Plánování experimentů – analýza procesu

- **Definice procesu**
- **Volba odezvy**
- **Analýza vlivu jednotlivých faktorů**
- **Výběr hlavních faktorů, jejich počtu, volba jejich měřitelných úrovní**
  - jeden faktor
  - více faktorů
  - dvě úrovně
  - více úrovní

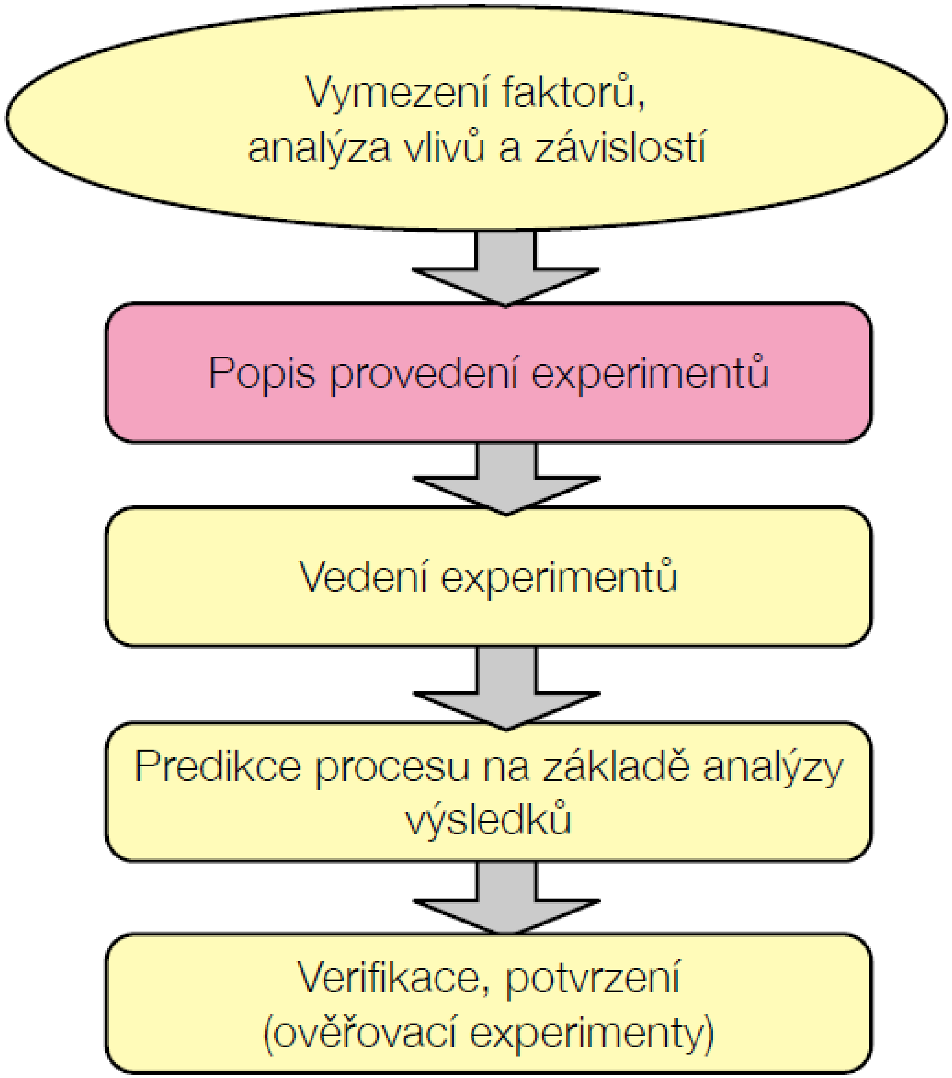


Plánování experimentů – analýza procesu

- Analýza možných příčin



Plánování experimentů – návrh experimentu



- **N**ávrh experimentu
  (Plánování experimentu)

1) zvážení časové a ekonomické náročnosti
2) norma ČSN ISO 3534/3 Navrhování experimentů (1993)
3) návrh randomizace

Plánování experimentů – typ experimentu

Norma ČSN ISO 3534/3 Navrhování experimentů (1993)

Podle uspořádání:

- **Jednofaktorové experimenty**
- **Vícefaktoriální experimenty**
- **Taguchiho ortogonální návrhy** (robustní návrhy)
- **Optimální návrhy** (optimální odezvové plochy)

Podle cíle:

- **Identifikace vlivných faktorů a jejich úrovní**
- **Hledání optimální odezvy** (optimální kombinace úrovní faktorů k dosažení optimální odezvy)
- **Směsové návrhy** (slouží k nalezení optimální směsi ingrediencí, které se podílejí na tvorbě odezvy)
- **Regresní návrhy** (nalezení regresní závislosti mezi úrovněmi faktorů a odezvou)

Plánování experimentů – jednofaktorové experimenty

- uvažujeme vliv pouze jediného (hlavního) faktoru
- tento faktor může mít k úrovní
- pro každou úroveň provedeme n měření (replikací)
- musíme provést kxn měření, která můžeme rozdělit do bloků podle dalšího (vedlejšího) faktoru
- provádíme znáhodnění pořadí měření (buď přes celý experiment nebo pouze uvnitř bloků)

Statistický model:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

odezva

společná úroveň

odchylka od společné úrovně, způsobená vlivem i-té úrovně faktoru, i=1,2,..., k

náhodná chyba v j-tém měření při i-té úrovni faktoru

O náhodných chybách ε_{ij} předpokládáme, že jsou nezávislé, stejně rozdělené s nulovou střední hodnotou a stejným rozptylem σ^2. Speciálně, předpokládáme rozdělení $N(0,\sigma^2)$

Plánování experimentů – jednofaktorové experimenty

- uvažujeme vliv pouze jediného (hlavního) faktoru
- tento faktor může mít k úrovní
- pro každou úroveň provedeme n měření (replikací)
- musíme provést kxn měření, která můžeme rozdělit do bloků podle dalšího (vedlejšího) faktoru
- provádíme znáhodnění pořadí měření (buď přes celý experiment nebo pouze uvnitř bloků)

Statistický model:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

odezva

společná úroveň

odchylka od společné úrovně, způsobená vlivem i-té úrovně faktoru, i=1,2,..., k

náhodná chyba v j-tém měření při i-té úrovni faktoru

vliv i-té úrovně faktoru, i=1,2,..., k : $\mu_i = \mu + \tau_i$

Plánování experimentů – jednofaktorové experimenty

pořadové číslo měření (replikace)

úroveň faktoru (ošetření)

	1	2	3	...	n
1	y_{11}	y_{12}	y_{13}	...	y_{1n}
2	y_{21}	y_{22}	y_{23}	...	y_{2n}
3	y_{31}	y_{32}	y_{33}	...	y_{3n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
k	y_{k1}	y_{k2}	y_{k3}	...	y_{kn}

pořadové číslo měření (replikace)

úroveň faktoru (ošetření)

	1	2	3	...	n
1	y_{11}	y_{12}	y_{13}	...	y_{1n}
2	y_{21}	y_{22}	y_{23}	...	y_{2n}
3	y_{31}	y_{32}	y_{33}	...	y_{3n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
k	y_{k1}	y_{k2}	y_{k3}	...	y_{kn}
	blok 1		blok 2		blok r

Plánování experimentů – jednofaktorové experimenty

Statistický model při uspořádání do bloků:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ij}$$

odezva

společná úroveň

vliv i-té úrovně faktoru, i=1,2,..., k

$$\sum_{i=1}^{k} \tau_i = 0$$

vliv j-tého bloku, j=1,2,... r

$$\sum_{j=1}^{r} \beta_j = 0$$

náhodná chyba v j-tém bloku při i-té úrovni faktoru

$$\mu_i = \mu + \tau_i$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$$

$$H_A : \mu_i \neq \mu_m, \quad 1 \leq i < m \leq k$$

O náhodných chybách ε $_{ij}$ předpokládáme, ž e jsou nezávislé, stejně rozdělené s nulovou střední hodnotou a stejným rozptylem σ^2. Speciálně, předpokládáme rozdělení $N(0,\sigma^2)$

Plánování experimentů – jednofaktorové experimenty

1 faktor, 2 úrovně (nezávislá měření):

	1	2	3	...	n
A	y_{11}	y_{12}	y_{13}	...	y_{1n}
B	y_{21}	y_{22}	y_{23}	...	y_{2n}

1 faktor, 2 úrovně (závislá měření):

	1	2	3	...	n
A	y_{11}	y_{12}	y_{13}	...	y_{1n}
B	y_{21}	y_{22}	y_{23}	...	y_{2n}

Plánování experimentů – jednofaktorové experimenty

- **Latinské čtverce:**
  - uvažujeme vliv pouze jediného (hlavního) faktoru
  - tento faktor může mít k úrovní
  - uvažujeme další dva vedlejší faktory, každý o k úrovních
  - cílem je provést k replikací měření s maximálním vyloučením vlivů vedlejších faktorů

1. vedlejší faktor

2. vedlejší faktor	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	B	C	D	E	A
3	C	D	E	A	B
4	D	E	A	B	C
5	E	A	B	C	D

Jednofaktorové experimenty

Model

Odezva: Y - výběrem na základě zadání

Faktor: X - na základě analýzy procesu, počet úrovní k (X_1. X_2, ..., X_k)

Počet replikací: n , budeme pozorovat Y_{ij} i=1,...,k, j=1,..,n

Počet měření: kxn

Experiment: počet úrovní, závislost měření (blokové uspořádání), znáhodnění

Metoda vyhodnocení: t-test, párový test, ANOVA, neparametrický test

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$$
$$H_A : \mu_i \neq \mu_m, \quad 1 \leq i < m \leq k$$

Jednofaktorové experimenty – příklad1

Srovnání pevnosti dvou druhů vlákem

Odezva: pevnost vlákna v tahu (v MPa)

Faktor: druh vlákna, 2 hodnoty

Počet replikací: 4

Počet měření: 2x4 = 8

Experiment: **1 faktor, 2 úrovně, nezávislá měření**

Znáhodnění (pořadí druhu vlákna při měření): 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2

Výsledky měření: 22,3 21,8 21,9 20,4 21,1 21,2 21,3 22,8

	1	2	3	4	průměr	rozptyl
A1	21,8	20,4	21,1	21,3	21,15	0,3367
A2	22,3	21,9	21,2	22,8	22,05	0,4567

Metoda vyhodnocení: Dvouvýběrový t-test

Jednofaktorové experimenty – příklad1

Srovnání pevnosti dvou druhů vlákem

Metoda vyhodnocení: Dvouvýběrový t-test

- $$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{r} y_{ij}}{r}, \qquad s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{r} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{r-1}$$

Testová statistika je dána vzorcem

$$t = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{\frac{2s^2}{r}}},$$

•Předpoklad : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

kde průměr z rozptylů uvnitř skupin $s^2 = (s_1^2 + s_2^2)/2$

H_1	Kritická hodnota	H_0 zamítneme, když
$\mu_1 - \mu_2 > 0$	$t_{1-\alpha}$	$t > t_{1-\alpha}$
$\mu_1 - \mu_2 < 0$	t_{α}	$t < t_{\alpha}$
$\mu_1 - \mu_2 \neq 0$	$t_{1-\alpha/2}$	$\lvert t \rvert > t_{1-\alpha/2}$

Pro $\alpha = 0{,}05$ je $t_{0,95}(6) = 1{,}943$

Jednofaktorové experimenty – varianty I

2 výběry rozsah n1 a n2

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$H_1: \mu_1 < \mu_2$ (levostranná alternativa),

$H_1: \mu_1 > \mu_2$ (pravostranná alternativa),

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ (dvoustranná alternativa).

a) rozptyly známe (vzácně)

$$u = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

b) rozptyly neznáme, ale předpokládáme (víme, že jsou rovny)

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Alternativní hypotéza	Kritický obor
$H_1: \mu_1 < \mu_2$	$t \leqq t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$
$H_1: \mu_1 > \mu_2$	$t \geqq t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$
$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$	$t \leqq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$ a $t \geqq t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$

Jednofaktorové experimenty – varianty II

- c) rozptyly neznáme, nepředpokládáme jejich shodu
- Hypotéza H0: μ1=μ2

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

- Stupně volnosti:

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}$$

Jednofaktorové experimenty – varianty III

Uvažujme dva náhodné výběry z normálního rozdělení, první o velikosti n_1, druhý s rozsahem n_2. Tvary hypotéz budou:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ (levostranná alternativa),

$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ (pravostranná alternativa),

$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (dvoustranná alternativa).

- Testovací statistika $$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

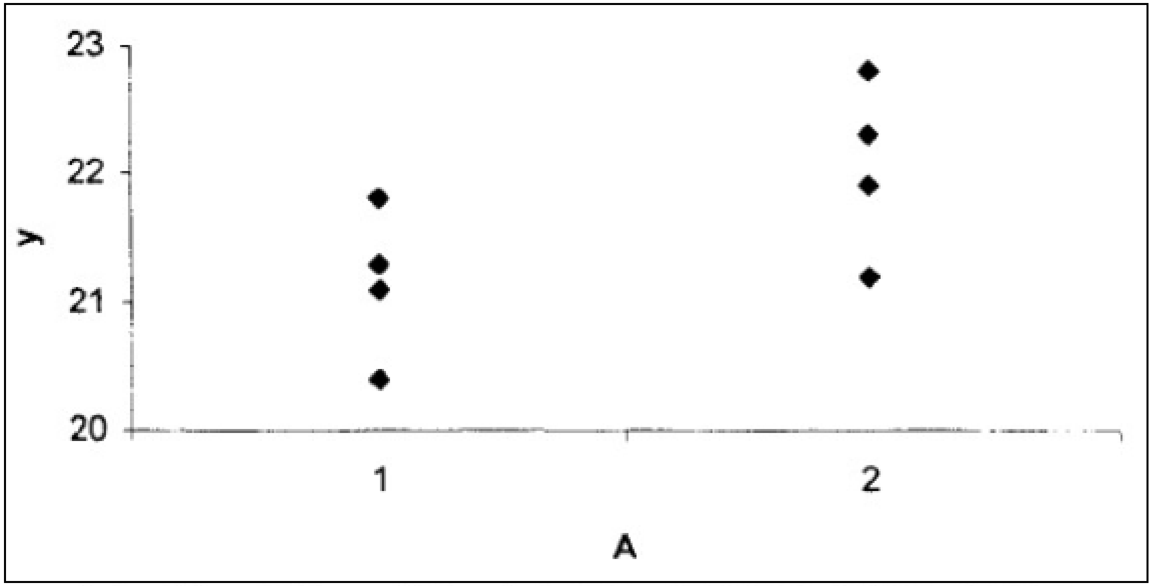
- Kritický obor

Alternativní hypotéza	Kritický obor
$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F \leqq F_{\alpha}(n_1 - 1; n_2 - 1)$
$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$F \geqq F_{1-\alpha}(n_1 - 1; n_2 - 1)$
$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F \leqq F_{\alpha/2}(n_1 - 1; n_2 - 1)$ a $F \geqq F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1; n_2 - 1)$

Jednofaktorové experimenty – příklad1

Srovnání pevnosti dvou druhů vlákem

-



	A1	A2
Stř. hodnota	21,15	22,05
Rozptyl	0,336666667	0,456666667
Pozorování	4	4
Společný rozptyl	0,396666667	
Hyp. rozdíl stř. hodnot	0	
Stupně volnosti	6	
t stat	-2,020899209	
P(T<=t)	0,044894253	
t krit	1,943180905	

Jednofaktorové experimenty

- Bartlettův test

b) Hypotéza

H0: $\sigma_{\varepsilon 1}^2 = \sigma_{\varepsilon 2}^2 = \sigma_{\varepsilon 3}^2 = \cdots = \sigma_{\varepsilon m}^2$

H1: $\sigma_{\varepsilon 1}^2 \neq \sigma_{\varepsilon 2}^2 \neq \sigma_{\varepsilon 3}^2 \neq \cdots \neq \sigma_{\varepsilon m}^2$

Pro všechna $i \neq j$, kde i=1,2,…,m – počet vzorků, j=1,2,…,n_i – počet opakování

c) Testovací statistika:

$$D = \frac{1}{C}\left[(n-m)lns^2 - \sum_{i=1}^{m}(n_i - 1)lns_i^2\right] \qquad f = \sum_{i=1}^{m}(n_i - 1)$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(m-1)}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{f}\right) \qquad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(n_i - 1)^2 s_i^2}{\sum_{i=1}^{m}(n_i - 1)^2}$$

H0 se zamítá pro

$$D > \chi^2_{1-\alpha,m-1}$$

Jednofaktorové experimenty-příklad2

Srovnání výkonnosti v závislosti na typu stroje **(1 faktor, závislá měření)**

Odezva: výkon v počtu výrobků za hodinu

Faktor: typ stroje

Počet replikací: 8 (máme 8 operátorů)

můžeme volit a) 16 znáhodněých "nezávislých měření"

b) 8 párových (závislých měření)

Experiment: **1 faktor, 2 úrovně, závislá měření - blokové (párové) uspořádání**

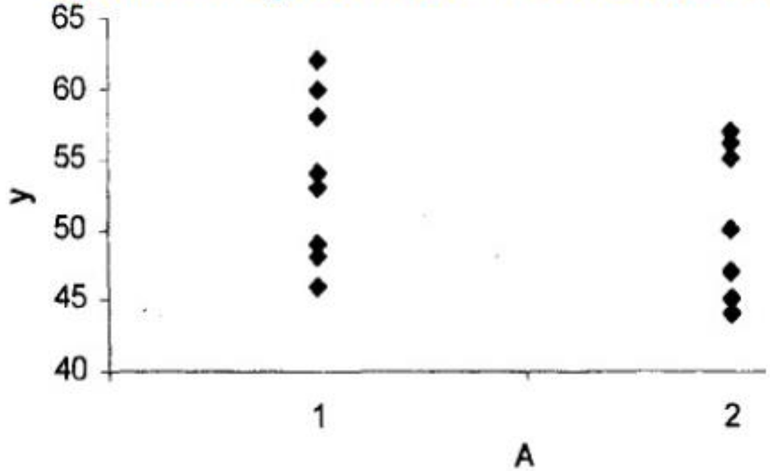
operátor	1	2	3	4	5	6	7	8
stroj A1	53	60	58	48	46	54	62	49
stroj A2	50	55	56	44	45	50	57	47
rozdíl dj	3	5	2	4	1	4	5	2

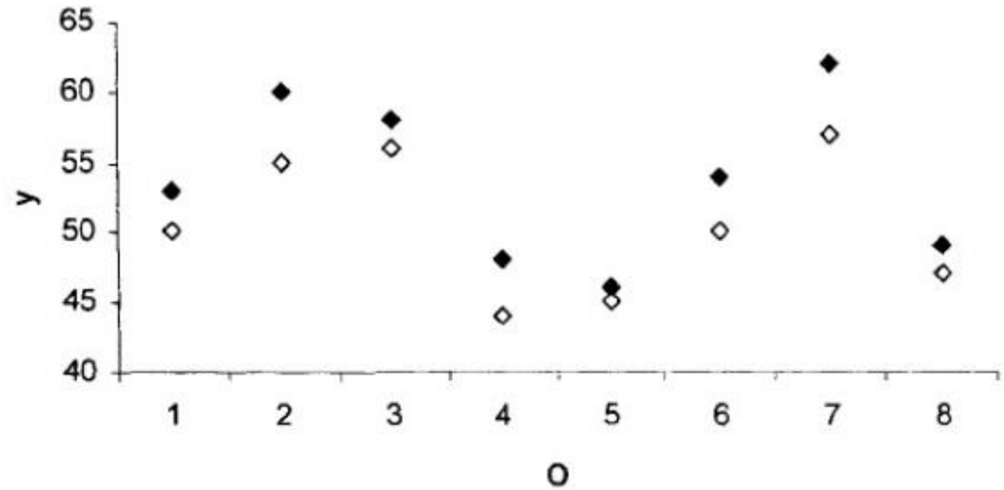
Metoda vyhodnocení: Párový t-test

Jednofaktorové experimenty-příklad2

Hypotéza H0: $\mu1=\mu2$

Srovnání výkonnosti v závislosti na typu stroje





Metoda vyhodnocení: Párový t-test

$$t = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{s_d^2}{r}}}$$

kde

$$\bar{d} = \frac{\sum_{j=1}^{r} d_j}{r}, \qquad s_d^2 = \frac{\sum_{j=1}^{r} (d_j - \bar{d})^2}{r-1}$$

	y1	*y2*
Stř. hodnota	53,75	50,5
Rozptyl	34,5	25,42857
Pozorování	8	8
Pears. korelace	0,974278	
Hyp. rozdíl stř. hodnot	0	
Stupně volnosti	7	
t stat	6,177483	
P(T<=t)	0,000228	
t krit	1,894578	

Jednofaktorové experimenty-příklad3

Srovnání pevnosti vláken od tří dodavatelů

Odezva: pevnost vlákna v tahu (v MPa)

Faktor: dodavatel vlákna, 3 hodnoty

Počet replikací: 6

Počet měření: 3x6 = 18

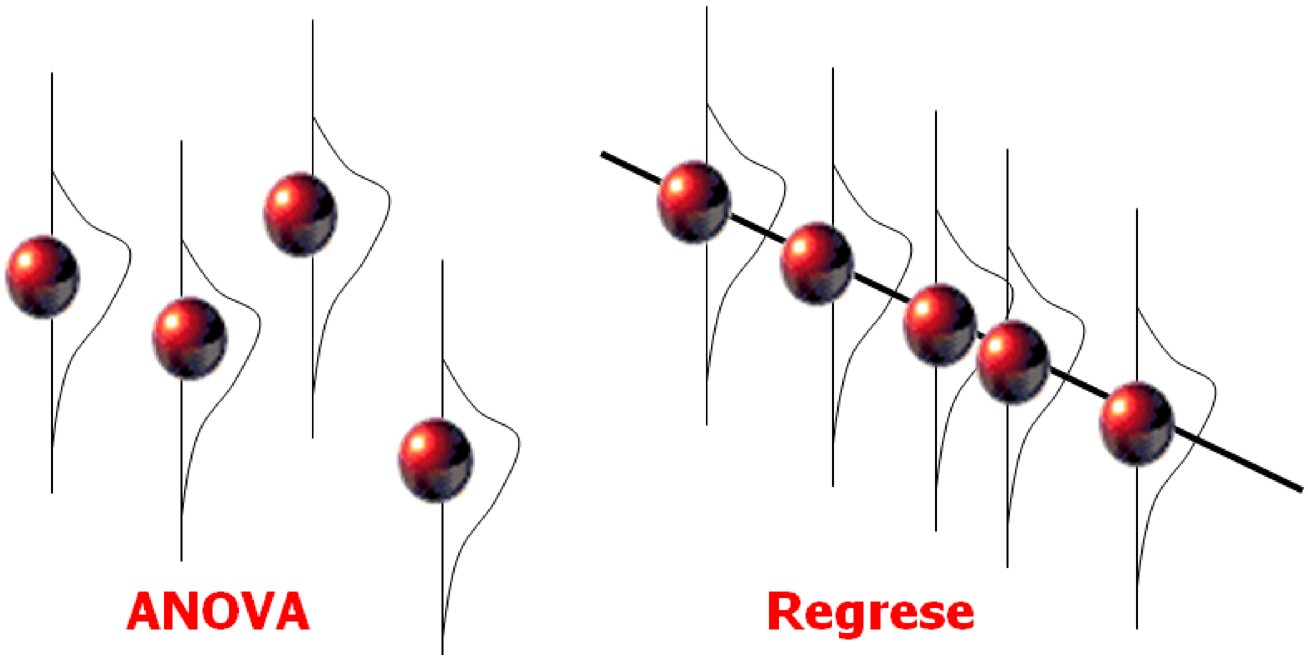
Experiment: **1 faktor, 3 úrovně, nezávislá měření)**

	1	2	3	4	5	6	průměr	rozptyl
A1	17,9	18,7	18,4	18,5	20,2	19,5	18,867	0,6987
A2	20,9	19,3	20,1	18,9	18,6	20,4	19,7	0,82
A3	22,3	22,8	23,5	22,2	22,3	21,2	22,383	0,5737

Metoda vyhodnocení: ANOVA pro 1 faktor

ANOVA I

- ANOVA a regrese



Porovnání nového a starého
Analýza DOE
Mezi laboratorní pokusy
Regrese

ANOVA II

Analysis of variance (ANOVA)

- Speciální případ regrese pro binární vysvětlující proměnnou
- Technika pro určování významnosti faktorů ovlivňujících procesy (dělení variability σ_c^2)

Objasněná přítomností faktorů

Zbytková (reziduální)

$$\sigma_c^2 = \sigma_F^2 + \sigma_R^2$$

$$F = \frac{\sigma_c^2}{\sigma_R^2}$$

Pro F větší než kritická hodnota je faktorová struktura významná

ANOVA III

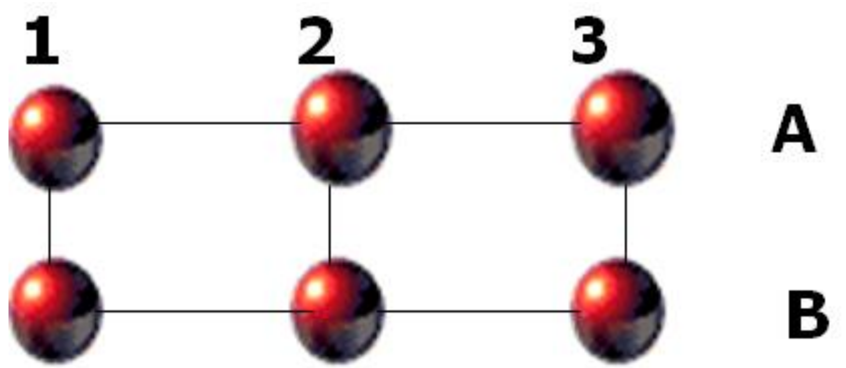
Faktory (A,B,C)

- Kvantitativní A[libovolné] – hmotnost, teplota, koncentrace, velikost částic
- Kvalitativní A[-] – způsob, stroj, obsluha, technologie

Úrovně (1,2,3)

Konkrétní velikost kvantitativního faktoru nebo stav

kvalitativního faktoru **(A= 100°C, A= stará technologie)**



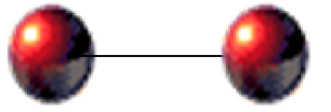
ANOVA IV

- Výsledek měření (j-tého opakování na i-té úrovni)

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

μ_i skutečná hodnota pro i-tou úroveň

Výsledná čistota produktu y pro faktor A (technologie) na úrovni A1=stará(0), A2=nová(1)



$$y_{1j} = \mu_1 + \varepsilon_{1j} \quad j = 1 \ldots n_1$$

$$y = a_1 A1 + a_2 A2$$

$$y_{2j} = \mu_2 + \varepsilon_{2j} \quad j = 1 \ldots n_2$$

$$\mu_i = \mu + \alpha_i \quad \text{i=1,2}$$

efekty $\alpha_1 = \mu - \mu_i$

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$ **hypotéza**

$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

ANOVA V

- Pevné efekty- zajímají nás pouze dané úrovně (způsob zpracování, typ přístroje, použitá metoda, surovina..)
- Náhodné efekty- úrovně jdou výběrem z jistého souboru (laboratoře, lidé, zvířata)
- Jedno faktorová ANOVA – jeden faktor A (úrovně 1,2..)
- Dvou faktorová ANOVA – dva faktory A,B na kombinaci úrovní A_iB_j

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

Efekt A Efekt B

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \tau_{ij}$$

Generální průměr Interakce A_iB_j

ANOVA VI

$$\begin{pmatrix} A1 & A2 & . & . & . & . & AK \\ y_{11} & y_{21} & . & . & . & . & y_{K1} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ y_{1n_1} & y_{2n_2} & . & . & . & . & y_{Kn_K} \end{pmatrix}$$

- Faktor A na K úrovních

$$\bar{y}_{i.} = \hat{\mu}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \quad \hat{\mu} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\hat{\mu}_i \quad \hat{e}_{ij} = y_{ij} - \hat{\mu}_i$$

- Odhady efektů $\hat{\alpha}_i = \hat{\mu} - \hat{\mu}_i$ přeurčené

Omezující podmínka $\sum_{i=1}^{K}\alpha_i n_i = 0$ pro vyvážené $\sum_{i=1}^{K}\alpha_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \hat{\mu})^2 = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i}(\underline{y_{ij} - \hat{\mu}_i} + \underline{\hat{\mu}_i - \hat{\mu}})^2$$

Rozklad součtu čtverců

Reziduální

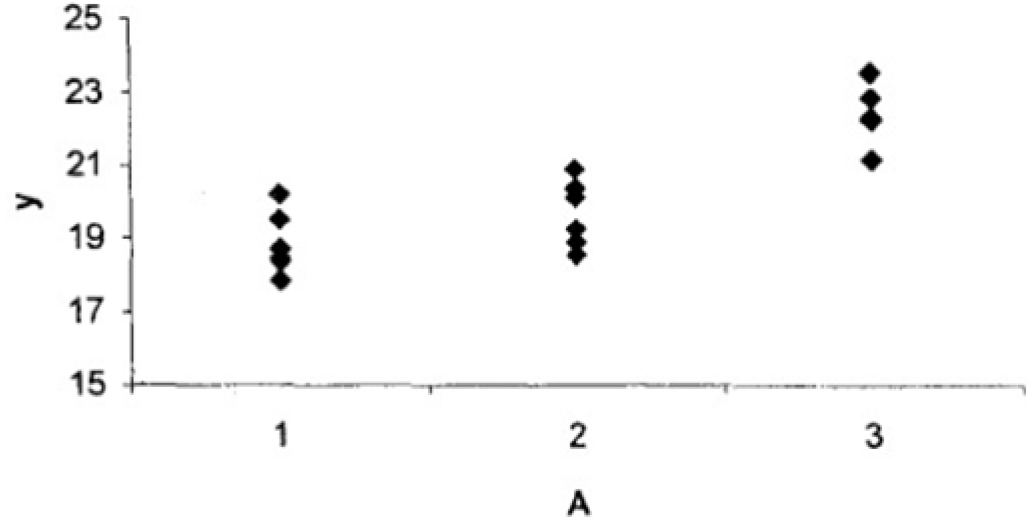
αi-vliv faktoru-velikost efektu

$$= \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i}(\hat{e}_{ij} - \hat{\alpha}_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i}\hat{e}_{ij}^2 - 2*\sum_{i=1}^{K}\hat{\alpha}_i*\sum_{j=1}^{n_i}\hat{e}_{ij} + \sum_{i=1}^{K} n_i\hat{\alpha}_i^2 = S_R + S_M$$

Jednofaktorové experimenty-příklad3

Srovnání pevnosti vláken od tří dodavatelů



$$SS_A = r\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_i - \bar{y})^2, \qquad SS_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2, \qquad SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r}(y_{ij} - \bar{y})^2$$

$$F = \frac{\dfrac{SS_A}{a-1}}{\dfrac{SS_E}{a(r-1)}} = \frac{MS_A}{MS_E}$$

má Fisherovo-Snedecorovo rozdělení o $(a$-1) a $a(r$-1) stupních volnosti

Jednofaktorové experimenty-příklad3

Srovnání pevnosti vláken od tří dodavatelů

Metoda vyhodnocení: ANOVA pro 1 faktor

Zdroj variability	Součet čtverců	Stupně volnosti	Průměrný čtverec	F	P-hodnota
faktor	SS_A	$a - 1$	$MS_A = \frac{SS_A}{a-1}$	$F = \frac{MS_A}{MS_E}$	
reziduální	SS_E	$a(r-1)$	$MS_E = \frac{SS_E}{a(r-1)}$		
celkový	SS_T	$ar - 1$			

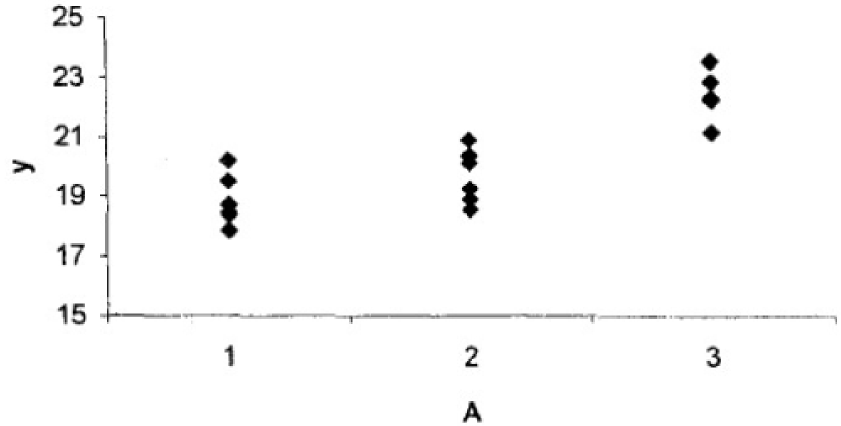
kde

ANOVA

Zdroj variability	SS	St. vol.	MS	F	Hodnota P	F krit
faktor A	40,52333	2	20,26167	29,0513	6,94E-06	3,682317
reziduální	10,46167	15	0,697444			
celkový	50,985	17				

Jednofaktorové experimenty-příklad3

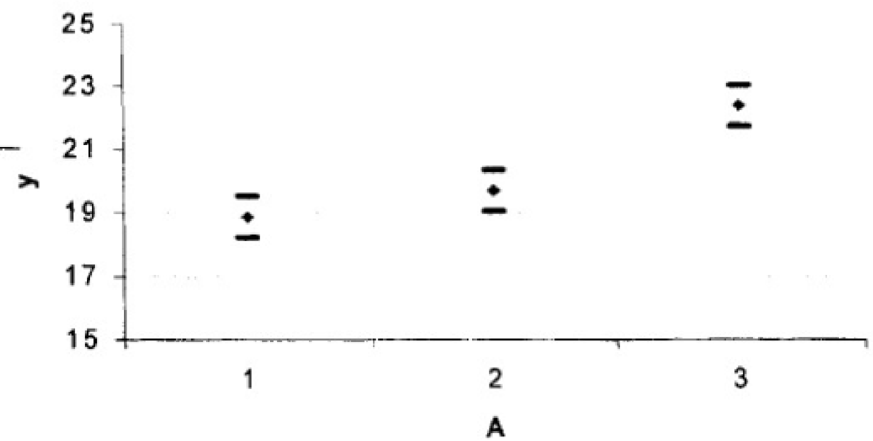
Srovnání pevnosti vláken od tří dodavatelů



Bonferroniho metoda mnohonásobného srovnání úrovní faktorů:

Úroveň	Průměr	Dolní mez	Horní mez
A_1	18,867	18,217	19,516
A_2	19,700	19,051	20,349
A_3	22,383	21,734	23,033

$$\overline{y}_i \pm t_{1-\alpha/2p} \cdot \sqrt{\frac{MS_E}{2 \cdot a}}$$



Jednofaktorové experimenty-příklad4

Vliv katalyzátoru na výtěžek chemického procesu

Odezva: výtěžek procesu (množství vyráběné látky)

Faktor: druh katalyzátoru, 4 hodnoty

Počet replikací: 6

Počet měření: 4x6 = 24

$$\boxed{SS_T = SS_A + SS_b + SS_E}$$

Vedlejší faktor: vliv várky vstupní suroviny

Experiment: **1 faktor, 4 úrovně, uspořádání do bloků, znáhodnění v blocích)**

várka	1	2	3	4	5	6	průměr	rozptyl
A1	87	79	82	89	83	78	83	18,8
A2	93	84	89	96	86	87	89,2	20,57
A3	88	80	84	91	83	82	84,7	16,67
A4	88	77	83	90	82	79	83,2	25,37

Metoda vyhodnocení: ANOVA pro 2 faktory (bez opakování)

Jednofaktorové experimenty - výklad

Znáhodněné bloky

Experimenty v provozní měřítku, kde nelze zajistit stejné podmínky experimentů.

Blok: - celkem homogenní (partie,vagon, láhev..). Celkem $G_1..G_m$ bloků.

a) Na každém se určuje vliv jednoho faktoru A na *n* úrovních (A_i i-tá úroveň).

b) Zamezení systematické chybě (stejné pořadí úrovní).

Provádí se náhodné uspořádání pořadí (losování, náhodná čísla)

Příklad: Blok 3x3

Modely ANOVA s hlavními efekty

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}$$

α_i efekt i-té úrovně A

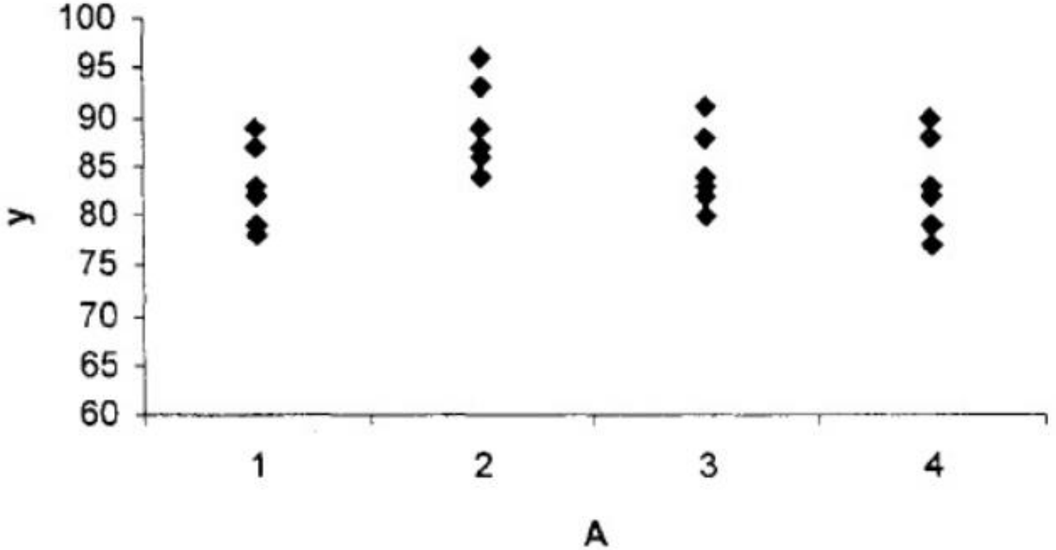
β_j efekt j tého bloku

e_{ij} chyba $\sim N(0,\sigma^2)$

G_1	A_2	A_1	A_3
G_2	A_1	A_2	A_3
G_3	A_1	A_3	A_2

Jednofaktorové experimenty-příklad4

Vliv katalyzátoru na výtěžek chemického procesu



	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	Součet
A_1	87	79	82	89	83	78	498
A_2	93	84	89	96	86	87	535
A_3	88	80	84	91	83	82	508
A_4	88	77	83	90	82	79	499
Součet	356	320	338	366	334	326	2040

Jednofaktorové experimenty-příklad4

Vliv katalyzátoru na výtěžek chemického procesu

Postup výpočtu:

Testujeme hypotézu H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

(1) Řádkové součty umocníme na druhou, sečteme vzniklé čtverce a celkový součet dělíme počtem hodnot v každém řádku

$$\frac{1}{6}\left(498^2 + 535^2 + 508^2 + 499^2\right) = 173\,549\,.$$

(2) Sloupcové součty umocníme na druhou, sečteme vzniklé čtverce a celkový součet dělíme počtem hodnot v každém sloupci

$$\frac{1}{4}\left(356^2 + 320^2 + \ldots + 334^2 + 326^2\right) = 173\,792\,.$$

(3) Utvoříme součet čtverců jednotlivých hodnot

$$87^2 + 79^2 + \ldots + 82^2 + 79^2 = 173\,956$$

(4) Celkový součet všech hodnot umocníme na druhou a dělíme celkovým počtem hodnot

$$\frac{1}{24}(87 + 79 + \ldots + 82 + 79)^2 = 173\,400\,.$$

Jednofaktorové experimenty-příklad4

Vliv katalyzátoru na výtěžek chemického procesu

Postup výpočtu:

Pro součty čtverců platí

$$SS_A = (1) - (4) = 173\,549 - 173\,400 = 149$$

$$SS_b = (2) - (4) = 173\,792 - 173\,400 = 392$$

$$SS_E = (3) - (1) - (2) + (4) = 15$$

ANOVA

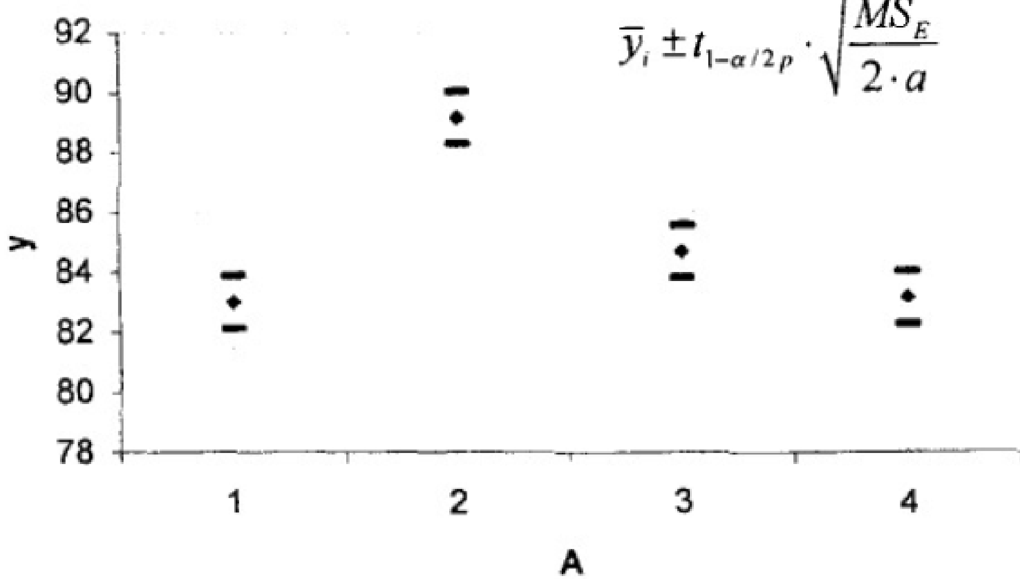
Zdroj variability	*SS*	*St.vol*	*MS*	*F*	*Hodnota P*	*F krit*
Faktor A	149	3	49,66667	49,66667	5,03E-08	3,287383
Bloky	392	5	78,4	78,4	3,28E-10	2,901295
Reziduální	15	15	1			
Celkový	556	23				

Jednofaktorové experimenty-příklad4

Bonferroniho metoda mnohonásobného srovnání srovnání úrovní faktorů:

Úroveň	Průměr	Dolní mez	Horní mez
A_1	83,0	82,1	83,9
A_2	89,2	88,3	90,0
A_3	84,7	83,8	85,5
A_4	83,2	82,3	84,0

$$\overline{y}_i \pm t_{1-\alpha/2p} \cdot \sqrt{\frac{MS_E}{2 \cdot a}}$$



Jednofaktorové experimenty-příklad5

Účinek plnidel na mechanickou pevnost tyčkových bakelitových vzorků

Odezva: pevnos v ohybu (MPa)

Faktor: druh plnidla, 5 hodnot

Počet replikací: 5

Počet měření: 5x5 = 25

Vedlejší faktor: bakelizační doba, vliv polohy vzorku v matrici

Experiment: **1 faktor, 5 úrovní, 2 vedlejší faktory, uspořádání do (znáhodněného) latinského čtverce**

Jsme –li schopni určit 2 blokové faktory – latinské čtverce

Jednofaktorové experimenty-výklad

- Latinské čtverce
- Nalezení všech hlavních efektů několika faktorů na stejném počtu úrovní.

- Tři faktory (x,y,z) na n = 4 úrovních

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\
\hline
x_1 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\
x_2 & z_2 & z_3 & z_4 & z_1 \\
x_3 & z_3 & z_4 & z_1 & z_2 \\
x_4 & z_4 & z_1 & z_2 & z_3
\end{array}
=
\boxed{\begin{array}{cccc}
A & B & C & D \\
B & C & D & A \\
C & D & A & B \\
D & A & B & C
\end{array}}
$$

V každém řádku a sloupci se písmeno vyskytuje jen jednou

A,B,C,D úrovně faktoru z

hoda: možnost vyhodnotit efekty 3 faktorů na více úrovních při poměrně malém počtu pokusů

předpoklad: efekty všech faktorů jsou aditivní, tj. mezi faktory neexistují interakce

Mnoho latinských čtverců

$n = 3 \quad 12$

$n = 4 \quad 576$

$n = 5 \quad 161280$

Jednofaktorové experimenty-výklad

- Znáhodnění

A) výchozí - základní stav

B) Znáhodnění

Řádky (1.blokový faktor)	Sloupce (2.blokový faktor) 1	2	3	4
1	A	B	D	C
2	B	C	A	D
3	C	D	B	A
4	D	A	C	B

b1) sloupce

3, 4, 1, 2

	1	2	3	4
1	C	D	A	B
2	D	A	B	C
3	A	B	C	D
4	B	C	D	A

b2) řádky 2,4,1,3

2,
4,
1,
3

	1	2	3	4
1	D	B	C	A
2	A	C	D	B
3	B	D	A	C
4	C	A	B	D

Jednofaktorové experimenty-výklad

- …… a jejich rozšíření – Latinské krychle

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \\ B & A & D & C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A1 & B2 & C3 & D4 \\ C4 & D3 & A2 & B1 \\ D2 & C1 & B4 & A3 \\ B3 & A4 & D1 & C2 \end{pmatrix}$$

- Každá kombinace musí být v řádcích a sloupcích jen jednou
- Možnost sledovat 4 faktory nebo dva hlavní (číslo, písmeno) a dva vedlejší (x,y). Nelze obecně použít pro všechny latinské čtverce.

Jednofaktorové experimenty-výklad

- 5 faktorů na 4 úrovních (stačí pouze 16 měření).

$$\begin{pmatrix} A1a & B2b & C3c & D4d \\ C4b & D3a & A2d & B1c \\ D2c & C1d & B4a & A3b \\ B3d & A4c & D1b & C2a \end{pmatrix}$$

Opět ANOVA a testy jen pro hlavní efekty

- Youdenovy čtverce

Ze standardních latinských čtverců vypuštěním posledního sloupce nebo řádku

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & A & B \\ B & C & D \\ C & D & A \end{pmatrix}$$

ANOVA a testy pro hlavní efekty

Jednofaktorové experimenty-příklad5

Účinek plnidel na mechanickou pevnost tyčkových bakelitových vzorků

Odezva: pevnos v ohybu (MPa)

Faktor: druh plnidla, 5 hodnot

Počet replikací: 5

Počet měření: 5x5 = 25

Vedlejší faktor: bakelizační doba, vliv polohy vzorku v matrici

Experiment: **1 faktor, 5 úrovní, 2 vedlejší faktory, uspořádání do (znáhodněného) latinského čtverce**

Doba (série)	Poloha v matrici				
	1	2	3	4	5
1	B 15,5	E 17,0	C 12,0	A 16,0	D 15,5
2	C 13,5	A 16,0	D 14,0	B 13,5	E 17,5
3	E 17,0	C 13,0	A 15,0	D 13,0	B 15,0
4	A 19,5	D 17,0	B 19,0	E 18,5	C 16,0
5	D 14,5	B 13,5	E 12,0	C 11,0	A 14,0

Metoda vyhodnocení:
ANOVA pro 3 faktory

Jednofaktorové experimenty-příklad5

Účinek plnidel na mechanickou pevnost tyčkových bakelitových vzorků

Zdroj variability	Součet čtverců	Stupně volnosti	Průměrný čtverec	Podíl F
faktor L	SS_L	$k-1$	$MS_F = \dfrac{SS_L}{k-1}$	$\dfrac{MS_L}{MS_E}$
řádky	SS_r	$k-1$	$MS_r = \dfrac{SS_r}{k-1}$	$\dfrac{MS_r}{MS_E}$
sloupce	SS_c	$k-1$	$MS_c = \dfrac{SS_c}{k-1}$	$\dfrac{MS_c}{MS_E}$
reziduální	SS_E	$(k-1)(k-2)$	$MS_E = \dfrac{SS_E}{(k-1)(k-2)}$	
celkový	SS_T	k^2-1		

$$SS_T = SS_L + SS_r + SS_c + SS_E$$

Podíl F má Fisherovo rozdělení s $(k$-1) a $(k$-1)$(k$-2) stupni volnosti

Metoda vyhodnocení:
ANOVA pro 3 faktory

Jednofaktorové experimenty-příklad5

Účinek plnidel na mechanickou pevnost tyčkových bakelitových vzorků

- **Postup výpočtu:**

Doba (série)	Poloha v matrici					Řádkové součty
	1	2	3	4	5	
1	B 15,5	E 17,0	C 12,0	A 16,0	D 15,5	76,0
2	C 13,5	A 16,0	D 14,0	B 13,5	E 17,5	74,5
3	E 17,0	C 13,0	A 15,0	D 13,0	B 15,0	73,0
4	A 19,5	D 17,0	B 19,0	E 18,5	C 16,0	90,0
5	D 14,5	B 13,5	E 12,0	C 11,0	A 14,0	65,0
Sloupcové součty	80,0	76,5	72,0	72,0	78,0	378,5

Plnidlo	A	B	C	D	E
Součet	80,5	76,5	65,5	74,0	82,0

Jednofaktorové experimenty-příklad5

Účinek plnidel na mechanickou pevnost tyčkových bakelitových vzorků

Postup výpočtu:

(1) Řádkové součty umocníme na druhou, sečteme vzniklé čtverce a celkový součet dělíme počtem hodnot v každém řádku

$$\frac{1}{5}\left(76^2+74{,}5^2+73^2+90^2+65^2\right)=5\,796{,}05\,.$$

(2) Sloupcové součty umocníme na druhou, sečteme vzniklé čtverce a celkový součet dělíme počtem hodnot v každém sloupci

$$\frac{1}{5}\left(80^2+76{,}5^2+72^2+72^2+78^2\right)=5\,740{,}85\,.$$

(3) Součty podle jednotlivých úrovní zkoumaného faktoru umocníme na druhou, sečteme vzniklé čtverce a celkový součet dělíme počtem úrovní faktoru

$$\frac{1}{5}\left(80{,}5^2+76{,}5^2+65{,}5^2+74^2+82^2\right)=5\,764{,}55\,.$$

(4) Utvoříme součet čtverců jednotlivých hodnot

$$15{,}5^2+13{,}5^2+\ldots+16^2+14^2=5\,851{,}25.$$

Jednofaktorové experimenty-příklad5

Účinek plnidel na mechanickou pevnost tyčkových bakelitových vzorků

Postup výpočtu:

(5) Celkový součet všech hodnot umocníme na druhou a dělíme celkovým počtem hodnot

$$\frac{1}{25}378,5^2 = 5\,730,49\,.$$

Vypočteme potřebné součty čtverců pro tabulku ANOVA

$$SS_p = (3) - (5) = 5\ 764,55 - 5\ 730,49 = 34,06$$

$$SS_r = (1) - (5) = 5\ 796,05 - 5\ 730,49 = 65,56$$

$$SS_c = (2) - (5) = 5\ 740,85 - 5\ 730,49 = 10,36$$

$$SS_E = (4) - (1) - (2) - (3) + 2 \cdot (5) = 5\ 851,25 - 5\ 796,05 - 5\ 740,85 - 5\ 764,55 + 2 \cdot 5\ 730,49 = 10,78$$

Jednofaktorové experimenty-příklad5

Účinek plnidel na mechanickou pevnost tyčkových bakelitových vzorků

Zdroj variability	Součet čtverců	Stupně volnosti	Průměrný čtverec	Podíl F
faktor L	34,06	4	8,515	9,479
řádky	65,56	4	16,390	18,245
sloupce	10,36	4	2,590	2,883
reziduální	10,78	12	0,898	

Kritická hodnota F-rozdělení: $F_{0,95}(4,12) = 3,259$.

Mnohonásobná porovnávání (Bonferroni):

Úroveň	Průměr	Dolní mez	Horní mez
A	16,1	15,1	17,1
B	15,3	14,3	16,3
C	13,1	12,1	14,1
D	14,8	13,8	15,8
E	16,4	15,4	17,4